以下のテキストを熟読し，課題１ ～課題３について解答すること．

誤差論

系統誤差（確度）と偶然誤差（精度）

物理学の理論を実験で確かめたり、物理法則の中に現われる定数を実験で決定するには、なんらかの測定をしなければならない。電圧計を使っての電圧の測定、ストップウォッチを使っての経過時間の測定、ノギスを使っての長さの測定等々を行ない、これらを組み合わせて一連の解析をし、理論の検証、物理定数の決定に至る。しかし、測定によって知ることができるのは「真の値」ではなく、真の値に最も近いと推定される値（最確値）である。

測定値から真の値を引いたものを絶対誤差、または単に誤差という。また、絶対誤差を真の値で割ったものを相対誤差という。我々は、真の値を知ることができないので、誤差を厳密な意味で使うことができない。測定値から最確値を引いた値は残差と呼び、厳密には誤差と区別される。(但し、日常は、残差のことを誤差と呼んでいる。)

誤差 ＝ 測定値－真の値

残差 ＝ 測定値－最確値

絶対誤差＝測定値－真の値（または最確値）

相対誤差＝｜絶対誤差／真の値（または最確値）｜

実験誤差には系統誤差と偶然誤差の二種類がある（図 1)。系統誤差は真の値からの偏りを与える誤差で、発生する原因は次の３種類である。

1. 理論誤差：理論を導く際の仮定に原因する誤差。たとえば、測定結果には摩擦の影響が現われているのに、それを解析するモデルに摩擦が含まれていない場合。
2. 機械誤差：測定機械の校正がくるっていたり、調整が十分なされていないときに生ずる。たとえば氷水の温度を 2 °C 、沸騰している水の温度を 102 °C と示す温度計。
3. 個人誤差：目盛を多めにまたは少なめに読んでしまう癖など。実験をする人はこれらの系統誤差が生じないように十分注意する必要がある。また、不可避の場合はその値を補正しても良い。

偶然誤差 はその大きさ、符号がまったく不規則で、前後の測定の間にも相関がなく、互いに独立に現われる。従って、測定値にばらつきを与える。偶然誤差の原因は、いつでも解明できるというものではないが、環境に起因する誤差、例えば、室温の時間的変動、電源電圧の揺らぎ、装置に伝わる機械的振動などが考えられる。偶然誤差は統計的な性質を持っていて、正規分布（ガウス分布）に従うと近似できる。

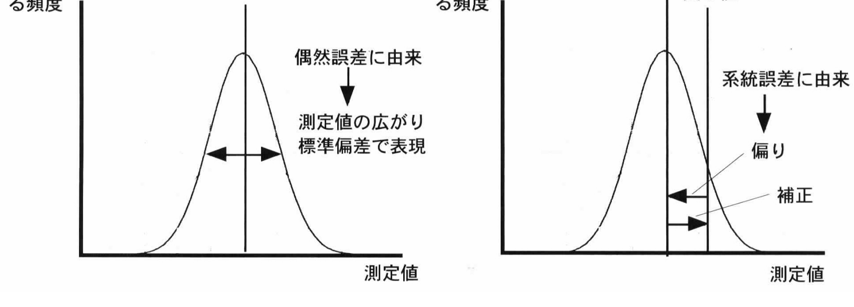

図 1：測定関連用語の関係．偶然誤差（左図）と系統誤差（右図）

偶然誤差の扱い

測定値から系統誤差をすべて除くことができ、$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots, x_N$ という測定値は、偶然誤差しか含まないとする。偶然誤差は、符号については正の確率と負の確率が等しく、その大きさ（絶対値）については小さいものの方が大きいものより頻繁に現われる。この考え方から出発して、偶然誤差について以下の理論が得られる。ここでは、最低限の知識を要約してみる。$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_N$ は、次のような分布関数 $f(x)$ で表わされる母集団から任意に抽出された標本値であるとみなす。

$$f(x) = \frac{\exp[-(x-X)^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \qquad (1)$$

X は真の値、x は測定値、$f(x)$ は測定値 x を得る確率に対応し、 Gauss の誤差関数、または正規分布関数と呼ばれる。式中の σ は標準偏差と呼ばれ、関数の広がりを規定する。この式の意味は、

(i) 誤差の小さい x が現われる確率が高く、$x = X$ で $f(x)$ は最大になる

(ii) 真の値 X（数学的には母集団平均といい μ で表わすことが多い）に関して $f(x)$ は対称になる

(iii) 誤差の大きい x が現われる確率は小さい、すなわち $|\ x - X\ |$ の増大にともない $f(x)$ は急激に減少し $f(x \to \pm\infty) = 0$ になる

(iv) 規格条件 ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$) を満たす。

測定値 x を得る確率が、(1) 式の分布に従うとき、

測定される量 x の真の値 X が $< x > -\sigma$ から $< x > +\sigma$ までの範囲に入る確率は 0.683

測定される量 x の真の値 X が $< x > -2\sigma$ から $< x > +2\sigma$ までの範囲に入る確率は 0.955

測定される量 x の真の値 X が $< x > -3\sigma$ から $< x > +3\sigma$ までの範囲に入る確率は 0.997

である。(「信頼係数 68% の X の信頼区間は $< x > -\sigma$ から $< x > +\sigma$ の間である」と言う。)

［課題 1］ (1) 式が、上述の (i) から (iv) の条件を満たしていることを、確認せよ。

* (iv) の証明は，微分積分 I, II の講義の教科書 162 ページのガウス積分を参照すること。

［課題 2］ Gauss の誤差関数の振る舞いを少しみていく。$\varepsilon = x - X$ とおけば、

$$f(\varepsilon) = \frac{\exp[-\varepsilon^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$f(0) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$f(\sigma) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{f(\sigma)}{f(0)} = \frac{f(X+\sigma)}{f(X)} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\sigma_a = 1.0$ と $\sigma_b = 0.5$ であるなら、

$$f_a(0) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$f_b(0) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$f_a(\varepsilon)$ 、$f_b(\varepsilon)$ の概略を 1 枚のグラフ用紙に 重ね書きせよ。(横軸の範囲は $-3 \leq \varepsilon \leq 3$ とすること．)

（注）$\sigma_a > \sigma_b$ 、従って、$f_b(\varepsilon)$ は $f_a(\varepsilon)$ に比べ広がりが小さい、すなわち、精度がよい測定に対応する。

測定値から σ を見積もるには、次式が用いられる。n 回測定した中の i 番目の測定値を x_i 、その平均値 を $<x>$ としたとき、

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2} \qquad (2)$$

この式で、平方根内の分母が、n ではなく、$n-1$ であることに注意してほしい。我々は真の値 X を知らないので、その代わりに最確値である $<x>$ を用いていることに由来している。また、平均値 $<x>$ の誤差または不確実さは平均値の標準偏差　σ_m で表わし、次式で求められる.

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3)$$

標準偏差は常に正の量であり、測定値と同じ単位であることは、(2) 式より明らかである。また測定結果として報告するべきものは

$$<x> \pm\sigma_m \qquad (4)$$

である。測定結果を $<x> \pm\sigma_m$ と書いたとき、信頼限界 σ_m は１桁ないしはせいぜい２桁書いておけば十分である。 また、$<x>$ の最後の桁は信頼限界 σ_m の最後の桁と一致しなければいけない。たとえば、

54.1 ± 0.1 m

121 ± 4 m^3

8.764 ± 0.002 g

(7.63 ± 0.10) × 10^3 m/s

等のように記載する。なお、測定回数 n が十分に大きければ、$<x> \pm\sigma_m$ の信頼水準は前に述べたように、0.683 となるが、n が小さい場合には、信頼水準の評価に Student の t を用いる。

（注）測定値、すなわち物理量は、単位の何倍、あるいは何分の 1 というかたちで表わされる。物理量は、単位との比較によって定義されているので、「長さが 4.35 m」という文には意味があるが、「長さが 4.35」では意味がない。単位を忘れずに示すこと。

［課題 3］

一端を壁に固定し、他の端をスピーカーのボイスコイルに接着した糸がある。糸をぴんと張り、スピーカーから純音を出したところ、ある周波数のところで糸に定在波ができた。波の腹と節の位置は次の通りであった。(単位は cm)

2.84,	3.59 ,	4.31,	5.09,	5.86,
6.57,	7.36,	8.14,	8.85,	9.55

波長 λ を決めるために、次の二つの方法を試してみよ。

(a) 最初の測定値と二番目の値との差を求める。３番目の値と４番目の値との差を求める、等々により５個の値が計算できる。この値の平均値が $\lambda/4$ である。

(b) 最初の測定値と 6 番目の値との差を求める。２番目の値と７番目の値との差を求める、等々により５個の値が計算できる。この値の平均値が $5\lambda/4$ である。

(a)、(b) 二つの方法で λ の平均値、標準偏差、平均値の標準偏差、相対誤差を計算せよ。(注意：有効数字に注意して計算すること)。方法（a）で求めた波長の相対誤差は、方法（b）で求めたものより大きい。この違いがなぜ生じたのか考察しなさい。