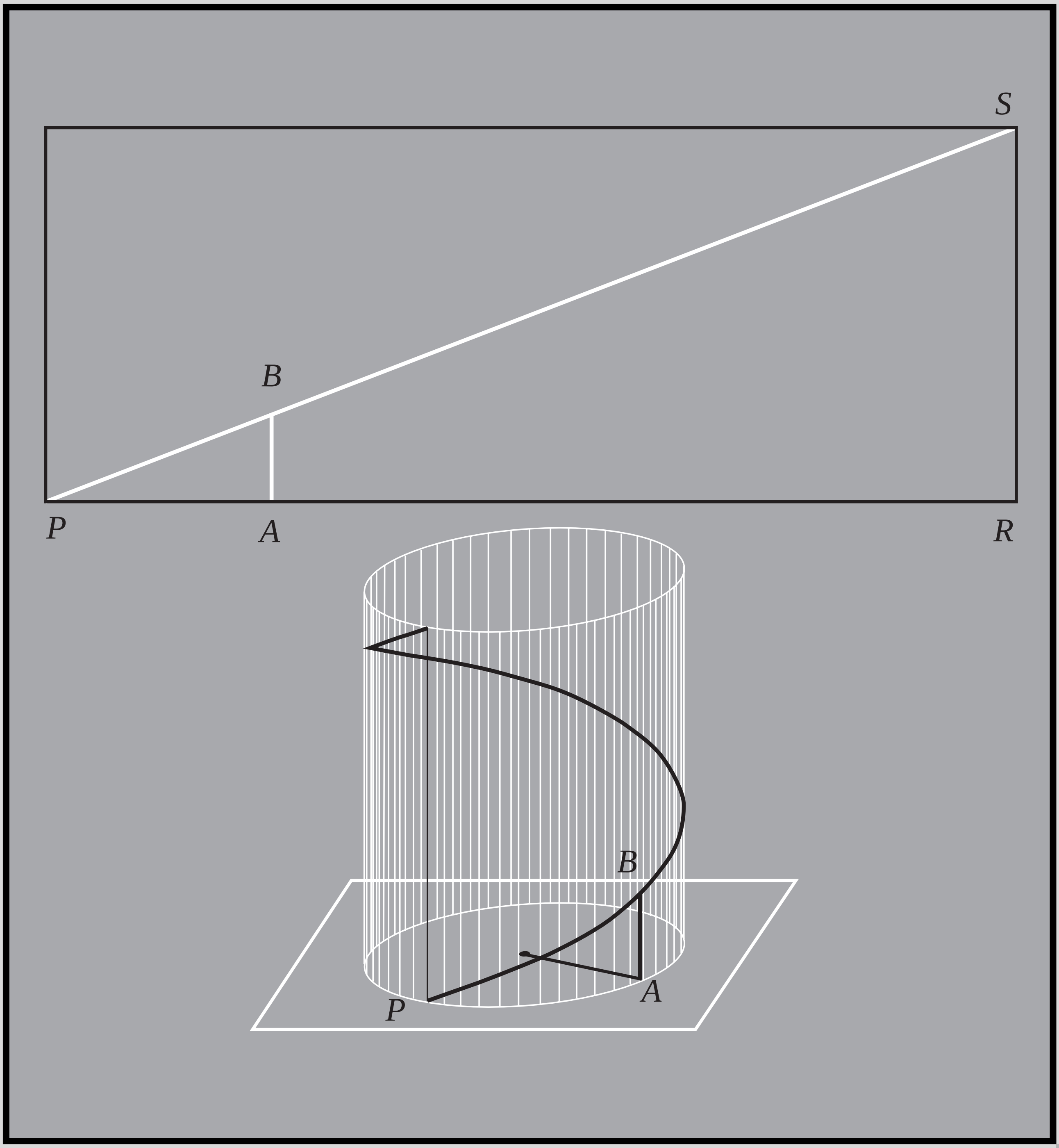
CABRIRRSAE 2002

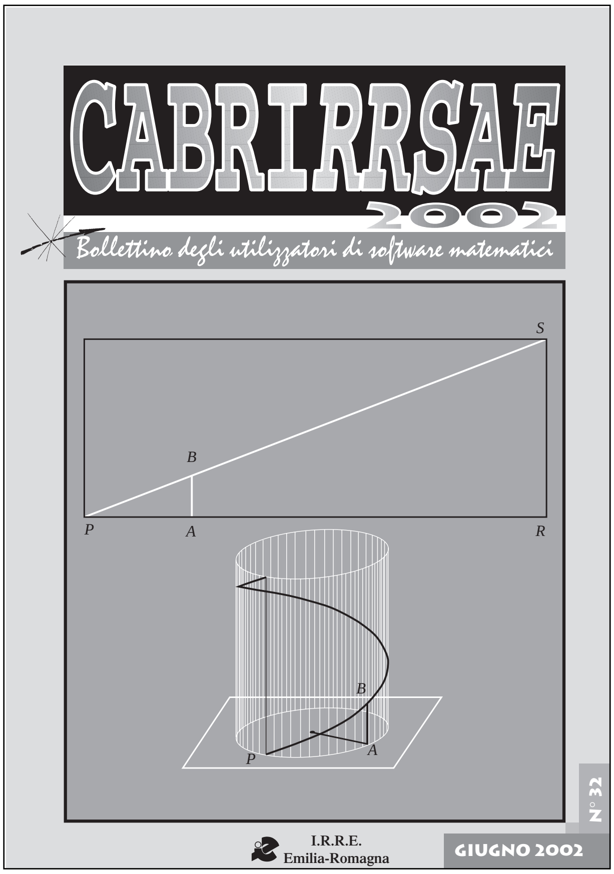
Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 32

I.R.R.E.
Emilia-Romagna

LUGLIO 2002



L'immagine

Elica Cilindrica.
Il triangolo rettangolo PRS ha il cateto PR uguale alla circonferenza di base del cilindro e il cateto RS uguale all'altezza del cilindro.
Avvolgendo PRS sul cilindro, l'ipotenusa PS si dispone secondo un'elica cilindrica destrorsa. L'elica è anche una curva geodetica sul cilindro, ovvero il tragitto più breve che congiunge due punti.
L'idea per la figura proviene da un problema contenuto nel rapporto Villani-Bodin: http://www.emis.de/projects/Ref/
Figura realizzata con Cabri da L. Tomasi

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** abbiamo il resoconto su una attività interdisciplinare, in un biennio di scuola secondaria di secondo grado, che ha coinvolto gli insegnanti di matematica, inglese e tecnologia.
Nella sezione ***Come fare*** presentiamo due lavori rivolti entrambi a studenti del triennio di scuola superiore. Nel primo si sfruttano la dinamicità e le opzioni offerte dal

segue a pag. 3

Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE* 2002
IRRE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@kidslink.scuole.bo.it
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@kidslink.scuole.bo.it

Fardiconto:
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.2, Marzo-Aprile 2002, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

Sommario

segue da pag. 2
software Cabri II, per realizzare una analisi qualitativa e quantitativa del moto di una pallina in aria; nel secondo viene presentata la risoluzone di un problema di geometria euclidea in cui si utilizza il software Cabri per indagare ed illustrare le verie fasi del lavoro.
Chiude il bollettino una rassegna di letture per ragazzi, ricavata da uno scambio di informazioni avvenuto sulla lista di discussione ***Cabrinews***.
Troviamo ancora notizie dalla rete nella ***Recensione del mese*** in copertina.

Corsi e seminari

Nell'anno scolastico 2001 - 2002 l'Università di Bologna ha avuto il piacere di ospitare il prof. Douglas Hofstadter, responsabile del Center for Research on Concepts and Cognition dell'Indiana University di Bloomington, USA.
Il prof. Hofstadter ha dedicato alcuni Seminari anche al mondo dei matematici e fisici:

- 17 maggio 2002, Dipartimento di Fisica
  The pervasive power of analogies in the progress of phisics
- 27 maggio 2002, Dipartimento di Matematica
  Rapporti tra i centri dei triangoli
- 31 maggio 2002, Dipartimento di Matematica
  Simmetrie fra i centri ed i coniùgi
- 4 giugno, Dipartimento di Matematica
  Una famiglia di geometrie: variazioni sul tema della Geometria Euclidea
- 6 giugno, Dipartimento di Matematica
  Immagini di gruppi: teoria dei gruppi visiva
- 11 giugno, Dipartimento di Matematica
  Funzioni ricorsive caotiche
- 13 giugno, Dipartimento di Matematica
  Il teorema di van der Waerden: la battaglia fra chiarezza e oscurità in Matematica

CONGRESSO NAZIONALE MATHESIS 2002
"LA MATEMATICA FRA TRADIZIONE E INNOVAZIONE: UN CONFRONTO EUROPEO"BERGAMO 17 - 18 - 19 OTTOBRE 2002
*Palazzo della Ragione • Centro di Formazione della • Banca Popolare di Bergamo-Credito Varesino • Aula Magna dell'Università*Il Congresso sarà strutturato in conferenze mattutine e in comunicazioni pomeridiane.
Per quanto riguarda l'aggiornamento del programma e dei relatori, le modalità d'iscrizione e di partecipazione,le relative informazioni si troveranno sul sito
http://utenti.lycos.it/mathesisbergamo
E' previsto l'esonero ministeriale per il personale ispettivo, direttivo e docente delle scuole di ogni ordine e grado che parteciperà al Congresso.

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.
Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

Cabri discusso

Un'esperienza interdisciplinare
La trisezione dell'angolo[1]

di Stefania Ferrari
I T I S "Fermi", Mantova

Da sempre ho subito il fascino del tema *"i famosi problemi dell'antichità greca"* e ho quindi deciso di affrontare una parte dell'argomento con i miei studenti di seconda ITIS, cercando di coinvolgere anche alcuni colleghi.
E' nata in questo modo un'interessante attività interdisciplinare con le materie inglese, matematica e tecnologia, che si è svolta nel secondo quadrimestre e che ha perseguito i seguenti obiettivi:

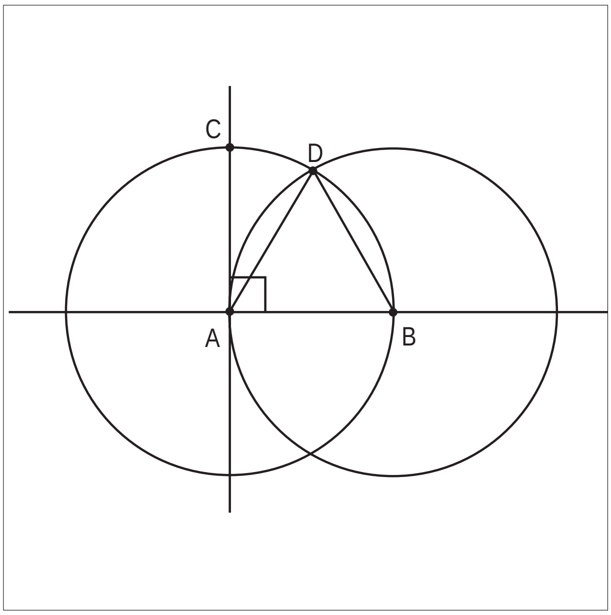
conoscere il significato di costruzione geometrica eseguita con riga e compasso;
conoscere alcuni metodi per trisecare l'angolo e saperli dimostrare;
conoscere un semplice lessico matematico in lingua inglese;
comprendere un semplice testo di matematica in lingua inglese;
realizzare con *Cabri II* una costruzione in modo autonomo;
analizzare i limiti delle costruzioni geometriche realizzate;
conoscere l'uso di strumenti meccanici per risolvere problemi matematici;
costruire una semplice macchina matematica in legno;
sapere svolgere una ricerca mirata su Internet;
realizzare un semplice ipertesto in modo guidato;
lavorare in gruppo su obiettivi diversi per raggiungere un prodotto finale comune.

L'attività didattica ha seguito le seguenti fasi.

1. Introduzione al problema
La prima lezione ha avuto come oggetto una breve introduzione storica, durante la quale ho raccontato agli studenti alcune notizie sul periodo classico e sul periodo alessandrino della storia della matematica greca, focalizzando l'attenzione sui matematici che già conoscevano (Pitagora, Euclide, Talete, ...).
L'attenzione si è poi trasferita sui "*famosi problemi*" (duplicazione del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del cerchio) e sul significato di costruzione con riga e compasso. A questo proposito, per favorire la comprensione, gli studenti, a gruppi, hanno scelto alcune costruzioni create durante l'anno con Cabri e spiegato perché erano state costruite solo con l'uso di riga e compasso.
A questo punto ho proposto di ricercare nel Web materiale in lingua inglese relativo alla trisezione dell'angolo.
Gli studenti hanno navigato in Internet e trovato informazioni di vario genere.
Con l'insegnante di inglese (prof. A. Rodighiero) ho visionato il materiale e abbiamo scelto da
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history-/HistTopics/Trisecting_an_angle.html
tre brani da proporre alla classe.

2. Trisezione di un angolo con riga e compasso
Il primo brano in lingua inglese era relativo ad una breve introduzione storica e al fatto che il problema della trisezione dell'angolo può, per alcuni angoli, essere risolto con riga e compasso.
Con l'insegnante di inglese sono state svolte attività di comprensione del testo e attività linguistico-lessicali proprie della disciplina.
In matematica è stato proposto di ricercare un metodo per trisecare l'angolo retto basato sulla semplice osservazione che la terza parte di una angolo retto è un angolo di 30° e che questo si ottiene come differenza fra un angolo retto e un angolo di 60° (angolo interno di un triangolo equilatero). Il metodo è stato subito intuito dagli studenti e il risultato è riportato in figura,

$$C\hat{A}D = 1/3\ C\hat{A}B\ .$$



Come si vede, nella costruzione non vengono riportare lunghezze e quindi sono rispettate le regole della geometria classica.
Da questo esempio segue immediatamente la trisezione

dell'angolo di 45°, che si ottiene dalla bisezione dell'angolo di 30°.
Successivamente, nelle fasi 2 e 3 sono stati presentati due metodi per risolvere il problema senza le restrizioni delle costruzioni con riga e compasso.
I metodi di Archimede e di Nicomede (entrambi del periodo alessandrino, quindi meno legati alle costruzioni con riga e compasso) sono stati considerati delle congetture da validare seguendo questa procedura:
- costruzione del disegno con carta e matita;
- costruzione del disegno con *Cabri II*;
- riorganizzazione del processo eseguito in forma coerente;
- manipolazione della figura e ricerca degli eventuali limiti;
- esplicitazione di ipotesi e tesi e dimostrazione rigorosa (solo dopo avere verificato la validità del metodo).

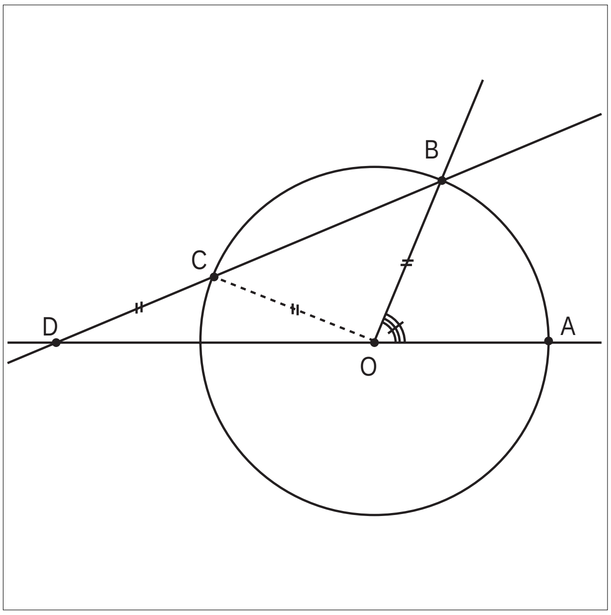
3. Il metodo di Archimede

Il metodo segue il seguente procedimento: assegnato un angolo AOB, tracciare la circonferenza di centro O e raggio r; prolungare AO nella direzione che va da A verso O e tracciare la retta passante per B in modo che CD=r, dove C è un punto della circonferenza e D si trova sul prolungamento di AO.
Si ottiene che

$$A\hat{D}B = 1/3\, A\hat{O}B$$

Gli studenti hanno eseguito la costruzione con carta e matita, usando il testo in lingua inglese.
La difficoltà principale è stata quella di determinare la giusta inclinazione della retta CD. La via corretta veniva suggerita dal testo proposto: usare la riga per riportare una lunghezza (operazione non consentita nelle costruzioni con riga e compasso). Gli studenti hanno quindi riportato il raggio r sulla riga e determinato la giusta inclinazione, facendola scorrere in modo che un estremo del raggio fosse sulla retta OA e l'altro sulla circonferenza facendo in modo che la retta CD passasse per B.
In laboratorio con Cabri è emersa questa costruzione:
- tracciare la retta OA;
- tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA;
- tracciare una semiretta uscente da O e indicare con B l'intersezione della semiretta con la circonferenza;
- segnare e misurare il raggio OA;
- segnare e misurare l'angolo AOB;
- tracciare una retta r passante per B;
- segnare il punto D intersezione di r con la retta OA (esterno alla circonferenza e da parte opposta di A rispetto ad O);
- segnare il punto C intersezione di r con la circonferenza;
- segnare e misurare il segmento CD;
spostare il punto D fino a quando CD misura quanto il raggio;[2]
segnare e misurare l'angolo ADB.

Le misure degli angoli ADB e AOB hanno validato la costruzione, ma al momento di sfruttare la dinamicità di Cabri gli studenti si sono accorti di una particolarità:



spostando la semiretta OB in modo da deformare l'angolo AOB, il segmento CD non si manteneva uguale al raggio, ma era necessario spostare anche il punto D. Questa osservazione è risultata preziosa nel momento della costruzione della macchina matematica.
Eseguendo poi la deformazione dell'angolo AOB e il conseguente aggiustamento della posizione del punto D, si è osservato che il metodo è valido per tutti gli angoli minori dell'angolo piatto.
Convinti della validità del metodo, gli studenti hanno scritto ipotesi e tesi e fatto la dimostrazione (che fa uso del teorema dell'angolo esterno applicato ai triangoli isosceli DCO e COB).

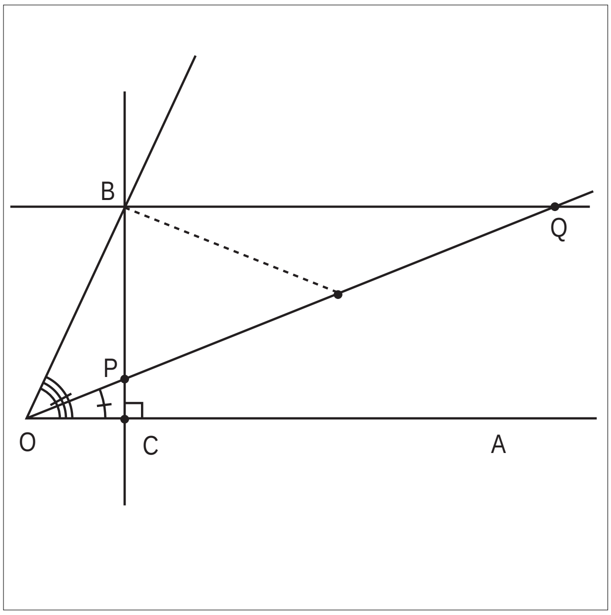
4. Il metodo di Nicomede

Il metodo si basa sul seguente procedimento: dato un angolo acuto AOB tracciare il segmento BC perpendicolare alla semiretta OA, tracciare la semiretta BD parallela a OA; prendere su BD un punto Q in modo che il segmento OQ intersechi CB nel punto P tale che PQ=2OB.
Allora

$$A\hat{O}Q = 1/3 A\hat{O}B$$

Per eseguire la costruzione con carta e matita, è stato necessario riportare il doppio del segmento OB sulla riga e determinare la giusta inclinazione della semiretta OQ.
In laboratorio con Cabri è emersa questa costruzione:
- tracciare le semirette OA e OB;
- segnare i punti A e B;
- segnare e misurare l'angolo AOB;
- tracciare la retta per B perpendicolare a OA e indicare con C l'intersezione;
- tracciare la retta per B parallela a OA;
- misurare il segmento OB;
- tracciare la semiretta OQ e segnare la sua intersezione P con BC;
- misurare il segmento PQ;
- spostare Q fino a quando PQ=2OB;

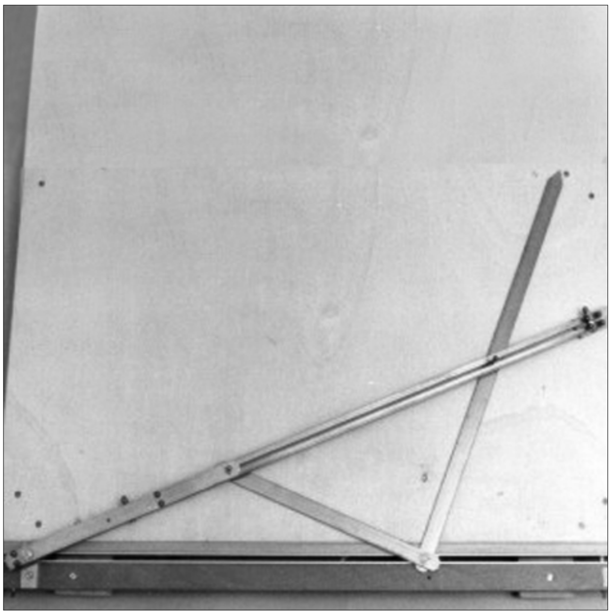
- segnare e misurare l'angolo QOA.



Anche questa costruzione è stata *testata* modificando l'ampiezza dell'angolo AOB e anche in questo caso si è visto che era necessario ogni volta modificare anche la posizione di Q per mantenere PQ=2OB. Con questo metodo è possibile trisecare angoli minori dell'angolo retto.
Gli studenti hanno quindi scritto la dimostrazione, che risulta facilitata tracciando il segmento che congiunge B con il punto medio di PQ. Essa fa uso del teorema dell'angolo esterno applicato al triangolo isoscele e dei criteri di parallelismo.

5. Il trisettore di Pascal

Infine, l'insegnante di tecnologia (prof. P. Vincenzi) si è reso disponibile per la costruzione della macchina detta



"Trisettore di Pascal", che utilizza il metodo di Archimede e che sfrutta lo scorrimento di due punti, per superare il problema emerso nella costruzione con Cabri. La macchina è stata realizzata in legno e l'attività ha richiesto circa 10 ore.
Le informazioni per la costruzione sono state tratte dal bellissimo sito **http://www.museo.unimo.it/theatrum** del Museo di Modena, dedicato alle macchine matematiche (la foto è tratta dal sito del Museo).

6. L'ipertesto

Un aspetto positivo dell'attività è che tutti gli studenti della classe hanno lavorato e che è sicuramente servita da stimolo la prospettiva di realizzare un ipertesto da pubblicare sul giornalino elettronico della scuola (www.itis.mn.it). Durante questa attività i gruppi hanno lavorato ciascuno su un aspetto diverso, curando la stesura di una pagina dell'ipertesto e l'insegnante ha assunto il ruolo di coordinatore dei lavori, fondamentale durante la progettazione e la sintesi finale.
E' stato usato il software *Front Page*, sfruttando solo i comandi più elementari.

7. Verifica

E' stata svolta una breve prova di verifica, durante la quale agli studenti è stato sottoposto un teorema in lingua inglese relativo alla circonferenza, del quale dovevano fare la costruzione della figura con Cabri e la dimostrazione in lingua italiana.

8. Conclusioni

Ritengo che la metodologia usata (interdisciplinarità, lavoro di gruppo, validazione di una congettura, uso del mezzo informatico,...) possa essere riutilizzata per affrontare anche altri argomenti, da sviluppare magari nell'ambito del 15% del monte ore messo a disposizione dall'autonomia.

[1] L'argomento è già stato trattato nelle pubblicazioni di **CABRI***RRSAE*. Si vedano in proposito il quaderno n. 8 e i bollettini n. 16 e n. 21 [NdR].

[2] Questa operazione, come nella successiva costruzione, evidenzia la impossibilità di trisecare un angolo con riga e compasso[NdR].

COME FARE

media superiore

L'articolo che segue è un contributo presentato al Convegno ADT di Cattolica (RN), Ottobre 2001. Comparirà negli Atti del Convegno che saranno pubblicati su CD-Rom entro l'estate 2002.

Analisi vettoriale del moto di una pallina in aria con Cabri II

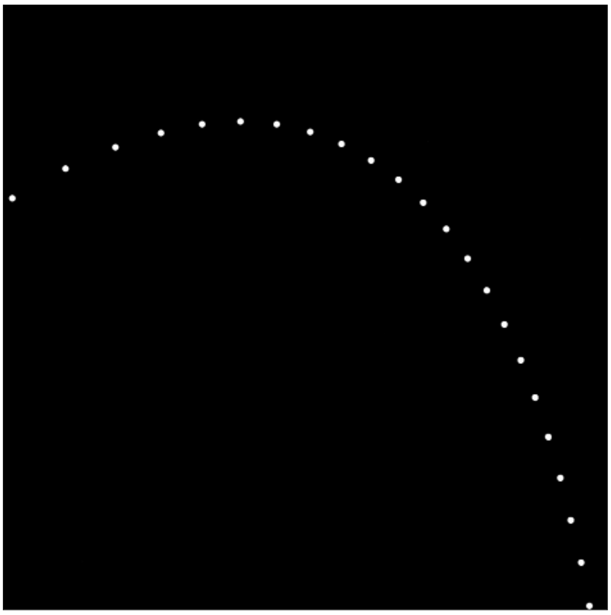
di Giuliana Bettini
Istituti "Aldini Valeriani", Bologna
e Barbara Pecori
Dipartimento di Fisica, Università di Bologna

Introduzione

Il software Cabri II, grazie alla sua dinamicità e alle opzioni offerte dalla nuova versione (vettori, trasporto di misura), permette di realizzare l'analisi di una foto del moto di una pallina in aria, realizzata con il metodo multiflash.
L'analisi del moto è solitamente realizzata "a mano", con carta e matita, e i risultati ottenuti, pur interessanti da un punto di vista qualitativo, non permettono un'analisi dettagliata delle caratteristiche della forza di attrito dovuta alla presenza dell'aria. L'esame della fotografia consiste, infatti, nel tracciare i vettori che rappresentano lo spostamento, la velocità e l'accelerazione della pallina in volo: queste operazioni introducono successive approssimazioni che consentono di analizzare solo gli aspetti qualitativi delle forze agenti su di essa e rendono improponibile un'analisi quantitativa dei dati sperimentali raccolti.
Con l'aiuto di Cabri II, dell'opzione *vettore* in particolare, è possibile fare anche un'analisi quantitativa della relazione esistente fra accelerazione e velocità e controllare la validità di un modello introdotto per schematizzare la dipendenza della forza di attrito dalla velocità.
La fase iniziale di raccolta dei dati (assegnazione di coordinate ai punti che rappresentano le immagini scattate ad intervalli di tempo regolari) rimane invariata. Al foglio di carta millimetrata, poi, si sostituisce il foglio del software Cabri II sul quale sarà realizzato l'esame qualitativo e quantitativo. Le posizioni della pallina rilevate appaiono inserite in un piano cartesiano a cui si assegna un'unità di misura. In questo caso è il software che si incarica di disegnare i vettori e di operare con essi, gli studenti si potranno dedicare alle osservazioni qualitative, all'elaborazione dei dati e all'elaborazione di un modello che renda conto dei dati sperimentali anche avvalendosi dell'aiuto di un foglio elettronico.
In tabella 1 è riportato un possibile percorso didattico, diviso in cinque fasi, al quale faremo riferimento nell'ambito di questo contributo. In particolare concentreremo l'attenzione sulle fasi 3, 4, 5 e daremo solo una breve descrizione della fase introduttiva (fase 1).

Analisi vettoriale del moto di una pallina in aria (fase 1)

Agli studenti è fornita una fotografia del moto di una pallina realizzata col metodo multiflash[1]; seguendo le indicazioni di una scheda, essi devono analizzare di che tipo di moto si tratta e quali sono le forze agenti sulla pallina.



fotografia del moto di un proiettile eseguita con il metodo multiflash, scala 1:10

Scheda
Forze agenti su una pallina in volo

La figura mostra la fotografia del moto di una pallina eseguita col metodo multiflash. La pallina è stata lanciata in aria sotto un angolo di 27° rispetto alla direzione orizzontale. L'intervallo di tempo fra due successive esposizioni era di 1/30 di secondo e la pallina si muoveva da sinistra a destra nella figura.

[1] Fotografia e successiva scheda tratte da *Fisica a cura del PSSC-Guida al laboratorio* edizione Zanichelli

Esaminate la fotografia (potete aiutarvi usando un foglio di carta millimetrata e un foglio di carta trasparente) e rispondete alle seguenti domande giustificando le vostre risposte.

1) La componente orizzontale della velocità della pallina è costante? Che cosa potete concludere sulla forza risultante che agisce sulla pallina?
Prendete in considerazione un punto ogni 2 per analizzare il moto in intervalli di tempo di 1/15 di secondo, questa scelta non pregiudica i risultati dell'esperienza; limitate, inoltre, lo studio della fotografia ai primi quattro punti.[2] Fissate un foglio di carta trasparente sulla fotografia, segnate il centro di ogni immagine e congiungete ordinatamente tra loro un punto ogni due con tratti rettilinei. I segmenti rappresentano lo spostamento della pallina ogni quindicesimo di secondo e perciò forniscono una misura della velocità media durante questi intervalli di tempo uguali fra loro.
2) La variazione di velocità (e quindi l'accelerazione) della pallina ha la stessa direzione in ogni intervallo considerato? I moduli di tali variazioni sono uguali fra loro? Quale sarà la direzione della risultante delle forze agenti sulla pallina?
3) La forza di gravità produce, ogni quindicesimo di secondo, una variazione nella velocità. Quale? In che direzione e in che verso?
Riportate il vettore variazione di velocità dovuto a *g*, in scala, sulla fotografia e sottraetelo a ciascun vettore variazione di velocità totale, ottenendo così un vettore che rappresenta la variazione residua di velocità.
4) I vettori variazione residua di velocità hanno tutti lo stesso modulo? Quale direzione e quale verso hanno? Quali ipotesi potete fare sulla natura delle forze agenti sulla pallina?
seguire tabella 1 a Pag. 9

Analisi vettoriale della foto stroboscopica con Cabri II (fase 3)

Rilevazione dei dati
Sovrapponiamo la fotografia alla carta millimetrata, avendo cura di far coincidere il lato sinistro della fotografia con una delle rette verticali e il primo punto a sinistra con un punto di intersezione delle rette della carta millimetrata. Con l'aiuto di uno spillo facciamo un foro in corrispondenza del centro di ogni immagine. Il primo punto a sinistra (*P_0*) sarà l'origine del sistema di assi attraverso il quale studieremo la fotografia.

Tracciamo gli assi cartesiani ortogonali aventi origine in O (0,0) e ricaviamo le coordinate degli altri "fori".
Prendiamo in considerazione un punto ogni 2 per analizzare intervalli di tempo di 1/15 di secondo.
I dati ottenuti sono riportati in tabella 2.

Tab. 2 - Coordinate delle posizioni successive della pallina ogni 1/15 s.[3]

	x(cm)	y(cm)
P_0	0,00	0,00
P_1	2,45	1,15
P_2	4,45	1,70
P_3	6,20	1,65
P_4	7,70	1,20
P_5	8,95	0,40
P_6	10,10	-0,75
P_7	11,05	-2,15
P_8	11,80	-3,80
P_9	12,45	-5,55
P_{10}	12,90	-7,45
P_{11}	13,30	-9,45

Riportiamo ora i dati ottenuti sul foglio del software Cabri II e procediamo all'analisi vettoriale.

Riproduzione della fotografia con Cabri II
Per realizzare correttamente il file in Cabri II è necessario usare alcuni accorgimenti sfruttando il dinamismo del software. Occorre, infatti, riportare sul foglio Cabri le coordinate dei punti che sono state rilevate dalla fotografia (con la precisione stimata) e costruire un sistema di assi cartesiani ortogonali avente una unità che ci permetta di sfruttare l'opzione *distanza e lunghezza* di Cabri per misurare i moduli dei vettori rappresentati.

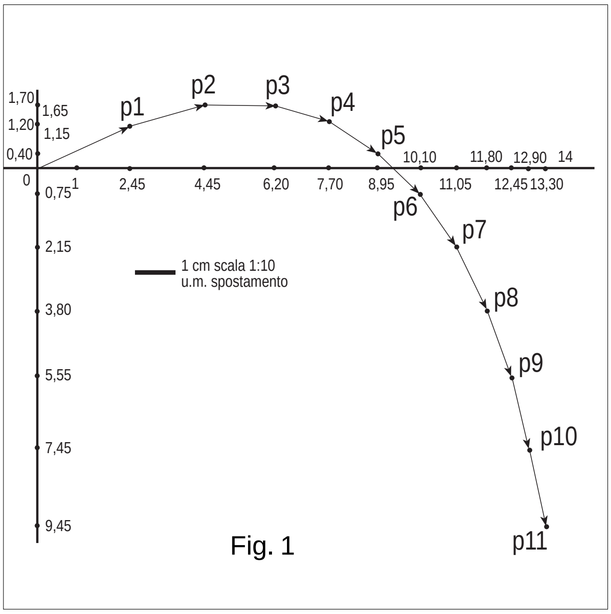


Fig. 1

[2] *In un primo tempo si era considerato un punto ogni tre, intervalli di 1/10 di secondo, come suggerito dagli autori; questa scelta, da un lato facilita i calcoli, dall'altro può creare confusione fra la semplice conversione in scala e il calcolo dei moduli dei vettori velocità e accelerazione.*

[3] *L'incertezza di ±0,05 cm ci è parsa adeguata dato il metodo di registrazione dei dati.*

Tab. 1 - Fasi del percorso didattico sull'analisi del moto della pallina in volo

1) Raccolta dei dati da parte degli studenti	*Gli studenti lavorano autonomamente sulla base della scheda proposta.*	
	Materiali	**Scheda: Forze agenti su una pallina in volo** **Foto stroboscopica**
	Obiettivi	Gli studenti prendono coscienza della situazione problematica e familiarizzano con le caratteristiche dell'analisi dei dati sperimentali.
	Ruolo dell'insegnante	L'insegnante può osservare l'attività didattica e il modo di affrontarla dello studente.
	Vantaggi	Gli studenti possono confrontarsi fra loro liberamente esprimendo una valutazione personale della soluzione. Il problema proposto è preso in carico da ciascuno.
2) Intervento dell'insegnante	*Intervento dell'insegnante per rivedere le osservazioni e dare nuove chiavi di lettura*	
	Obiettivi	Risistemazione delle idee nate nella fase (1) e avvio di una nuova fase di ristrutturazione.
	Ruolo dell'insegnante	L'insegnante trae utili informazioni sulle metodologie degli alunni e sulle loro idee spontanee.
	Vantaggi	Si sfruttano le potenzialità di un lavoro di gruppo, si costruiscono nuove conoscenze a partire da idee esistenti e si prepara il terreno per l'analisi successiva.
3) Utilizzo del software Cabri II per completare l'analisi	*Si utilizza il file che riproduce le posizioni della pallina fotografata, che può essere preparato dall'insegnante, per approfondire le osservazioni fatte fino a questo punto.*	
	Materiali	file: foto stroboscopica analisi vettoriale di una foto stroboscopica con Cabri II
	Obiettivi	Rilettura dei risultati ottenuti dall'analisi della fotografia nelle fasi (1) e (2) e discussione in classe alla luce dell'analisi di tutti i dati sperimentali.
	Vantaggi	Il software permette di concentrarsi sull'analisi dei dati senza perdere tempo sulla riproduzione di vettori. Anche i meno abili con il disegno potranno svolgere l'attività senza difficoltà.
4) Utilizzo del software Cabri II per controllare la validità di un modello	*La seconda parte dell'esperimento prevede un'analisi della dipendenza della forza individuata dalla velocità. A partire dai dati iniziali, sempre utilizzando Cabri, si ricostruisce la traiettoria del moto sulla base di una ipotesi di dipendenza della forza di attrito dal quadrato della velocità.* *Dal confronto della traiettoria ottenuta con quella reale si procede ad un aggiustamento del modello affinché renda effettivamente conto dei dati sperimentali.*	
5) Conclusioni	*Alla luce dei dati raccolti si ridiscute il problema che l'insegnante inquadrerà all'interno della teoria generale. Occorre tenere conto ed evidenziare in questa fase anche i limiti delle conclusioni raggiunte.*	

In figura 1 sono riportate le posizioni successive della pallina (O, P_1, …., P_{11}) sul piano cartesiano e i vettori spostamento. Le misure delle distanza sono in scala 1:10 rispetto alla realtà, come nella fotografia.
Gli studenti devono rispondere a domande analoghe a quelle riportate sulla scheda della fase di elaborazione manuale dei dati. In questo caso però è richiesto di effettuare sul foglio Cabri II l'analisi di tutti i punti sperimentali. Inoltre si è scelto di parlare direttamente di vettori accelerazione, oltre che di variazioni di velocità; pensiamo infatti che un vantaggio dell'elaborazione con Cabri sia quello di rendere più immediato il collegamento accelerazione misurata-forza agente.

Elaborazione dei dati (analisi qualitativa)

Gli studenti rispondono alle domande cercando conferma di quanto ottenuto con la elaborazione manuale.

1) La componente orizzontale della velocità della pallina è costante?

In figura 2 sono rappresentati i vettori velocità, a meno di un fattore di scala. Ciascun vettore velocità è scomposto nelle due componenti verticale e orizzontale.
Le indicazioni per la costruzione dei vettori (per questa figura e per le successive) possono essere richieste alla redazione del bollettino.

La componente orizzontale della velocità non è costante. Le differenze fra i vettori spostamento hanno componenti orizzontali evidentemente variabili.
Le velocità $\mathbf{v}_i$ *sono applicate nel punto medio fra* P_{i+1} *e* P_i *, che è una buona approssimazione del punto della traiettoria in cui la pallina ha velocità uguale alla velocità media calcolata.*

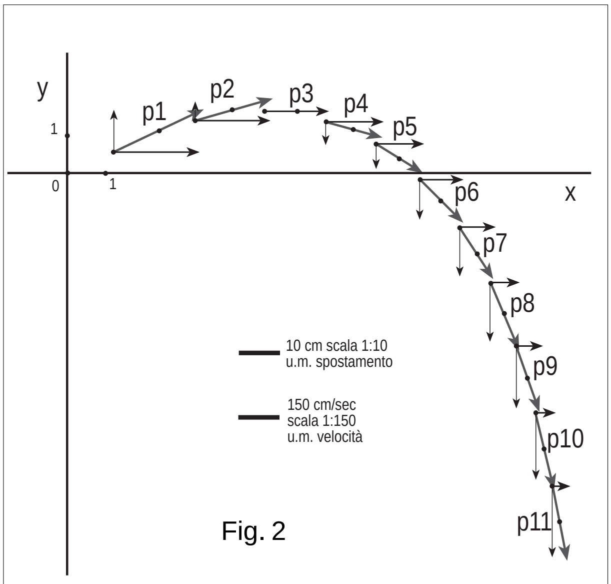


Fig. 2

2) La variazione di velocità (e quindi l'accelerazione) ha la stessa direzione in ogni intervallo? I moduli di tali vettori sono uguali fra loro? Quale sarà la direzione della risultante delle forze agenti sulla pallina?
In figura 3 sono rappresentati i vettori variazione di velocità (e quindi anche, a meno di un fattore di scala, i vettori accelerazione) che danno informazioni sulla direzione e sul verso della forza totale applicata alla pallina.
Dalla analisi del grafico risulta chiaramente che i moduli delle accelerazioni non sono uguali fra loro, ciò significa che la pallina non è sottoposta a una forza costante, ma ad una forza variabile che risulta dalla composizione della forza di gravità (Fg), diretta verticalmente, e della resistenza del mezzo (Fr). La (Fr) dipende dalla velocità: lo studio della dipendenza della resistenza del mezzo dalla velocità sarà l'oggetto della sezione successiva <u>Elaborazione dei dati (analisi quantitativa)</u>.

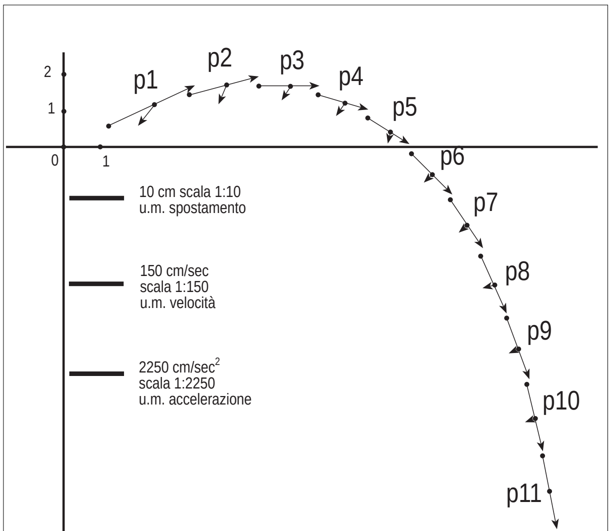


Fig.3

3) La forza di gravità produce, ogni quindicesimo di secondo, una variazione nella velocità. Quale? In che direzione e in che verso?

Riportando il vettore variazione di velocità dovuto a g, in scala, sul foglio, si ottiene la costruzione di figura 4.

4) I vettori variazione residua di velocità hanno tutti lo stesso modulo? Quale direzione e quale verso hanno?

L'utilizzo di Cabri II appare particolarmente utile in questa fase: infatti la precisione ottenuta nella costruzione dei vettori variazione residua di velocità, più difficile da ottenere normalmente, consente di notare come la accelerazione dovuta alla resistenza dell'aria abbia, con buona approssimazione, la stessa direzione della velocità in ogni punto e verso opposto.

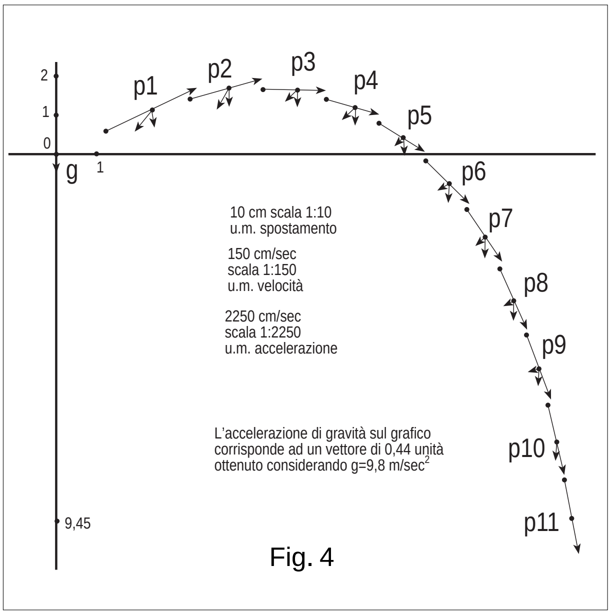


Fig. 4

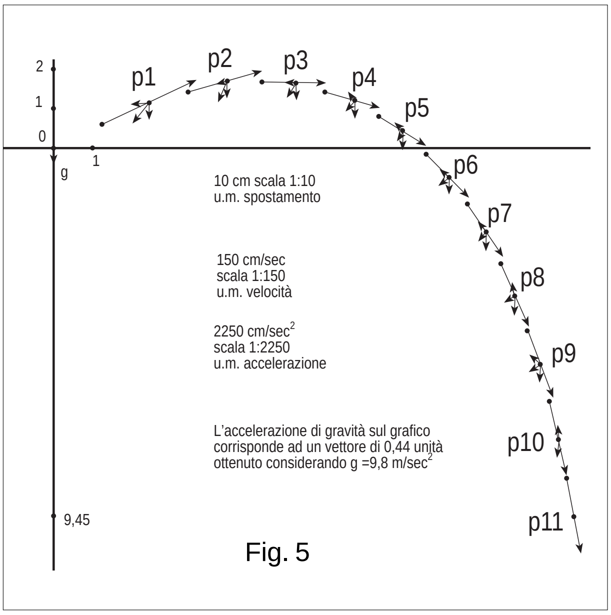


Fig. 5

Elaborazione dei dati (analisi quantitativa)

Gli studenti devono ora rilevare la misura dei vettori sul foglio di Cabri II. In tabella 3 sono riportati i valori ottenuti

Tab. 3 – Tabella dei valori dei moduli dei vettori spostamento, velocità, accelerazione totale e residua

Spostamento Si=Pi-Pi-1 (m)	**Velocità Vi=Si/Dt (m/sec)**	**Accelerazione totale Ai=Dvi/Dt (m/sec^2)**	**Accelerazione residua Ar (m/sec^2)**
0,271	4,065		
		16,875	10,800
0,207	3,105		
		14,625	6,750
0,175	2,625		
		10,575	5,625
0,157	2,355		
		9,675	5,850
0,148	2,220		
		8,100	2,925
0,163	2,445		
		7,200	6,075
0,169	2,535		
		7,200	6,075
0,181	2,715		
		3,150	7,875
0,187	2,805		
		5,625	7,875
0,195	2,925		
		2,475	7,650
0,204	3,060		

I valori possono essere tabulati con lo strumento Tabella di Cabri II ed eventualmente esportati, su foglio elettronico, per essere elaborati.

Elaborazione di un modello che renda conto dei dati sperimentali (fase 4)

Una pallina in volo nell'aria è soggetta a due forze: la forza di gravità (Fg) costante, e la resistenza dell'aria (Fr) che dipende invece in ogni punto dalla velocità. La forza Fr è diretta come la velocità ed ha verso opposto.

Si può assumere che la dipendenza di Fr dalla velocità non sia lineare. In letteratura, infatti, la forza di resistenza del mezzo agente su una sfera in aria mostra due termini importanti; uno lineare e uno quadratico: $Fr= RC_1V+ R^2C_2V^2$, con $C_1=3.1\ 10^{-4}$ Kg/(ms), $C_2=0.87$Kg/m^3 e R raggio della sfera.

Nel caso della pallina utilizzata (R= 0,75 cm) possiamo scrivere:

$Fr= K_1V+ K_2V^2$, con $K_1=2.33\ 10^{-6}$ Kg/s e $K_2=4.9\ 10^{-5}$ Kg/ m^{2}s .

Per le velocità coinvolte nel caso studiato, la tabella seguente mostra che è ragionevole, in prima approssimazione, considerare il solo termine quadratico: $Fr = K_2V^2$.

Tab. 4 – Confronto fra i termini lineare e quadratico

velocità (m/sec)	K_1v	K_2v^2
4,065	9,451E-06	8,087E-04
3,105	7,219E-06	4,718E-04
2,625	6,103E-06	3,372E-04
2,355	5,475E-06	2,714E-04
2,220	5,162E-06	2,412E-04
2,445	5,685E-06	2,925E-04
2,535	5,894E-06	3,145E-04
2,715	6,312E-06	3,607E-04
2,805	6,522E-06	3,850E-04
2,925	6,801E-06	4,187E-04
3,060	7,115E-06	4,582E-04

Calcolando il primo valore dell'accelerazione dovuta alla resistenza dell'aria Fr_1/m, dove $m=0,05/g$ è la massa della pallina, si può costruire con Cabri II la traiettoria simulata del moto.

Dati iniziali:
Massa pallina $m=5\ 10^{-5}$ Kg;
Raggio pallina $R=7.5\ 10^{-3}$ m;
Coordinate del punto P_1 (P_1(2,45; 1,15));
Valore della velocità iniziale $v_1=4.07$ m/s ricavata dal grafico Cabri.
Calcoliamo $ar_1=Fr_1/m = K_2v_1^2 /m$ (con $K_2=4.9\ 10^{-5}$ Kg/ m^{2}s) che sommato al vettore g ci dà l'accelerazione totale e ci permette di calcolare un nuovo valore di velocità con il quale ricavare il valore successivo di accelerazione.

La traiettoria ottenuta (vedi figura 6) differisce però da quella della fotografia e sembra indicare una sovrastima dell'attrito (cioè del coefficiente K_2).

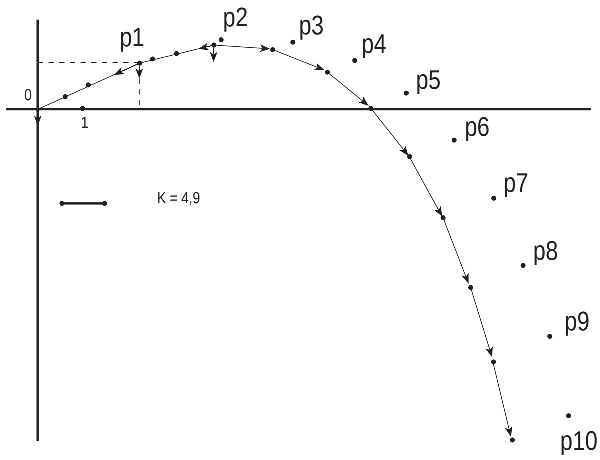


Fig. 6

Il valore di K_2 che abbiamo utilizzato non appare il migliore nel nostro caso: questa difficoltà può diventare un ottimo spunto didattico. La costruzione realizzata con Cabri II ci permette, infatti, di modificare il coefficiente K_2 e di far variare simultaneamente la traiettoria.

Agli studenti viene chiesto di ricavare il valore che meglio riproduce i dati sperimentali: il valore ottenuto con l'animazione sarà frutto della loro analisi e non semplicemente copiato da un testo.

In figura 7 è riportata la costruzione ottenuta e il valore ottimale di K_2.

A questo punto è possibile continuare l'elaborazione dei dati provando ad introdurre il termine lineare, oltre a quello quadratico, e aggiustare entrambi per ottenere un ulteriore miglioramento nell'adattamento della curva ai dati. E' opportuno, inoltre, informare gli studenti che la ricerca dei valori ottimali di K_1 e K_2 può essere effettuata attraverso un metodo analitico (Minimi quadrati) che permette di controllare la bontà dell'adattamento della curva ai dati sperimentali, senza procedere per tentativi valutati "ad occhio". Tale metodo risulta però certamente meno intuitivo e quindi meno efficace dal punto di vista didattico.

(vedi fig.7 alla pag. 13)

Come conclusione del lavoro, anche allo scopo di verificare la ricaduta sulla classe, può essere molto utile chiedere agli studenti di ricostruire, avvalendosi anche di Cabri II, la traiettoria della pallina in assenza d'attrito. Sul foglio di Cabri II, le due traiettorie possono essere rappresentate contemporaneamente e dal loro confronto può nascere una interessante discussione con gli alunni.

(vedi fig.8 alla pag. 13)

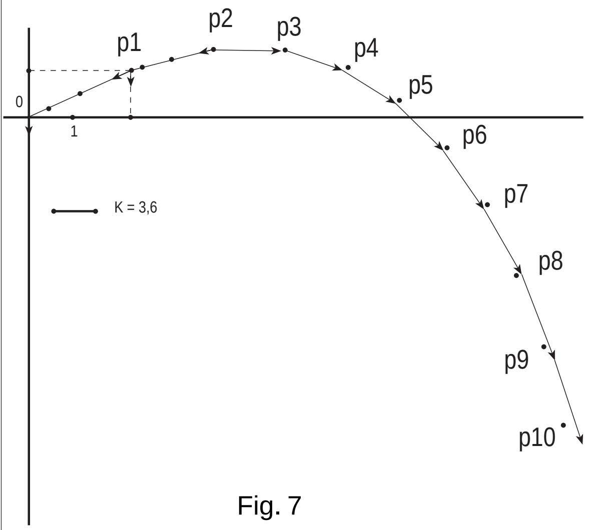


Fig. 7

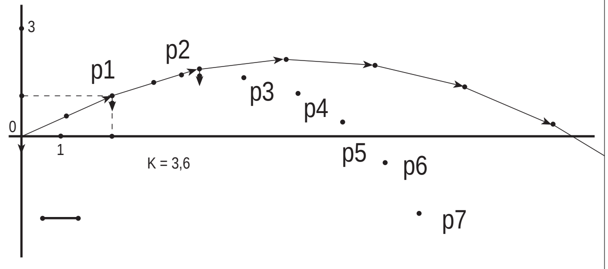


Fig. 8

Bellaria 2000

Problema n° 10

di Francesca Del Vecchio
Liceo Scientifico "E. Majorana", Latina
e Maurizio Testa
ITIS "G. Galilei", Latina

Premessa

Nel Settembre 2000 si è tenuto a Bellaria (RN) il terzo seminario residenziale del progetto "Eccellenza", organizzato dall'IRRE Emilia Romagna, in collaborazione con l'IRRE Lazio. Nel corso di esso gruppi di insegnanti hanno presentato e discusso soluzioni di vari problemi realizzate con diversi software. Il problema che segue è uno di quelli proposti ma non discussi, quindi non compare negli Atti del seminario, *Matematica e software didattici* curato da Aurelia Orlandoni.

Date due distinte rette parallele e un punto su ciascuna di esse, diciamo A e B, studiare il luogo individuato dal terzo vertice di uno dei due triangoli equilateri di lato il segmento AB, al variare di A oppure di B. Studiare inoltre la relazione esistente tra i quattro diversi luoghi che possono essere prodotti dai due terzi vertici del triangolo al variare dei punti A o B.

Come è possibile desumere dalla successiva traccia di risoluzione, il problema proposto è particolarmente idoneo ad un'attività didattica avente natura riepilogativa nell'ambito della trattazione della geometria piana. Sono infatti richieste conoscenze e competenze attinenti alle costruzioni geometriche classiche con riga e compasso, ad alcuni luoghi geometrici notevoli, alla teoria delle trasformazioni del piano e, per l'ultima parte del lavoro (non specificamente richiesta dal testo), ai punti notevoli di un triangolo.

Traccia della procedura di risoluzione

Il software utilizzato per la risoluzione è *CABRI II*.

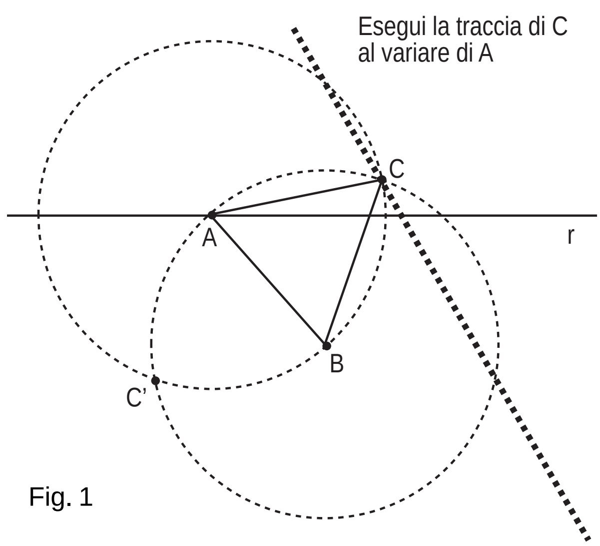


Fig. 1

In riferimento alla figura 1 costruiamo, nell'ordine:
(Per questa prima parte del problema, in realtà, è sufficiente disegnare una sola retta)

- Una retta *r* e un punto B esterno ad essa.
- Un punto A appartenente alla retta *r.*
- Il triangolo equilatero ABC mediante i seguenti comandi:

- circonferenza di centro A e raggio AB;

- circonferenza di centro B e raggio AB;
- punti di intersezione C e C' di tali circonferenze;
- triangolo di vertici A, B, C

(eventualmente poi possiamo nascondere le due circonferenze e il punto C').

• Eseguiamo la traccia di C al variare di A. Appare una retta incidente ad *r*.

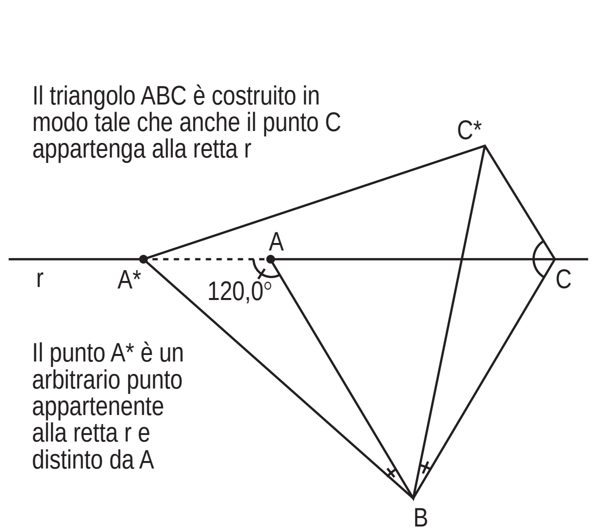


Fig. 2

In riferimento alla figura 2 (per la dimostrazione della natura del luogo geometrico):

• Fissiamo il punto A sulla retta *r* in modo che anche il punto C appartenga a tale retta (il segmento AB forma angoli di 60° e 120° con la retta *r*).

• Costruiamo un punto A* appartenente alla retta *r* e distinto da A (per fissare le idee, consideriamo il caso in cui A* si trovi da parte opposta di C rispetto ad A).

• Costruiamo il triangolo equilatero A*BC* in modo analogo a quanto già fatto in precedenza (nascondiamo le circonferenze).

I triangoli A*AB e C*CB sono isometrici perché:

AB = CB in quanto lati del triangolo equilatero ABC

A*B = C*B in quanto lati del triangolo equilatero A*BC*

L'angolo $A^*\hat{B}A$ è isometrico all'angolo $C^*\hat{B}C$ perché : $A^*\hat{B}A = A^*\hat{B}C - A\hat{B}C^* = 60° - A\hat{B}C^* = A\hat{B}C - A\hat{B}C^* = C^*\hat{B}C$.

In particolare, $A^*\hat{A}A = C^*\hat{C}B = 120°$, da cui segue che $C^*\hat{C}A = 120° - A\hat{C}B = 120° - 60° = 60°$. In virtù dell'arbitrarietà del punto A*, possiamo desumere che, al variare di quest'ultimo, il vertice C* del triangolo equilatero A*BC* descrive **la retta, delle due passanti per C e formanti con *r* un angolo di 60°, che non contiene il punto B.**

Con analoghi ragionamenti e lievi modifiche alla dimostrazione riportata è possibile pervenire alla medesima conclusione anche nel caso in cui A* appartenga al segmento AC, oppure nel caso in cui A* ed A siano da parti opposte rispetto a C.

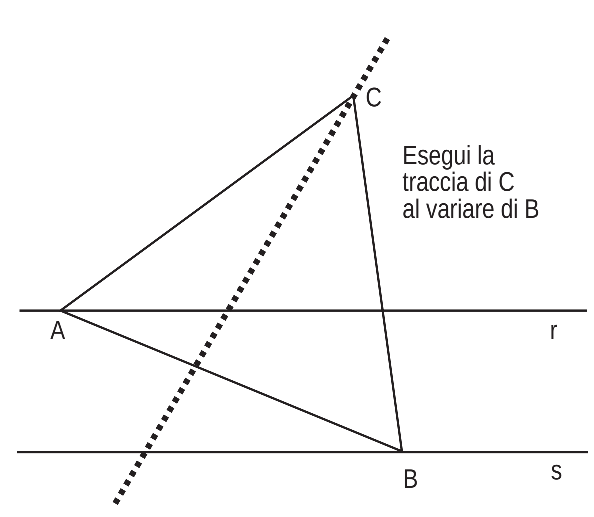


Fig. 3

In riferimento alla figura 3:

Ora ripetiamo la costruzione con le seguenti modifiche:

• Tracciamo due rette parallele *r* e *s*.

• Fissiamo un punto A alla retta *r* e un punto B alla retta *s*.

• Eseguiamo la traccia di C al variare di B su *s*: analogamente al caso precedente appare una retta che non passa per A e che forma un angolo di 60° gradi rispetto ad *s* (ed *r*). Per descriverla più precisamente, si consideri la posizione di B per cui il lato AC del triangolo appartiene alla retta *r*. Il luogo geometrico è in tal caso la **retta individuata dal lato BC** (se invece B è tale che BC appartiene la retta *s* il luogo cercato è la retta a cui appartiene il lato AB). Se avessimo disegnato solo la retta *s*, analogamente al caso precedente, diremmo che **delle due rette passanti per la particolare posizione così individuata per il punto C e formanti con r un angolo di 60°, il luogo è costituito da quella che non contiene il punto A.**

Si può dimostrare quanto affermato al punto 3, con un'argomentazione del tutto analoga a quella già utilizzata nella nota descrittiva della figura 2.

Osserviamo per inciso quanto segue: si fissi il segmento AB **inizialmente perpendicolare ad *r* e *s***; si tracci il luogo geometrico di C al variare di A; quindi **si riporti A in posizione iniziale** prima di tracciare il luogo geometrico di C al variare di B. I due luoghi così descritti da C si corrispondono in una simmetria assiale che ha per asse la retta parallela a *r* e *s* ed equidistante da esse. Se invece non si riporta A in posizione iniziale prima di tracciare il secondo luogo geometrico si otterranno altre configurazioni.

In riferimento alla figura 4:

Prendiamo ora in considerazione il secondo triangolo

equilatero di vertici A e B. Il terzo vertice C’, citato nella costruzione relativa alla figura 1, descriverà a sua volta due rette, la prima al variare del punto A e la seconda al variare di B. Tali rette, come nei casi precedenti, formano angoli di 60° con le rette *r* e *s* . La dimostrazione è analoga alla precedente.
Le quattro rette così ottenute si intersecano individuando un quadrilatero. Dal momento che esse formano, a coppie, angoli uguali con le rette parallele *r* e *s*, risulteranno, a coppie, parallele tra loro.
Dunque, il quadrilatero è un parallelogramma.

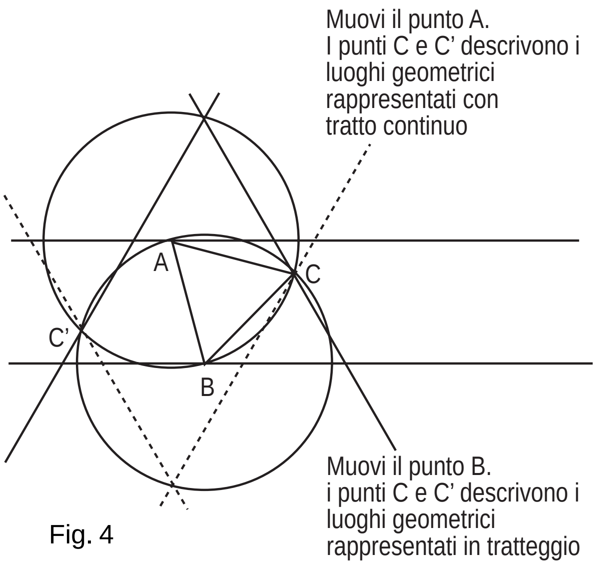
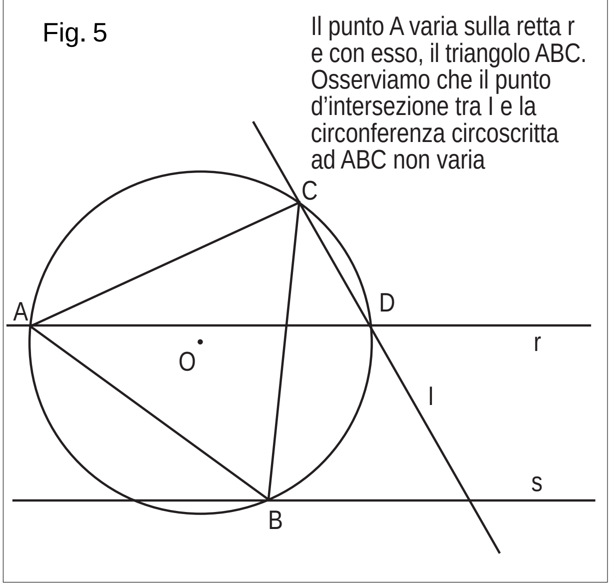


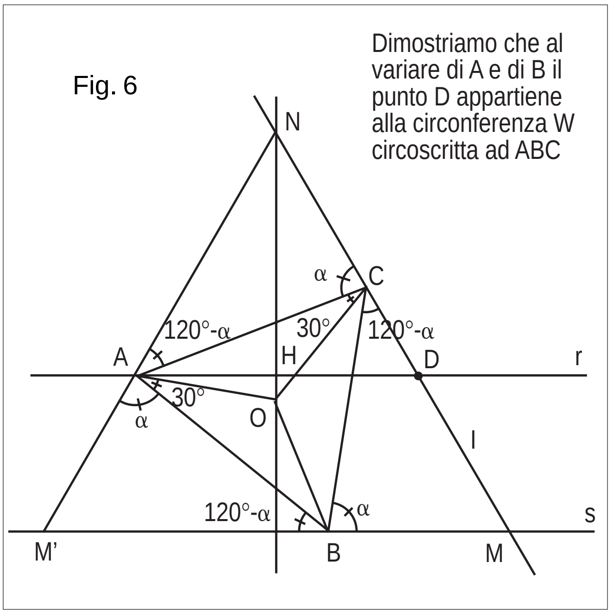
Fig. 4

In riferimento alla figura 5:
Ora continuiamo ad esplorare le proprietà di questa costruzione.
Utilizziamo una figura in cui costruiamo, oltre al triangolo ABC avente il vertice A in posizione generica, anche il luogo geometrico di C al variare di A, che indicheremo con *l* (non possiamo infatti utilizzare la *traccia* in quanto il *Cabri* non la identifica come elemento geometrico costruito e manipolabile). A tal fine, in riferimento ai triangoli ABC e A*BC* costruiti in precedenza per la dimostrazione (figura 2), è sufficiente tracciare la retta per C e C*. Evidenziamo quindi il punto di intersezione D di *r* e *l*.
Oppure, dato solo il triangolo ABC, procediamo nel seguente modo:
• Costruiamo un ulteriore un triangolo equilatero A’’BD fissando A’’ su *r* in modo tale che D coincida con il punto di intersezione di *r* con il primo luogo geometrico studiato, ovvero il lato AD appartenga ad *r*.
• Tracciamo il punto B’, simmetrico di B rispetto a *r*
• Tracciamo la retta passante per D e B’: è il luogo geometrico *l*. Infatti per la simmetrica assiale AD$\hat{B}$’ = 60°.
• Nascondiamo il triangolo A’’BD, le circonferenze usate per costruirlo, e i punti B’ e A’’.
• Ora costruiamo la circonferenza W circoscritta ad ABC (usando il comando *assi* e *circonferenza*).

• Osserviamo che al variare del punto A su *r* la circonferenza W passa sempre per il punto D.

Fig. 5


In riferimento alla figura 6 (per la dimostrazione di quanto affermato):
• Costruiamo il punto H, medio tra A e D, e la perpendicolare per H alle rette *r* e *s* . Essa interseca la retta *l* nel punto N.
• Costruiamo la retta simmetrica di *l* nella simmetria assiale avente per asse la retta HN. Essa interseca la retta *s* nel punto M’, simmetrico del punto M in cui *s* interseca *l*.

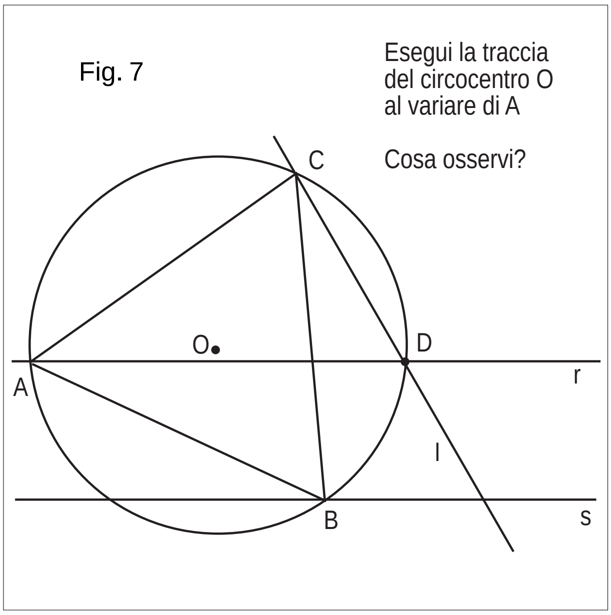
Fig. 6


Il triangolo MM’N è equilatero e il suo lato M’N contiene il punto A, simmetrico di D nella suddetta simmetria assiale. Pertanto il triangolo MM’N è circoscritto al triangolo ABC.
Come indicano le misure angolari riportate in figura, i triangoli BMC, ACN e AM’B risultano simili. Inoltre, essi hanno i lati opposti agli angoli di 60° ordinatamen-

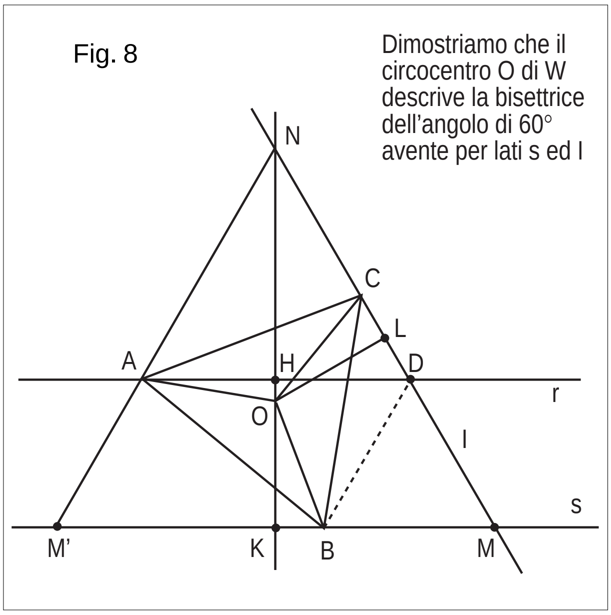
te uguali e quindi sono triangoli isometrici. In particolare, AM’ = BM = CN.
Sia O il circocentro di ABC. Dimostriamo che O è anche il circocentro di MM’N. Sarà sufficiente dimostrare che ON = OM = OM’. A tale scopo consideriamo i triangoli OCN e OAM’: essi sono uguali perché OC = OA essendo O circocentro di ABC, CN=AM’ e infine $N\hat{C}O = \alpha + 30° = O\hat{A}M'$. Pertanto, ON = OM’. Analogamente si dimostra che OM’ = OM. Da quest’ultima uguaglianza deriva che il punto O appartiene all’asse del segmento MM’, cioè alla retta NH. Pertanto la retta ON coincide con la retta NH ed è dunque perpendicolare alla retta MM’.

Ora abbiamo tutti gli elementi per dimostrare che D appartiene alla circonferenza W: i triangoli OHA e OHD sono uguali. Infatti sono triangoli rettangoli, hanno OH in comune e AH = HD in quanto A e D sono simmetrici rispetto a H.
Quindi OA = OD e perciò anche D appartiene alla circonferenza W, c.v.d.

In riferimento alla figura 7:
Eseguiamo la traccia del circocentro O al variare di A: sembra essere la bisettrice dell’angolo di 60° che ha per lati le rette *s* e *l*.



In riferimento alla figura 8 (per la dimostrazione di quanto osservato):
In base a quanto sopra dimostrato, al variare di A su *r* il segmento BD è comunque corda della circonferenza W circoscritta al triangolo ABC. Il suo asse passa per il centro O della circonferenza. Ma BD è anche lato del triangolo equilatero BDM (Nel quadrilatero ACDB inscritto nella circonferenza W si ha $C\hat{A}B = 60°$, dunque l’angolo opposto è $C\hat{D}B = 120°$. Ma $C\hat{D}A = 60°$ come dimostrato in precedenza, dunque per differenza risulta $A\hat{D}B = B\hat{D}M = D\hat{M}B = 60°$) e il suo asse è dunque anche bisettrice dell’angolo BMD. Pertanto il centro O della circonferenza circoscritta W (e dunque anche della circonferenza inscritta, essendo ABC equilatero) al variare di A appartiene alla bisettrice dell’angolo formato da *r* e da *l*.



Oppure (senza dimostrare che BDM è equilatero):
Siano K e L le proiezioni ortogonali di O rispettivamente su MM’ e su MN.
I triangoli OBK e OCL sono rettangoli e uguali perché OB = OC (O è circocentro di ABC) e $O\hat{C}L = 150°$ a = $O\hat{B}K$.
Quindi OK = OL e perciò O appartiene alla bisettrice dell’angolo , c.v.d.

Relazione sull’attivita’ svolta in classe

Il problema è stato utilizzato in una quarta liceo scientifico, nei primi giorni dell’anno scolastico e senza valutazione, nel quadro di un’attività in laboratorio della durata di sei ore, che favorisse un rientro graduale nei consueti ritmi di lavoro, e nell’ambito di un modulo sulla risoluzione di problemi. Gli studenti hanno lavorato in gruppi di tre, aggregandosi come preferivano. Già possedevano competenze medio/minime nell’utilizzo di *Cabri* avendolo usato nei precedenti anni scolastici, ma in modo saltuario. E’ stato chiesto loro di redigere contestualmente un verbale delle attività in cui registrare la sequenza dei comandi utilizzati e anche eventuali riflessioni, congetture, errori e correzioni.
Il lavoro è stato articolato nelle seguenti fasi:
Lavoro dei gruppi, inizialmente senza alcuna guida, solo sulla prima parte del problema (luogo di C al variare di A): effettuano invano alcuni tentativi di costruzione. Allora la docente interviene in ogni gruppo per evidenziare i “vizi” di ciascuna costruzione e fornire spunti utili ai fini della correzione *(vedi osservazioni)*. Ottenuta correttamente la figura viene chiesto di nascondere, oltre alle circonferenze e al triangolo ABC’, anche la retta *s*.

Si richiede loro di non visualizzare subito il luogo geometrico.
Breve momento di discussione collettiva per commentare quanto fatto e osservato per riflettere in particolare sui "gradi di libertà" dei vari elementi geometrici, al fine di chiarire meglio sia le relazioni fra essi, sia gli errori costruttivi commessi nei primi tentativi. Tale discussione, inizialmente non prevista, si rende necessaria in quanto a molti risulta difficile capire, ad esempio che, mentre la prima retta *r* può essere modificata sia trascinando il punto a cui è ancorata, sia modificando la direzione, la seconda retta *s* è "libera" parzialmente, ovvero può essere trascinata solo per il punto di "ancoraggio", ma non se ne può modificare la direzione se non in conseguenza a modifiche apportare alla direzione di *r*.
Procedendo dal primo elemento costruito fino all'ultimo, si richiede di esplicitare nel verbale quali movimenti ogni elemento geometrico può fare "liberamente" o "di conseguenza" a movimenti di altri parti della figura.
Visualizzazione del luogo geometrico con il comando *traccia*: gli studenti facilmente congetturano che dovrebbe essere una retta. Trovano invece più difficile descrivere nel verbale tale retta con maggiore precisione, così si discute collegialmente su quale potesse essere la descrizione più efficace. Comunque sembra a quasi tutti che il luogo formi un angolo di 60° con *r*.
Si "ridisegna" il luogo geometrico. Infatti in Cabri la *traccia* di un punto non ha una effettiva consistenza come ente geometrico manipolabile: non è neppure possibile misurare tale angolo! Ancora i ragazzi sono liberi di trovare una loro soluzione costruttiva, sempre con interventi personalizzati e discreti da parte della docente *(vedi osservazioni)*.
Trascinamento di A ed esplorazione della figura, per cercare posizioni di A che originano particolari triangoli o indizi utili ai fini di una dimostrazione, ecc. Molti studenti inseriscono misure lineari ed angolari, per indagare la presenza di elementi che si mantengono fra loro uguali o simili al variare del punto A, ecc.
Fase dimostrativa: la docente interviene in modo più esplicito, sia con interventi collettivi, sia correggendo e stimolando osservazioni nei singoli gruppi. In particolare si osserva insieme che, se più segmenti di diversa lunghezza hanno il primo estremo comune (D) e formano angoli uguali rispetto ad una prefissata semiretta (una delle due su *r* aventi D come origine), allora i secondi estremi di tali segmenti appartengono ad una medesima retta (l). Allora i ragazzi comprendono che, dati due triangoli ABC (prefissato, con C su *r*) e A*BC* (qualunque, al variare di A su *r*), è sufficiente mostrare che, il segmento CC* forma un angolo di 60° come detto sopra. Nei singoli gruppi di lavoro, dopo alcune loro inefficaci osservazioni, si fa osservare che, muovendo il triangolo A*BC*, nel vertice comune B gli angoli e si sovrappongono per un angolo variabile, lasciando "liberi" due "spicchi"...uguali. Con questa ulteriore informazione molti gruppi riescono a dimostrare la congettura sul luogo geometrico.
Seconda parte del problema: far riapparire la retta *s* e costruire gli altri tre luoghi. I ragazzi ritengono superfluo ripetere le argomentazioni su di essi, perché analoghe alla precedente. Osservare che si ottengono quattro rette a due a due parallele, che dunque individuano un parallelogramma, è la parte più facile.

Sull'uso del *Cabri* da parte degli studenti si osserva quanto segue.

Nella prima fase (costruzione della figura):
Nella maggior parte dei casi essi disegnano la seconda retta ***s*** *parallela ad* ***r*** *"ad occhio". Basta muovere* ***r*** *per verificare con loro se hanno imposto correttamente la condizione di parallelismo.*
In Cabri le due rette vengono disegnate con due click del mouse. Con il primo click viene fissato un primo punto: molti pensano di utilizzare questi punti come punti variabili A e B sulle rette. In realtà quando muovono A o B si accorgono che accade il contrario, ovvero sono le rette costruite su di essi a muoversi di conseguenza.
Ricordano che per disegnare i triangoli equilateri occorre disegnare due circonferenze e i loro punti di intersezione. Però, nel disegnare tali circonferenze, fissano correttamente il centro in un estremo del segmento AB, ma non ancorano la misura del raggio con un click sul secondo estremo: appena muovono A o B l'errore appare, perché i triangoli ABC e ABC' non si mantengono equilateri (i raggi non si modificano più, mentre dovrebbero mantenersi uguali al segmento AB).
Nella "ricostruzione" del luogo geometrico *l* ed esplorazioni successive:
Alcuni provano a disegnare una retta sovrapponendola "ad occhio" alla traccia: basta muovere la retta ***r*** *o* ***s*** *per evidenziare il loro errore. Oppure individuano il punto D "ad occhio" e non come "intersezione fra due oggetti".*
Qualcuno fissa prima A, in modo che il triangolo abbia anche il terzo vertice C sulla retta ***r*** *e poi traccia la retta* ***l*** *a C. Però la sovrappone ancora ad occhio alla traccia o addirittura ne fissa la direzione in modo che formi un angolo di 60° con il lato AC del triangolo: basta muovere A su r per evidenziare l'errore. Qui comunque si pongono due questioni importanti e delicate per le quali si rimanda alla nota aggiuntiva. (*)*
Altri scelgono di avere C sulla retta ***r*** *e poi costruiscono la parallela per C al lato AB: appena si muove A la costruzione rivela i suoi "vizi".*
Infine solo i migliori alunni ricordano che al luogo geometrico appartiene C comunque si fissi A su ***r****: disegnano dunque due triangoli equilateri ABC e A*BC* a partire da due differenti posizioni A e A* e poi tracciano la retta per C e C'.*

(*) Nota aggiuntiva:
I ragazzi sono ben felici di utilizzare la “misura” in Cabri, sia per visualizzare misure di angoli e di segmenti in fase esplorativa, sia per effettuare “riporto di” angoli o di segmenti in fase costruttiva. E’ stato concesso loro di visualizzare misure in fase esplorativa, perché ciò può favorire congetture, ma solo dopo aver fatto acquisire loro consapevolezza che a volte Cabri indica misure in modo approssimativo e può ingannare l’osservatore (non è stato difficile, anche in virtù della nota successiva). Non è stato consentito loro di usare il riporto di angoli e segmenti, perché si voleva che sfruttassero proprietà e relazioni fra elementi per effettuare le costruzioni in modo rigoroso.
Se si vuole che anche il punto C appartenga alla retta ***r****, è bene sottolineare la differenza fra “l’imporre” tale condizione (mediante opportuna costruzione) o l’accontentarsi semplicemente che questo “appaia all’occhio”. Per far acquisire consapevolezza di tale differenza si può utilizzare con i ragazzi il comando “appartiene a?” che mostrerà se il punto che sembra appartenere ad una retta vi appartiene realmente o no. Però con i ragazzi meno pronti può essere opportuno accontentarsi poi di una figura ottenuta “ad occhio”, per non appesantire troppo il lavoro. Anche perché tale figura viene utilizzata nella fase dimostrativa, in cui sono tenuti a motivare rigorosamente ogni affermazione: il sapere che lavorano con figure approssimative ed ingannevoli potrebbe essere per loro una buona motivazione a dimostrare. Peraltro, se C non è vincolato ad* ***r****, difficilmente l’angolo convesso fra* ***l*** *ed* ***r*** *risulterà in cabri con misura esattamente di 60°: questo convincerà ancor più gli studenti che “vedere in Cabri” può trarre in inganno e non equivale a “dimostrare”.*

In generale:
I ragazzi (soprattutto i meno bravi) si sono soffermati nel tracciare e osservare ripetutamente i luoghi geometrici, come incantati dalle tracce che si producevano. Sono stati forzati a passare alla fase di lavoro successiva.
Tutti i gruppi, molto motivati, si sono sentiti in gara fra loro e con il tempo: hanno cercato di elaborare risultati nel tempo più breve possibile, nascondendo i risultati agli altri gruppi.
Le fasi di costruzione e di esplorazione sono le più accattivanti. Un po’ meno le fasi dimostrative per i ragazzi più deboli, ai quali fino alla fine sfuggono alcuni passaggi del ragionamento. Il cabri è utile anche per individuare il percorso dimostrativo: visualizzare misure di angoli permette di individuarne coppie che si mantengono al variare di A. Tuttavia l’insegnante deve integrare suggerendo ai ragazzi quali elementi osservare e in quali circostanze.
Redigere un verbale dettagliato, in cui si chiedeva anche di annotare errori, riflessioni e ripensamenti, è stato per loro faticoso. Ma uno degli obiettivi del lavoro era anche curare le capacità descrittive. Talvolta i ragazzi non erano sicuri della chiarezza delle loro descrizioni. Allora sono stati invitati a far leggere i testi prodotti al gruppo “vicino di banco”: hanno trovato questo “test” molto utile.

Un lutto

Il 22 maggio scorso è mancato il prof. Candido Sitia, Presidente del *Centro Ricerche Didattiche “Ugo Morin”* e Direttore responsabile della rivista *L’Insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate.*
Lo vogliamo ricordare con particolare affetto e stima per le energie che ha sempre profuso per migliorare la didattica della matematica. Per diversi lustri è stata una presenza discreta, ma sicura per la crescita professionale di molti docenti. Per come lo abbiamo conosciuto, possiamo dire che una sua caratteristica peculiare era: “poche parole e molti fatti”. E questo in anni in cui la didattica generale e molte didattiche “particolari” sembravano procedere in senso inverso (“molte parole e pochi fatti”). Temiamo che il vuoto lasciato da questo maestro sarà difficilmente colmabile.

La Redazione del bollettino CABRI*RRSAE*

Da cabrinews

Cabri in biblioteca

a cura della Redazione

Alla lista di discussione *Cabrinews* è giunta una richiesta che riportiamo di seguito. Pensiamo che le risposte di due colleghi della lista possano interessare anche i docenti che non la seguono

29 Maggio 2002
Margherita Dini
Nei miei alunni di scuola media (specialmente in quelli di prima, ancora curiosi e indenni dalla demotivazione che pervade quelli di terza) ha suscitato vivo interesse il

libro *Il Mago dei numeri - Alla scoperta del paese incantato della matematica* di Hans Magnus Enzensberger.
Quali altri testi relativi alla matematica (ma anche alle scienze) mi consigliate di proporre?
…

07 Giugno 2002
Consolato Pellegrino

Prima che mi passi di mente riporto più sotto, alla rinfusa, alcuni titoli.
Ho contrassegnato con un asterisco quelli adatti agli allievi più piccoli.

- Casati R., *La scoperta dell'ombra. Da Platone a Galileo la storia di un enigma che ha affascinato le grandi menti dell'umanità*, Mondadori, Milano, 2000, pp. 278
* Cerasoli A., *I Magnifici dieci. L'avventura di un bambino nel mondo della matematica*, Sperling & Kupfer Ed., 2001, pp. 186 [Romanzo, adatto anche ad allievi di scuola elementare, tocca varie tappe dello sviluppo della matematica, vi si incontrano tanti personaggi importanti, compreso il "signor" p.]
- Cresci L., *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Muzzio Ed., Padova, 1998, pp. 194
- Cresci L., *I numeri celebri*, Muzzio Ed., Padova, 2000, pp. 224
- Dehaene S., *Il pallino dei numeri. Scoprire il genio dei numeri che è in noi*, Mondadori, Milano, 1997, ed. it 2000, pp. 292
- Doxiadis A., *Zio Petros e la congettura di Goldbach*, Bompiani, Milano, 1992, ed.it. 2000, pp. 144 [PREMIO "PEANO" 2001]
- D'Amore B., *Più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla. Incontri di Dante con la matematica*, Pitagora Ed., Bologna, 2000, pp. 166
- Dunham W., *Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, Bologna, 1990, ed.it. 1996, pp. 350
- Falletta N., *Il libro dei paradossi*, ed.it. 1994, Ed. Tea Due, Milano, 1983, pp. 244
- Gardner M., *Enigmi e giochi matematici*, BUR, 1959 e 1961, ed.it. 2001, pp. 370
- Guedj D., *Il teorema del Pappagallo*, Longanesi, Milano, 1998, ed.it. 2000, pp. 562
- Kaplan R., *Zero. Storia di una cifra*, Rizzoli, Milano, 1999, ed.it. 1999, pp. 330
- Peres E., *Febbre da gioco. Esistono sistemi sicuri per vincere?*, Avverbi Ed., Roma, pp. 168
* Tahan M. *L'uomo che sapeva contare. Le mille e una notte dei numeri*, Salani, Firenze, 1990, ed.it. 1996, pp. 190 [Romanzo, in formato tascabile, adatto anche ad allievi di scuola media. Già segnalato l'anno scorso. Ha avuto un alto indice di gradimento]
- Cohen G., *Pitagora si diverte*, Paravia, Torino, 1999 e 2000, ed.it. 2001, pp. 118 [Raccolta di problemi dei Giochi Internazinali di Matematica]
- Grugnetti L. e Jaquet F. (a cura di), *Il Rally matematico transalpino. Quali rapporti per la didattica?*, Pitagora Ed., Bologna, 1999, pp. 192 [Tratta di una Gara di Matemartica per allievi di Scuola Elementare e Media]
- Pappas T., *Le Gioie della Matematica*, Muzzio, Padova, 1986 (ed. 1995), pp. 240
- Beutelspacher A., *Matematica da tasca: dall'abaco allo zero*, Ponte alle Grazie, Milano, 2002, pp. 128

08 Giugno 2002
Federico Peiretti

Per i ragazzi delle medie, scorrendo i titoli della mia biblioteca, mi sentirei di raccomandare quelli che seguono. Sono divisi in due gruppi, il primo per tutti, il secondo per i più bravi o per il terzo anno.
Qualche libro ha cambiato editore, altri sono esauriti e quindi è da verificare la disponibilità in libreria.

Edwin A. Abbott, *Flatlandia, racconto fantastico a più dimensioni*, Adelphi, 1966
Lewis Carroll, *Alice*, Longanesi, 1971
Martin Gardner,
   Enigmi e giochi matematici, Vol. I-II-III-IV-V, Sansoni
   Carnevale matematico, Zanichelli, 1977
   Show di magia matematica, Zanichelli, 1980
   Circo matematico, Sansoni, 1981
   L'incredibile dottor Matrix, Zanichelli, 1982
   L'universo ambidestro, Zanichelli, 1984
   Enigmi da altri mondi, Sansoni, 1986
Sam Loyd, *Passatempi matematici*, Vol. I e II, Sansoni, 1980
Giuseppe Peano, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Sansoni, 1983
Riccardo Bersani e Ennio Peres, *Matematica, corso di sopravvivenza*, Ponte alle Grazie, 1998

Peter M. Higgins, *Divertirsi con la matematica*, Garzanti, 1999
Raymond Smullyan
   Donna o tigre? ... e altri indovinelli logici, Zanichelli, 1985
   Qual è il titolo di questo libro?, Zanichelli, 1981
   Fare il verso al pappagallo e altri rompicapi logici, Bompiani, 1990
   Satana, Cantor e l'infinito e altri inquietanti rompicapi, Bompiani, 1994
Hugo Steinhaus, *Cento problemi di matematica elementare*, Boringhieri, 1983
Colin Bruce, *Sherlock Holmes e le trappole della logica*, Cortina, 2001

LA RECENSIONE DEL MESE

Notizie dalla rete

di **Daniele Tasso**

Il primo Congresso latinoamericano dedicato a CABRI-géomètre, si svolgerà a Santiago del Cile, nei giorni 24, 25 e 26 di Luglio 2002; organizzato dalla Università Metropolitana di Scienze dell'Educazione e dalla Università Nazionale Andrés Bello, con la partecipazione della Texas Instruments. Oltre alle relazioni in IBEROCABRI sarà dato spazio a dimostrazioni concrete, con l'uso dei computer, di alcune applicazioni didattiche di Geometria dinamica. Presidente del comitato scientifico, che ha organizzato il congresso, è Jean-Marie Laborde.

(vbarile@abello.unab.cl)

Il primo congresso internazionale dedicato alla geometria dinamica con CABRI-géomètre si è svolto a San Paolo in Brasile, nell'ottobre del 1999

(www-cabri.imag.fr/nouvelles/CabriWorld-e.htm)

Il secondo congresso mondiale si è invece svolto a Montreal in Canada, nell'anno 2001

(www.CabriWorld.net)

L'ultima indagine sul livello di capacità linguistiche, scientifiche e matematiche, condotta dalla Organizzazione per la Cooperazione Economica e lo Sviluppo (OECD), su un campione di studenti al termine della scuola dell'obbligo, in 32 dei paesi membri, ha dato questi risultati:

I primi 5 classificati nelle capacità linguistiche sono stati: Finlandia, Canada, Nuova Zelanda, Australia e Irlanda.

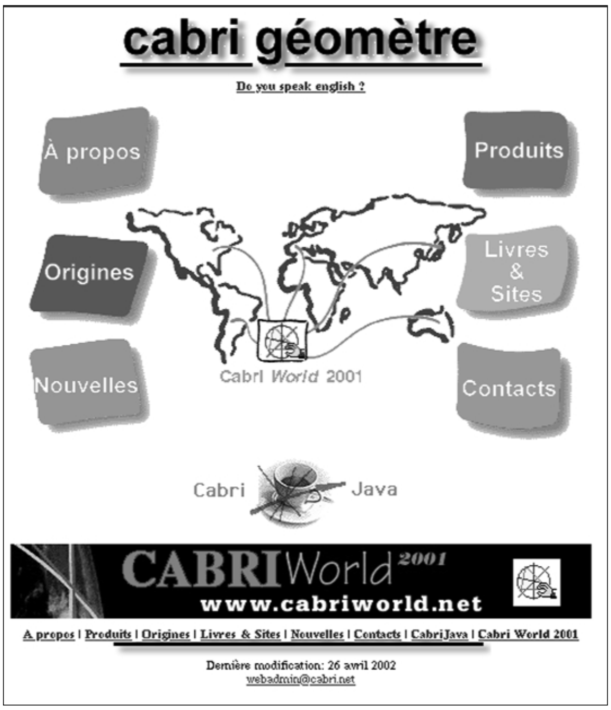
I primi 5 paesi nelle capacità scientifiche: Corea, Giappone, Finlandia, Regno Unito, Canada.

I primi 5 nelle capacità matematiche: Giappone, Corea, Nuova Zelanda, Finlandia, Australia.

L'Italia è stata giudicata inferiore alla media in tutte e tre le aree.

www.oecd.org

Nel Paese di Cuccagna la Volpe e il Gatto propongono un affare a Pinocchio: se lui versa uno zecchino alla loro Banca, loro ogni anno gli daranno 10 zecchini di interesse. Pinocchio si lascerà convincere o farà un affare migliore investendo in BOT, che nel Paese di Cuccagna rendono il 20 per cento? Per decidere il povero burattino dovrebbe intendersene di interessi composti e crescite esponenziali…e di algoritmi. Questo avvio narrativo – riportato da P.Bianucci su La Stampa - è preso dal primo capitolo di "Algoritmi, divinità e gente comune"



www.edizioniets.com

La matematica può essere "bella e appassionante" secondo gli attori di "Bubbles …il sogno di Alice": uno spettacolo teatrale, rappresentato il 18 giugno nella città toscana in collaborazione con "Il Giardino di Archimede *Un museo per la Matematica*" e del dipartimento di Matematica dell'Università di Firenze. Secondo il "Théatre Diagonale" dell'Università di Lille in Francia – produttore dello spettacolo - "Ognuno di noi ha giocato con le bolle di sapone e …"

www.dm.unifi.it www.dm.unito.it

Com'era insegnata la matematica due secoli fa? Chiedetelo Giacomo Leopardi.

www.guide.supereva.it/matematica_risorse_in_rete/interventi/2001/06/48441.shtml

Oggi i siti "ufficiali" di Cabri-géomètre sono 48. Si veda in proposito il sito :

www-cabri.imag.fr

Secondo I.Walker, professore all'Università di Warwick, in Inghilterra, un uomo inglese spende 8 euro per ordinare una cena, mentre il valore complessivo del tempo impiegato per cucinarsela da sé e degli ingredienti sarebbe di 27 euro.

Secondo Walker ogni minuto di vita di un uomo britannico vale 16 cent di euro, quello di una donna circa 14.

La formula è: $V=(W((100-t)/100))/C$.

Dove V è il valore di un'ora, W è il salario orario di una persona, t si riferisce al livello delle tasse e C al costo della vita.

Provare per credere…quanto si risparmia leggendo queste notizie, anziché cercarsele da soli?