緯度経度を用いた3つの距離計算方法

三浦　英俊

実データを用いて施設配置，経路探索など地理的な問題に取り組む場合，2 地点間の距離を計算しなければならない場面がときおりある．地点の緯度と経度のデータがあれば，2 地点間を地表面上で結んだ最も短い距離を計算することができる．ここでは，大円距離の計算，回転楕円体を用いた正確な距離計算方法，ヒュベニイの平均経度の式，の 3 つを紹介する．

キーワード：大円距離，緯度・経度，GRS80 楕円体，球面三角法，ヒュベニイの平均経度の式

1. はじめに

地理データを用いて施設配置問題，経路探索問題などの OR の問題に取り組む場合，2 地点間の距離を計算しなければならないことがある．たとえば，施設配置問題は，工場（施設）で生産したモノを複数の消費地へ輸送する際，施設と消費地との「距離」に比例する輸送費が最小となるような施設の位置を求める問題であるが，これを解くにあたっては距離を計算しなければならない．

このとき，平面座標がわかっていて，2 地点が一つの平面上にあると仮定できるなら，三平方の定理を用いて直線距離を計算すればよい．しかし，地球が平面でないと想定しなければならないほど 2 地点が離れている場合には，どうすればよいか．

本稿では，緯度経度データを用いて距離を求める 3 つの計算方法を紹介する．社会的および経済活動のグローバル化の進展により地球規模で計画策定を行う必要性が増えてきた．緯度経度を用いる 2 地点間の距離計算はコンピュータで容易に行うことができるが，距離計算の方法について解説することが本稿の目的である．それぞれの計算方法は，距離を計測するときに使う地球のモデルが異なる．なるべくなら手元に地球儀を置いて本稿を読んでいただきたい．

第 1 の方法は，最もおおざっぱで簡便な計算方法として，半径 6,370 km の球を地球のモデルと考えて，球面上の大円距離を計算する方法である．球の中心を通るように球を切ったときの切り口を大円という．大円距離とは，球面上の距離計測対象の 2 地点を結ぶ大円の弧の長さである．2 地点の緯度経度をそれぞれ（緯度ϕ_1，経度λ_1），（緯度ϕ_2，経度λ_2）とすると，大円距離 L[km] は，

$$L = 6370 \arccos(\sin\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)) \quad (1)$$

によって得られる．

第 2 の方法は，地球を回転楕円体であるとみなして，回転楕円体上の 2 地点間の最短経路距離すなわち測地線の長さを計算するやりかたである．測量によって計測された地球の形を回転楕円体をモデルとして表現して計算する測地線距離は，正確な距離が必要な場合に使用される．

第 3 の方法は，ヒュベニイの平均経度の式，と呼ばれる式を使う方法である．距離計測対象の 2 地点を含むように回転楕円体上に三角形を描き，三平方の定理を適用して測地線距離の近似値を計算する．

最後に 3 つの方法の数値を比較する．第 2 の方法で得られる値が最も正確であるとされているが，第 1，第 3 のような簡便な計算方法で得られる数値が，どの程度正確な値に迫っているのかを見てみよう．

2. 第 1 の方法：地球を球と仮定する

地球を球と仮定して大円距離を計算する (1) の導出について述べる．(1) を理解するためには，球面上の三角形に関するいくつかの性質を知っておく必要がある．これらの性質は「球面三角法」としてまとめられている [1]．図 1 に O を中心とする球とその球面上にある球面三角形を示す．ただしこの球の半径は 1 とする．球面三角形とは，球面上の 3 つの大円の弧で囲まれた部分であり，3 つの角と 3 つの辺をもつ．辺の長さは，球の中心から球面上の辺を見込む角度によって表される．図 1 の球面三角形は角 A, B, C と辺 a, b, c からできている．まず，球面三角形に成り立つ余弦定理，

みうら　ひでとし
南山大学理工学部
〒 466–8673 愛知県名古屋市昭和区山里町 18

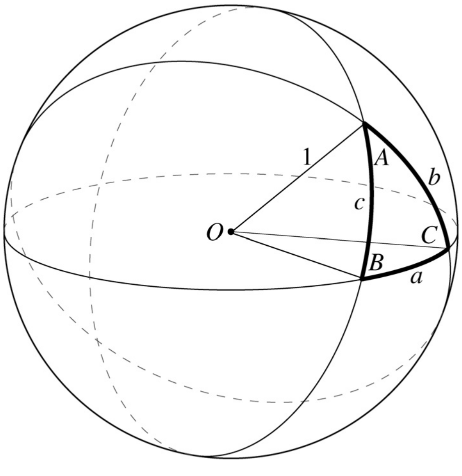

図 1　球面三角形 ABC

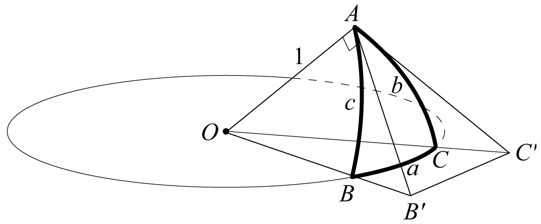

図 2　球面三角形とそれに接する平面三角形 $AB'C'$

正弦定理，正弦余弦定理について述べる．さらに，余弦定理を用いて 2 地点間の大円距離を求める方法 (1) を導出する．

球面三角形において以下の定理が成り立つ．

余弦定理

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{cases}$$

正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

正弦余弦定理

$$\begin{cases} \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \end{cases}$$

これらのうち，大円距離を計算するために必要な余弦定理を導く．図 2 のように，頂点 A で球面に接する平面を考えて，この平面と直線 OB との交点を B'，直線 OC との交点を C' とする．平面三角形 $AB'C'$ の $\angle A$ の大きさは球面三角形 ABC の $\angle A$ の大きさと

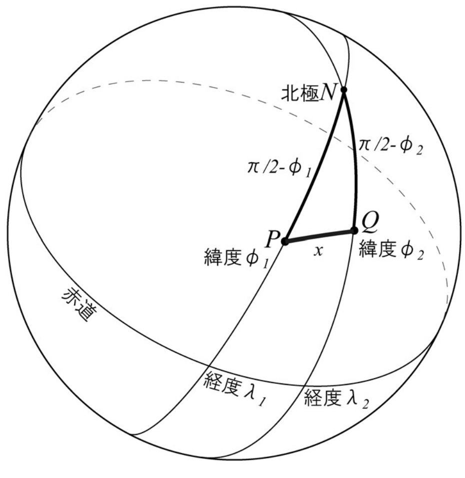

図 3　球面上の 2 地点 P, Q と北極 N から成る球面三角形

等しく，平面三角形 $AB'C'$ と $OB'C'$ は辺 $B'C'$ を共有しているので，平面三角形の余弦定理から，

$$\begin{aligned} \overline{B'C'}^2 &= \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\overline{AB'} \cdot \overline{AC'} \cos A \\ &= \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2\overline{OB'} \cdot \overline{OC'} \cos a \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ．$\triangle\ OAB'$ と $\triangle\ OAC'$ は（平面上の）直角三角形なので，$\overline{AB'} = \tan c$，$\overline{AC'} = \tan b$，$\overline{OB'} = 1/\cos c$，$\overline{OC'} = 1/\cos b$ が成り立つ．これらを (2) に代入すると，

$$\begin{aligned} &\tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \tan b \cos A \\ &\quad = \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{1}{\cos c}\frac{1}{\cos b} \cos a \end{aligned}$$

を得る．さらに，$1/\cos^2 c - \tan^2 c = 1/\cos^2 b - \tan^2 b = 1$ であることから，

$$-2 \tan b \tan c \cos A = 2 - 2\frac{1}{\cos b}\frac{1}{\cos c} \cos a$$

となるので，これを整理して，球面三角形に成り立つ余弦定理

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

が導かれる．

正弦定理と正弦余弦定理は，(1) と直接関係がないので導出は割愛するが，興味のある読者は，たとえば [1] を読んでいただきたい．

余弦定理から，2 地点間の大円距離の計算式 (1) を導く．地球を模した半径 r の球面上に，地点 P（緯度 ϕ_1，経度 λ_1）と地点 Q（緯度 ϕ_2，経度 λ_2）と北極 N を頂点とする球面三角形 NPQ を考える（図 3）．辺 PQ の角度を x（球の中心から大円の弧 PQ を見込む角度）として余弦定理を適用すると，辺 NP の角度は $\pi/2 - \phi_1$，辺 NQ の角度は $\pi/2 - \phi_2$ となるので，

$$\cos x = \cos(\pi/2-\phi_1)\cos(\pi/2-\phi_2) + \sin(\pi/2-\phi_1)\sin(\pi/2-\phi_2)\cos(\lambda_1-\lambda_2) = \sin\phi_1\sin\phi_2+\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)$$

となる．したがって，

$$x = \arccos\left(\sin\phi_1\sin\phi_2+\cos\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)\right)$$

となる．球の半径を 6,370 km，地点 P, Q 間の大円距離を L とすれば (1) が導かれる．

3. 第２の方法：回転楕円体を仮定した測地線距離の計算

地球の概形は，自転の影響から球を押しつぶした形すなわち回転楕円体である．地球の中心から赤道方向への半径は約 6,378 km，極方向への半径は約 6,357 km であり，その差は 21 km である．現在使われている地球を模した回転楕円体は，GRS80 楕円体と呼ばれている．わが国では，GRS80 楕円体上の 2 地点を結ぶ最短経路（これを測地線と呼ぶ）の長さが，正確な距離として認められている．その概要は，国土交通省国土地理院の作成したウェブページ [2] から知ることができる．

GRS80 (Geodetic Reference System 1980) とは，国際測地学協会 (IAG) と国際測地学および地球物理学連合 (IUGG) が 1979 年に採択した，地球の形状，重力定数，角速度など地球の物理学的な定数や計算式を合わせたシステム全体の名称である．GRS80 のなかで使用される地球を模した回転楕円体のことを GRS80 楕円体という．

そもそも，地球を模した回転楕円体を考える前提として，地球の形とはどのようなものかを考える必要がある．地球は，その地表面に起伏が多いのに対して，海面は比較的凹凸の少ない面を形成している（図 4）．その海面も海流，潮汐，気象などの影響を受けて絶えず変化しているが，その平均的な海面すなわち平均海面は滑らかな面となる．平均海面を陸地に延長できると仮定するならば地球は連続した海洋面で覆われることになる．この仮想的な静止した平均海面モデルは「ジオイド」と呼ばれる．ただし，滑らかと言っても，地表面の凹凸や地球内部の物質の不均質性を起因としてジオイドにも多少の起伏がある．重力データ，標高データ，そのほか人工衛星から観測したデータを用いて，ジオイドのモデルが作成される．ジオイドのモデルを地球の形を最もよく代表するものとみなして，さらに，ジオイドのモデルに最も近く，数式を用いて表現できる回転楕円体モデルを考える [3]．ジオイドのモデルに最もよく適合する回転楕円体として現在使用されているものが，先に述べた GRS80 楕円体である．

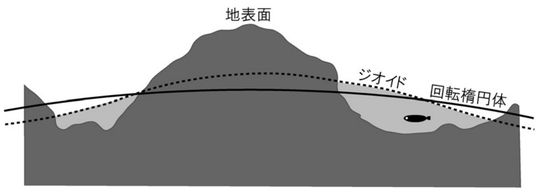

図 4　地表面，ジオイド，回転楕円体

現在わが国で使用される地球上の経度，緯度，標高は GRS80 楕円体を用いて定められており，これらを定めるシステムは通称「世界測地系」と呼ばれている．2002 年 3 月末まで使用されていたシステムは「（旧）日本測地系」と呼ばれており，測地系が異なると同じ地点を表す緯度経度の数値に差異があるため，注意が必要である．（旧）日本測地系が，日本とその周辺だけを取り扱うシステムであるのに対して，世界測地系は，世界共通で使用できる位置データを与える．

回転楕円体の形状の記述，回転楕円体における 3 次元座標系の定義，その表面上の位置を表す緯度経度システム，これらによって 2 地点間の測地線距離を求めることができる．測地線距離の計算方法は，[4] を見ればよいが，多少の手間を必要とする．計算結果の距離だけ必要ならば，国土地理院によって 2 地点間の正確な測地線距離を計算するウェブサービスが提供されているので，これを利用すればよい [5]．

4. 第３の方法：ヒュベニイの平均経度の式

本稿を書くにあたって，検索ウェブサイトで「緯度経度 距離」と入力して検索して距離の計算方法を調べたところ，「ヒュベニの距離計算式」，というものがあることを知った．調べてみるとこの式の出典は，カシミール 3D という 3 次元地図ソフトのマニュアルであるようだ [6]．カシミール 3D の作者 DAN 杉本氏にご教示いただき，さらに [7] に至ることができたが，「ヒュベニの距離計算式」の原典は残念ながら探し出すことができなかった．

[7] では，ヒュベニイ (Hubeny) の平均経度の式，として記述されているので本稿でもこれにならって表記する．ヒュベニイの平均経度の式による 2 点間の距離を s[m] と置くと，s は以下のように記述される．

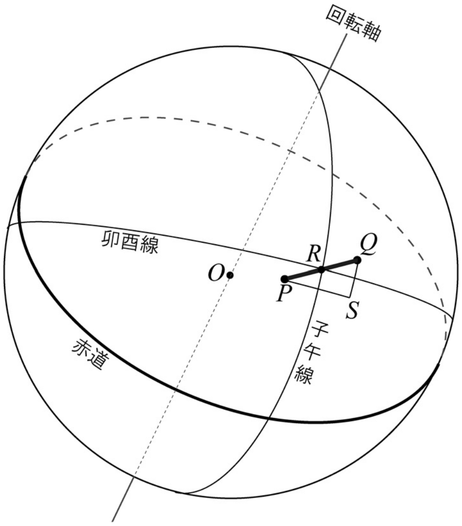

図 5　ヒュベニイの平均経度の式解説図（その 1）

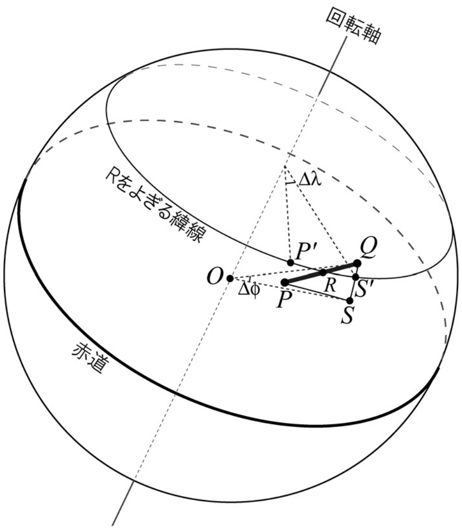

図 6　ヒュベニイの平均経度の式解説図（その 2）

ヒュベニイの平均経度の式

$s=\sqrt{(M\Delta\phi)^2+(N\cos\phi\Delta\lambda)^2}$

ϕ : 2 点の平均緯度

$\Delta\phi$: 2 点の緯度差

$\Delta\lambda$: 2 点の経度差

M：子午線曲率半径 $\dfrac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\phi)^3}}$

N：卯酉線曲率半径 $\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$

a：回転楕円体の長半径

b：回転楕円体の短半径

e：離心率 $\sqrt{1-(b/a)^2}$

図 5 および図 6 を用いてヒュベニイの平均経度の式を説明する．地球を回転楕円体であるとする．回転楕円体上の 2 地点 P, Q 間の距離を s として，s をヒュベニイの平均経度の式によって導く．測地線 PQ の中点を R とする．2 地点 P, Q の平均緯度，すなわち R の緯度を ϕ とする．2 地点の緯度差を $\Delta\phi$，経度差を $\Delta\lambda$ とする．R をよぎる子午線（しごせん）と卯酉線（ぼうゆうせん）を考える．子午線とは，赤道と直角に交差するように両極を結ぶ大円であり，経線に一致する．子午線に直交する大円が卯酉線である．卯酉線は同一緯度の地点を結ぶ緯線とは異なることに注意が必要である（緯線は大円ではない）．地点 R における回転楕円体の子午線方向と卯酉線方向のそれぞれの曲がり具合を円で近似して，回転楕円体の近似円の子午線方向の曲率半径を M，卯酉線方向の曲率半径を N とする．

点 P と緯度が等しく点 Q と経度が等しい点を S として，線分 PQ を斜辺とする回転楕円体上の直角三角形△ PQS を考える．∠ QOS=$\Delta\phi$ であることと曲率半径 M を用いて，辺 QS の長さを $M\Delta\phi$ によって近似する．点 P, S をよぎる子午線と R をよぎる緯線との交点をそれぞれ P', S' とすると，この緯線の半径が $N\cos\phi$ で近似できるので，辺 $P'S'$ の長さを $N\cos\phi\Delta\lambda$ によって近似する．さらに $P'S'$の長さ を用いて PS の長さ を近似する．△ PQS が平面上にあることを仮定して三平方の定理を用いて斜辺 PQ の直線距離 s を計算すると，s=$\sqrt{(M\Delta\phi)^2+(N\cos\phi\Delta\lambda)^2}$ となる．

ヒュベニイの平均経度の式は，2 地点を結ぶ測地線を含む回転楕円体上の直角三角形△ PQS を，平面上にゆがみが少なく置ける場合には，精度の高い距離を計算することができる．直角三角形の東西方向の辺の長さ PS を緯線に沿った長さを用いて近似しているので，P と S を結ぶ測地線と緯線の違いが大きい場合，たとえば高緯度の地点を含む距離を計測するときには，ヒュベニイの平均経度の式は適切ではないことがある．このとき，測地線の長さよりも緯線に沿った長さのほうが長いので，多くの場合ヒュベニイの平均経度の式は，正確な長さすなわち第 2 の距離計算方法による長さよりも長くなる．

5. 3 つの距離計算方法の数値比較

以上紹介してきた 3 つの計算方法による距離の数値を比較する．GRS80 楕円体を用いて計算する測地線距離を真値として，他の 2 つの方法による数値と比較する．札幌，東京，福岡，シドニー，ワシントン，ロンドンの

表 1　6 地点の緯度と経度

地点名	（緯度，経度）
札幌	(43.064301, 141.346869)
東京	(35.689608, 139.692080)
福岡	(33.606316, 130.418108)
シドニー	(−33.856960, 151.215109)
ワシントン	(38.897668, −77.036680)
ロンドン	(51.501157, −0.142491)

表 2　GRS80 楕円体を用いた 6 地点間の距離（上段 キロメートル）と大円距離との誤差比率（中段 %）とヒュベニイの平均経度の式による距離との誤差比率（下段%）

	東京	福岡	シドニー	ワシントン	ロンドン
札幌	831	1,417	8,577	10,140	8,889
	0.13	−0.03	0.39	−0.26	0.30
	0.00	0.17	−0.01	17.63	20.87
東京		881	7,792	10,928	9,583
		−0.20	0.42	−0.23	−0.26
		0.05	0.06	16.29	19.23
福岡			7,778	11,494	9,417
			0.39	−0.22	−0.25
			0.42	19.39	15.79
シドニー				15,709	16,990
				−0.01	0.01
				6.41	12.65
ワシントン					5,913
					−0.27
					4.88

代表点の緯度経度を表 1 に示す．6 都市相互間の測地線距離，大円距離（第 1 の方法）およびヒュベニイの平均経度の式（第 3 の方法）との誤差比率を表 2 に示す．ただし，大円距離において球の半径を 6,370 km，ヒュベニイの平均経度の式では回転楕円体の半径を GRS80 楕円体の数値を用いて長半径 a =6,378,137 m，短半径 b =6,356,752 m とする．

表 2 を見ると，国内 3 都市間の距離は，誤差比率はともに 0.2%未満である．大円距離とヒュベニイの平均経度の式のどちらを使っても大差はない．絶対誤差の大きさは，札幌–福岡間で大円距離は 0.41 km，ヒュベニイの平均経度の式では 2.47 km である．

国内 3 都市と他国都市との距離を見ると，大円距離の誤差はすべて 0.5%未満であるが，ヒュベニイの平均経度の式の誤差は 20%を超えているところがある．国内 3 都市とシドニーとの距離では比較的誤差が小さいのは，ヒュベニイの平均経度の式に使う回転楕円体上の直角三角形が，子午線方向に長いため，平面上に置くことが容易なためである．しかしたとえば札幌–ロンドン間を含む回転楕円体上の直角三角形は，札幌–ロンドンを結ぶ測地線がその近辺の緯線と大きく異なるため，誤差が大きい．

6.　おわりに

本稿では，正確な距離計測の方法の概要と，緯度経度を用いた 2 つの簡便な距離の計算方法について紹介した．地球を球体として，あるいは，回転楕円体上の直角三角形を平面上に置いて，とそれぞれ仮定して計算する仕組みについて述べた．2 つの簡便な距離の計算方法は近似式なので，距離の誤差を許容できる場合にしか使用できないが，大円距離を使用する場合の誤差比率は 0.5%未満であるので，OR で利用する多くの場合については，問題がないと考えられる．測量や建築の分野では数値にミリ単位の精度が要求されることがほとんどであり，計算が容易だから，という理由で単純な式を使用することは許されない．

最後になりましたが，ヒュベニイの平均経度の式について教えてくださいました DAN 杉本氏に感謝申し上げます．

参考文献

[1] 長谷川一郎，『天文計算入門』，恒星社，1997.
[2] 国土交通省国土地理院，「世界測地系移行の概要」，http://www.gsi.go.jp/LAW/G2000-g2000.htm（2015 年 7 月閲覧）
[3] 国土交通省国土地理院，「日本の測地系」，http://www.gsi.go.jp/sokuchikijun/datum-main.html（2015 年 7 月閲覧）
[4] 国土交通省国土地理院，「経緯度を用いた 2 地点間の測地線長，方位角を求める計算」，http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/surveycalc/algorithm/bl2st/bl2st.htm（2015 年 7 月閲覧）
[5] 国土交通省国土地理院，「距離と方位角の計算」，http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/surveycalc/bl2stf.html（2015 年 7 月閲覧）
[6] DAN 杉本，「カシミール 3D のホームページ」，http://www.kashmir3d.com/kash/manual/std_siki.htm（2015 年 7 月閲覧）
[7] 高崎正義，『地図学』，朝倉書店，1988.