МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

Е.Д. Глазырина, О.Н. Ефремова

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРЕДМАГИСТРАНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ ГРАЖДАН

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2018

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Г525

Глазырина Е.Д., Ефремова О.Н.

Г525 Спецглавы математики для предмагистрантов технического профиля. Учебное пособие для иностранных граждан / Е.Д. Глазырина, О.Н. Ефремова; Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 192 [1] с.

Учебное пособие предназначено для иностранных граждан, обучающихся по программе предмагистерской подготовки, и планирующих поступление в магистратуру на русском языке.

В данном учебном пособии представлены теоретический материал и разнообразные задания по курсу «Спецглавы математики», которые адаптированы для восприятия их иностранными гражданами на неродном языке. Содержание учебного пособия направлено на повторение основных разделов дисциплины на русском языке.

Учебное пособие состоит из двух частей, содержание которых соответствует требованиям к уровню подготовки иностранных бакалавров по программе предмагистерской подготовки.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике ОмГПУ
С.Н. Скарбич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программирования института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
Е.Г. Пахомова

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Спецглавы математики для предмагистрантов технического профиля» предназначено для иностранных бакалавров, обучающихся на подготовительном отделении и планирующих поступление в магистратуру. Пособие содержит основные разделы школьного курса математики и высшей математики, предусмотренные рабочей программой для иностранных граждан, изучающих математику на русском языке.

Пособие может быть использовано преподавателями и обучающимися, как на занятиях, так и при организации самостоятельной работы.

При создании пособия авторы ставили цели:

- изложить материал для иностранных бакалавров в доступной форме на русском языке;
- помочь обучающимся овладеть математической терминологией на русском языке;
- пополнить лексический запас у иностранных бакалавров при ответе на вопросы и объяснении решения примеров и задач по математике.

Содержание учебного материала разделено на две части, каждая часть разделена на темы. Часть 1 содержит основной теоретический материал по школьному курсу математики. Часть 2 содержит основные разделы высшей математики, которые предусмотрены в учебных планах технических направлений российских вузов.

Каждая тема школьной и высшей математики состоит из нескольких пунктов. Каждый пункт включает в себя словарь, теоретическую информацию, примеры и задачи с решением и разнообразные задания для самостоятельного выполнения. Нумерация рисунков и формул сплошная по всему пособию.

В темах части 1 представлены примеры конструкций, которые позволяют обучающимся формулировать определения понятий, читать формулы и примеры, отвечать на вопросы, предлагаемые им при изучении курса математики.

Учебный материал в пособии изложен просто и наглядно, с математической строгостью и логичностью.

В пособии не приводятся доказательства теорем и вывод формул по математике, т.к. иностранные граждане изучили основные разделы высшей математики и имеют диплом бакалавра.

ВВЕДЕНИЕ

Числа и действия над ними, элементы теории множеств, основные виды уравнений и неравенств, прямоугольная система координат, основные элементарные функции, фигуры на плоскости и в пространстве являются основополагающими разделами школьной математики.

Линейная и векторная алгебра, дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных, элементы теории поля, элементы теории вероятностей – основные разделы высшей математики, которые изучают бакалавры в российских технических вузах. Знания по данным разделам высшей математики на русском языке служат теоретическим фундаментом для освоения профильных дисциплин.

Для обучения в магистратуре на русском языке иностранным бакалаврам необходимо овладеть основными терминами, понятиями, формулировками математических определений, правил, теорем, представленными в учебном пособии.

Желаем успеха!

ЧАСТЬ 1

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Тема 1. Натуральные числа. Арифметические операции

1.1. Натуральные числа

Словарь к теме

ци́фра число́ натура́льное число мно́жество натура́льных чи́сел за́пись (ж.р.) запи́сывать - записа́ть *что?* возника́ть - возни́кнуть[1] *когда?* дре́вность (ж.р.) испо́льзовать[2] *для чего?* нача́ть *что делать?*	счита́ть знак обознача́ть - обозна́чить *чем?* означа́ть помога́ть - помо́чь происходи́ть - произойти́ (произошёл, произошла́, произошло́, произошли́[3]) *от чего?* лати́нский ара́бский пусто́й

Цифры **читают**:

0 – ноль (нуль); 1 – оди́н[4]; 2 – два; 3 – три; 4 – четы́ре;
5 – пять; 6 – шесть; 7 – семь; 8 – во́семь; 9 – де́вять.

Буквы и записи **читают**:

n – эн (эн ма́ленькое);
N – эн (эн больш**о́е**);
… – и так да́лее.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Цифры – это знаки. Цифры используют для записи чисел. Слово «цифра» произошло от латинского слова «cifra» (сифра) и от арабского слова «sifr» (сифр). Слово «sifr» означает пустой или ноль. Сейчас цифры – это десять знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Числа $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ – это натуральные числа. Натуральные числа возникли в древности, когда люди начали считать.

В математике множество всех натуральных чисел обозначают большой латинской буквой N.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Когда возникли натуральные числа? Назовите натуральные числа.
2. Что такое цифра? Сколько сейчас цифр?
3. Для чего используют цифры?
4. От какого слова произошло слово «цифра»? Что оно означает?

---

[1] Возник, возникла, возникло (прошедшее время).
[2] Использовать (я использую, ты используешь, они используют).
[3] Произошёл, произошла, произошло, произошли (прошедшее время).
[4] Один = едини́ца.

Числа **читают:**

10 – де́сять;
11 – оди́ннадцать;
12 – двена́дцать;
13 – трина́дцать;
14 – четы́рнадцать;
15 – пятна́дцать;
16 – шестна́дцать;
17 – семна́дцать;
18 – восемна́дцать;
19 – девятна́дцать;
20 – два́дцать;
30 – три́дцать;
40 – со́рок;
50 – пятьдеся́т;
60 – шестьдеся́т;
70 – се́мьдесят;
80 – во́семьдесят;
90 – девяно́сто;
100 – сто[5];
200 – две́сти;
300 – три́ста;
400 – четы́реста;
500 – пятьсо́т;
600 – шестьсо́т;
700 – семьсо́т;
800 – восемьсо́т;
900 – девятьсо́т;
1000 – ты́сяча;
10000 – де́сять ты́сяч;
1000000 – миллио́н.

1.2. Арифметические операции

Словарь к теме

арифме́тика	ми́нус
арифмети́ческая опера́ция	плюс
опера́ция *над чем?* над числами	изуча́ть - изучи́ть
вычита́ние	раздели́ть на
деле́ние	умно́жить на
сложе́ние	равно́
умноже́ние	

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Арифметика изучает числа и операции над ними. Сложение, вычитание, умножение и деление – это операции над числами. Операции сложения, вычитания, умножения и деления – это арифметические операции.

Зна́ки **читают:**

«=» – равно;
«+» – плюс;
«–» – минус;
«·» (или «×») – умножить на;
«:» – разделить на.

Знак «+» – это знак операции сложения. Знак «–» – это знак операции вычитания. Знак «·» – это знак операции умножения. Знак «:» – это знак операции деления.

[5] Сто = со́тня.

Б) Ответьте на вопросы.
1. Что изучает арифметика?
2. Какой знак используют для операции сложения?
3. Какой знак используют для операции вычитания?
4. Какой знак используют для операции умножения?
5. Какой знак используют для операции деления?

1.3. Компоненты арифметических операций

Словарь к теме

вычита́емое	вычита́ть - вы́честь *из чего? что?* (*что? из чего?*)
дели́мое	дели́ть - раздели́ть *что? на что?*
дели́тель (м.р.)	отнима́ть - отня́ть *от чего? что?* (*что? от чего?*)
компоне́нт	прибавля́ть - приба́вить *к чему? что?* (*что? к чему?*)
мно́житель (м.р.)	скла́дывать - сложи́ть *что? и что?*
произведе́ние	умножа́ть - умно́жить *что? на что?*
ра́зность (ж.р.)	находи́ть - найти́
результа́т	получа́ться - получи́ться
слага́емое	ра́венство
су́мма	пе́рвый, -ая, -ое
уменьша́емое	второ́й, -а́я,-о́е
ча́стное	

Запо́мните!

Результат операции сложе́ния – это *сумма*.
Результат операции вычита́ния – это *разность*.
Результат операции умноже́ния – это *произведение*.
Результат операции деле́ния – это *частное*.

Задание 3. Прочитайте примеры. Изучите компоненты арифметических операций.

Операция сложения: $3 + 5 = 8$

Первое слагаемое | Второе слагаемое | Сумма

Операция вычитания: $10 – 7 = 3$

Уменьшаемое | Вычитаемое | Разность

Операция умножения: $6 \cdot 2 = 12$

Первый множитель | Второй множитель | Произведение

Операция деления: 15 : 5 = 3

Делимое | Делитель | Частное

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ) (ты - Вы)**	**существительное**
скла́дывать - сложи́ть	скла́дывать - сложи́ть что? и что?	сложи́(те)	сложе́ние
прибавля́ть - приба́вить	прибавля́ть - приба́вить что? к чему? (к чему? что?)	приба́вь(те)	прибавле́ние
вычита́ть - вы́честь	вычита́ть - вы́честь из чего? что? (что? из чего?)	вы́чти(те)	вычита́ние
отнима́ть - отня́ть	отнима́ть - отня́ть от чего? что? (что? от чего?)	отними́(те)	–
умножа́ть - умно́жить	умножа́ть - умно́жить что? на что?	умно́жь(те)	умноже́ние
дели́ть - раздели́ть	дели́ть - раздели́ть что? на что?	раздели́(те)	деле́ние

Задание 4. Прочитайте предложения в таблице.

пример	**задание**		
10 + 12	**сложи́те** числа 10 и 12	**приба́вьте** к (*чему*?) числу 10 (*что*?) число 12	**найди́те су́мму** чисел 10 и 12
12 – 7	**вы́чтите** из (*чего*?) числа 12 (*что*?) число 7 **отними́те** от (*чего*?) числа 12 (*что*?) число 7	**вы́чтите** (*что*?) число 7 из (*чего*?) числа 12 **отними́те** (*что*?) число 7 от (*чего*?) числа 12	**найди́те ра́зность** чисел 12 и 7
10 · 3	**умно́жьте** числа 10 и 3; **умно́жьте** число 10 (*на что*?) на 3		**найди́те произведе́ние** чисел 10 и 3
16 : 2	**раздели́те** 16 (*на что*?) на 2		**найди́те ча́стное** чисел 16 и 2

Задание 5. Выполните задание по образцу. Запишите операцию и ответ.

Образе́ц. Сложите числа 15 и 19. Запишем: $15+19=34$.

1. Вычтите из числа 102 число 17.
2. Сложите числа 12 и 13.
3. Вычтите число 23 из числа 38.
4. Умножьте 5 на 13.
5. Разделите 102 на 51.
6. Отнимите от числа 15 число 7.
7. Найдите сумму чисел 5 и 79.
8. Прибавьте число 7 к числу 12.
9. Найдите частное чисел 35 и 7.
10. Найдите разность чисел 19 и 11.
11. Сложите числа 16 и 29.
12. Вычтите из числа 65 число 43.
13. Умножьте 9 на 13.
14. Разделите 112 на 2.
15. Найдите сумму чисел 1 и 99.
16. Найдите произведение чисел 7 и 13.
17. Найдите частное чисел 48 и 12.
18. Вычтите из числа 25 число 17.
19. Найдите разность чисел 86 и 59.
20. Найдите произведение чисел 6 и 12.
21. Прибавьте к числу 50 число 5.

Задание 6. Прочитайте и запо́мните.

	Знак «=» читают	**Примеры**
М. р.	ра́**вен**	икс ра́**вен** двум
Ж. р.	равн**а́**	сумма равн**а́** трём
Ср. р.	равн**о́**	произведение равн**о́** пяти
Мн. ч.	равн**ы́**	суммы чисел 2 и 3 и чисел 1 и 4 равн**ы́**

Запо́мните, как читать латинские буквы!

Ср.р					**М.р.**
$A(a)$ – а $B(b)$ – бэ $C(c)$ – цэ $D(d)$ – дэ $E(e)$ – е	$F(f)$ – эф $G(g)$ – жэ $H(h)$ – аш $I\ (i)$ – и $J(j)$ – жи	$K(k)$ – ка $L(l)$ – эль $M(m)$ – эм $N(n)$ – эн $O(o)$ – о	$P(p)$ – пэ $Q(q)$ – ку $R(r)$ – эр $S(s)$ – эс $T(t)$ – тэ	$U(u)$ – у $V(v)$ – вэ $W(w)$ – дубль-вэ	$X(x)$ – икс $Y(y)$ – и́грек $Z(z)$ – зэт

Задание 7. Прочитайте примеры. Назовите операцию и компоненты арифметической операции.

Образе́ц. $2 + p = x$. Два плюс пэ равн**о** икс. Это операция сложени**я**. 2 – это первое слагаемое, пэ – это второе слагаемое, икс – это сумма.

1) $m-5=n$; 2) $a:5=b$; 3) $7+h=g$; 4) $3\cdot s=t$;

5) $u:2=z$; 6) $y+3=k$; 7) $l-2=v$; 8) $6\cdot w=q$.

Задание 8. А) Прочитайте числа в таблице.

Число	И. п. что? сколько?	Д. п. чему? скольки?	Число	И. п. что? сколько?	Д. п. чему? скольки?
0	нуль/ноль	нул**ю́**	30	тридцать	тридцат**и́**
1	один/единица	одн**ому́**/едини́**це**	40	сорок	сорок**а́**
2	два	дв**ум**	50	пятьдесят	пят**и́**десят**и**
3	три	тр**ём**	60	шестьдесят	шест**и́**десят**и**
4	четыре	четыр**ём**	70	семьдесят	сем**и́**десят**и**
5	пять	пят**и́**	80	восемьдесят	вос**ьми́**десят**и**
6	шесть	шест**и́**	90	девяносто	девяно́ст**а**
7	семь	сем**и́**	100	сто	ст**а**
8	восемь	вос**ьми́**	200	двести	дв**ум**ст**а́м**
9	девять	девят**и́**	300	триста	тр**ём**ст**а́м**
10	десять	десят**и́**	400	четыреста	четыр**ём**ст**а́м**
11	одиннадцать	оди́ннадцат**и**	500	пятьсот	пят**и**ст**а́м**
12	двенадцать	двена́дцат**и**	600	шестьсот	шест**и**ст**а́м**
13	тринадцать	трина́дцат**и**	700	семьсот	сем**и**ст**а́м**
14	четырнадцать	четы́рнадцат**и**	800	восемьсот	вос**ьми**ст**а́м**
15	пятнадцать	пятна́дцат**и**	900	девятьсот	девят**и**ст**а́м**
20	двадцать	двадцат**и́**	1000	одна тысяча	одн**о́й** ты́сяч**и**
21	двадцать один	двадцат**и́** одн**ому́**	2000	две тысячи	дв**ум** ты́сяч**ам**
22	двадцать два	двадцат**и́** дв**ум**	5000	пять тысяч	пят**и́** ты́сяч**ам**
23	двадцать три	двадцат**и́** тр**ём**	1000000	один миллио́н	одн**ому́** миллио́н**у**
25	двадцать пять	двадцат**и́** пят**и́**	2000000	два миллио́на	дв**ум** миллио́н**ам**

Б) Прочитайте ра́венства.

Образе́ц. Равенство читают:

a = 5 – а равн**о́** пят**и́**;

x = 5 – икс ра́в**ен** пят**и́**.

1) $y = 2$; 2) $i = 1$; 3) $k = 8$;

4) $z = 7$; 5) $h = 100$; 6) $g = 101$;

7) $q = 53$; 8) $u = 503$; 9) $x = 1003$;

10) $s = 35$; 11) $v = 61$; 12) $w = 601$;

13) $m = 62$; 14) $n = 122$; 15) $t = 2005$;

16) $y = 71$; 17) $j = 500$; 18) $z = 911$;

19) $p = 97$; 20) $r = 217$; 21) $c = 3333$;

22) $d = 81$; 23) $e = 400$; 24) $f = 1123$;

25) $a = 19$; 26) $x = 6$; 27) $y = 82$;

28) $l = 389$; 29) $n = 472$; 30) $z = 65$;

31) $b = 803$; 32) $g = 94$; 33) $x = 234$.

1.4. Множество натуральных чисел. Чётные и нечётные числа

Словарь к теме

бесконе́чное мно́жество	оста́ток
коне́чное мно́жество	без оста́тка
вид	фо́рмула
перечисле́ние	элеме́нт
ско́бка	принадлежа́ть *чему?*
фигу́рная ско́бка / фигу́рные ско́бки	так да́лее (т.д.)
нечётное число́	то есть (т.е.)
чётное число́	сле́довательно

Зна́ки и за́писи **читают:**

$\{\ \}$ – фигурные скобки;

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ – эн это множество чисел 1, 2, 3, 4 и так далее, эн, и так далее;

$\in$ – принадлежит;

$\notin$ – не принадлежит;

$2 \in N$ → два принадлежит эн;
→ два принадлежит множеству натуральных чисел;
→ два – натуральное число;

$0 \notin N$ → ноль не принадлежит эн;
→ ноль не принадлежит множеству натуральных чисел;
→ ноль – ненатуральное число;

$a : 2$ → а разделить на 2;
→ а на два;
→ а попола́м;

$\{2n \mid n \in N\}$ – множество чисел два эн таких, что **эн** ма́ленько**е** принадлежит **эн** больш**о́му**.

Задание 9. Прочитайте констру́кции и примеры их испо́льзования.

Что? можно записать через что? (В.п.) / как что? (В.п.)

Множество можно записать *через* **перечисление** элементов.

Все натуральные **числа** можно записать *как* **множество**:

$$\{n \mid n \in N\}.$$

Что? может быть каким? (Тв.п.) или каким? (Тв.п.)

Натуральное **число** *может быть* **чётным** *или* **нечётным**.

Множество *может быть* **конечным** *или* **бесконечным**.

Если …, то … .

Если уменьшаемое – чётное число, а вычитаемое – нечётное число, **то** разность – нечётное число.

Если a и b – натуральные числа, **то** произведение чисел a и b – натуральное число.

Задание 10. Ответьте на вопросы, используйте конструкцию «Если … , то … .».

1. Что получится, если из суммы вычесть первое слагаемое?
2. Что получится, если к вычитаемому прибавить разность?
3. Что получится, если произведение разделить на первый множитель?
4. Что получится, если к первому слагаемому прибавить второе слагаемое?

Задание 11. А) Прочитайте текст.

Множество всех натуральных чисел обозначают большой латинской буквой N. Натуральные числа – это элементы множества N. Например, число 5 – это натуральное число. Следовательно, число 5 – это элемент множества N.

Записывают: $5 \in N$.

Число 0 – это ненатуральное число. Следовательно, число 0 – не элемент множества N.

Записывают: $0 \notin N$.

Множество натуральных чисел можно записать через перечисление всех его элементов. Все элементы множества N записывают в фигурных скобках, т.е. записывают в виде

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Натуральное число может быть чётным или нечётным. Если $a \in N$ и частное $a : 2 \in N$, то число a – чётное число. Чётное натуральное число всегда *можно разделить* на 2 *без остатка*. Например, 2, 4, 6, 8 – это чётные натуральные числа.

Все чётные числа можно записать как множество:

$$\{2n \mid n \in N\},$$

или

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots,\ 2n, \ldots\}.$$

Если $a \in N$ и частное $a : 2 \notin N$, то число a – нечётное число. Нечётное натуральное число *нельзя разделить* на 2 *без остатка*. Например, 1, 3, 5 – это нечётные натуральные числа.

Все нечётные числа можно записать как множество:

$$\{2n - 1 \mid n \in N\},$$

или

$$\{1, 3, 5, \ldots,\ 2n - 1, \ldots\}.$$

Любое чётное число можно записать по формуле $2n$. Любое нечётное число можно записать по формуле $2n - 1$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как обозначают множество всех натуральных чисел?
2. Число 0 – это элемент множества N?
3. Как можно записать множество натуральных чисел?
4. Как записывают все элементы множества N?
5. Каким может быть натуральное число?
6. Число a – чётное или нечётное, если $a \in N$ и частное $a:2 \in N$?
7. Запишите чётное число.
8. Как можно записать все чётные числа?
9. Число a – чётное или нечётное, если $a \in N$ и частное $a:2 \notin N$?
10. Запишите нечётное число.
11. Как можно записать все нечётные числа?
12. $2n$ – это формула для чётного или нечётного числа?
13. $2n - 1$ – это формула для чётного или нечётного числа?

Задания и упражнения

Задание 1. Прочитайте числа:

1) 1; 11; 10; 100; 2) 2;12; 20; 200; 3) 3; 13; 30; 300;
4) 4; 14; 40; 400; 5) 5; 15; 50; 500; 6) 6; 16; 60; 600;
7) 7; 17; 70; 700; 8) 8; 18; 80; 800; 9) 9; 19; 90; 900;
10) 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; 1000000;
11) 110; 111; 121; 132; 145; 176; 187; 199;
12) 212; 234; 345; 456; 567; 678; 789; 890;
13) 1001; 2003; 2016; 3089; 4125; 5016; 9987.

Задание 2. Запишите числа цифрами:

1) семь; 2) семнадцать; 3) двадцать семь; 4) семьдесят девять; 5) девятнадцать; 6) пятьдесят восемь; 7) пятнадцать; 8) сто пять; 9) двести пятнадцать; 10) триста пятьдесят; 11) шестьсот пятьдесят три; 12) четыреста восемьдесят девять; 13) две тысячи семнадцать; 14) триста шестьдесят пять; 15) шестьдесят восемь; 16) восемнадцать; 17) восемьдесят два.

Упражнение 1. Прочитайте примеры. Назовите операцию и компоненты арифметической операции.

Образец. 2 + 5 = 7. Два плюс пять равн**о** сем**и**. Это операция сложени**я**. 2 – это перв**ое** слагаемое, 5 – это втор**ое** слагаемое, 7 – это сумма.

1) $1+2=3$; 2) $7-2=5$; 3) $3 \cdot 4 = 12$;
4) $15:3=5$; 5) $6+3=9$; 6) $8-7=1$;
7) $14:7=2$; 8) $3 \cdot 7 = 21$; 9) $2+6=8$;
10) $13-9=4$; 11) $7 \cdot 8 = 56$; 12) $18:2=9$;
13) $0+2=2$; 14) $24:8=3$; 15) $10-9=1$;
16) $10 \cdot 9 = 90$; 17) $5+3=8$; 18) $16:4=4$;
19) $11-3=8$; 20) $5 \cdot 0 = 0$; 21) $20+2=22$.

Упражнение 2. Выполните задания по образцу. Запишите операцию и ответ. Назовите операцию и компоненты арифметической операции.

Образец. Вычтите из числа 12 число 3. Запишем: $12-3=9$. Это операция вычитани**я**. Число 12 – это уменьшаемое. Число 3 – это вычитаемое. Число 9 – это разность.

1) Сложите числа 7 и 13.
2) Отнимите от числа 12 число 9.
3) Умножьте 5 на 9.
4) Прибавьте к числу 17 число 25.
5) Разделите 48 на 6.
6) Найдите сумму чисел 35 и 39.
7) Найдите произведение чисел 5 и 12.
8) Найдите частное чисел 56 и 8.
9) Найдите разность чисел 90 и 85.
10) Сложите числа 41 и 29.
11) Вычтите из числа 47 число 19.
12) Умножьте 53 на 3.
13) Разделите 120 на 4.
14) Найдите сумму чисел 52 и 18.
15) Найдите произведение чисел 21 и 4.
16) Вычтите число 28 из числа 72.

Упражнение 3. Прочитайте предложения и запишите с помощью знаков $\in$, $\notin$, N.

Образец. 10 – это натуральное число. Запишем: $10 \in N$.

1) 7 – это натуральное число;
2) –7 – это ненатуральное число;
3) 0 – это ненатуральное число;
4) 15 – это натуральное число;
5) –15 – это ненатуральное число;
6) 121 – это натуральное число;
7) –32 – это ненатуральное число;
8) 89 – это натуральное число;
9) 329 – это натуральное число.

Упражнение 4. Прочитайте чи́сла и ответьте на вопросы:

1) Это натуральное или ненатуральное число?
2) Это чётное или нечётное число? Почему?
3) Сколько в числе цифр?
4) Какие это цифры?

Образец. Число 432 – четыреста тридцать два. Это натуральное число. Это чётное число, потому что оно делится на 2 без остатка. Здесь три цифры. Это цифры четыре, три и два.

1) 539;	2) 1074;	3) –19;	4) 7;	5) 318;
6) –28;	7) 2731;	8) – 96;	9) –863;	10) 29;
11) 479;	12) 5106;	13) –6;	14) 48;	15) 365.

Тема 2. Порядок действий. Сравнение чисел

2.1. Порядок действий

Словарь к теме

де́йствие	испо́льзовать *для чего?*
арифмети́ческое де́йствие	объясня́ть - объясни́ть *что?*
нера́венство	определя́ть - определи́ть *что?*
двойно́е нера́венство	содержа́ть *что?*
нестро́гое нера́венство	соединён, соединена́, соединено́,
стро́гое нера́венство	соединены́ *чем?*[7]
отрица́тельное число́	сравне́ние
положи́тельное число́	сра́внивать - сравни́ть *что? и что*?
поря́док	существова́ть
пра́вило	бо́льше
ско́бка (в скобках[6])	ме́ньше
квадра́тные ско́бки	пото́м
кру́глые ско́бки	снача́ла
числово́е выраже́ние	после́довательно (сле́ва напра́во)
выполня́ть - вы́полнить *что?*	кото́рый, -ая, -ое, -ые
за́дан, за́дана, за́дано, за́даны	

Знаки и записи **читают:**
(…) – круглые скобки;
[…] – квадратные скобки;
{…} – фигурные скобки;

(2 + 3) → выражение 2 + 3 в скобках;
(2 + 3) → в скобках 2 + 3;
(2 + 3) → в скобках сумма чисел 2 и 3.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Действия (арифметические действия) – это арифметические операции. Мы знаем четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

Числовое выражение – это запись, которая[8] содержит числа и знаки арифметических операций. Числовое выражение может содержать скобки.

Например, $5+(9-3)$ – это числовое выражение. Числовое выражение содержит числа 5, 9 и 3, знаки «плюс» и «минус» и круглые скобки.

Определим, какие операции надо выполнять сначала, а какие – потом.

---

[6] В скобках (П.п. мн.ч.).
[7] Чем? (Тв.п.)
[8] Запись, **которая** содержит числа и знаки = запись, **она** содержит числа и знаки.

Правило 1. Если выражение содержит *только* операции сложения и вычитания, то нужно выполнять эти операции *последовательно* (*слева направо*).

Правило 2. Если выражение содержит *только* операции умножения и деления, то нужно выполнять эти операции *последовательно* (*слева направо*).

Правило 3. Если выражение содержит операции сложения, вычитания, умножения и деления, то *сначала* нужно выполнять операции умножения и деления, а *потом* – операции сложения и вычитания.

Правило 4. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют действия в скобках.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какие арифметические действия Вы знаете?
2. Что такое числовое выражение?
3. Какие знаки может содержать числовое выражение?
4. Как нужно выполнять операции, если числовое выражение содержит только операции сложения и вычитания?
5. Как нужно выполнять операции, если числовое выражение содержит только операции умножения и деления?
6. Как нужно выполнять операции, если выражение содержит операции сложения, вычитания, умножения и деления?

Задание 2. Прочитайте примеры. Назовите знаки и арифметические операции. Назовите результат вычисления. Объясните, как надо выполнять действия.

1) $19+3-5=17$; 2) $9+3\cdot 5=24$; 3) $13+9:3-6\cdot 2=4$;
4) $18:3\cdot 5=30$; 5) $17-20:5=13$; 6) $8\cdot 6:12+14\cdot 2=32$;
7) $(18-3):5=3$; 8) $(18:3+4)\cdot 2=20$; 9) $30+(15-3):2=36$.

2.2. Сравнение чисел. Положительные и отрицательные числа

Задание 3. Прочитайте констру́кции. Определи́те падежи́ числи́тельных.

Что? (**ско́лько?**) меньше (больше), чем **что**? (**ско́лько?**)
Что? (**ско́лько?**) меньше (больше) **чего**? (**сколькú?**)
Что? (**ско́лько?**) меньше (больше) или равно **чему**? (**сколькú?**)

Знаки и записи **читают:**

« $\neq$ » – не равно;

« $<$ » – меньше;

« > » – больше;
« ≤ » – меньше или равно;
« ≥ » – больше или равно;
$a < b$ – а меньше, чем бэ (или а меньше бэ);
$x > 7$ – икс больше (*чего?*) сем**и** (икс меньше, **чем** (*что?*) **семь**);
$y \leq 1$ – игрек меньше или равен (*чему?*) одном**у**;
$a < b < c$ – → бэ больше а, но меньше цэ;
↘ бэ больше, чем а, но меньше, чем цэ.

Задание 4. Прочитайте числительные.

Число	И. п. что? сколько?	Р. п. чего? скольки?	Число	И. п. что? сколько?	Р. п. чего? скольки?
0	нуль/ноль	нул**я́**	30	тридцать	тридцат**и́**
1	один/единица	одн**ого́**/едини́ц**ы**	40	сорок	сорок**а́**
2	два	дв**ух**	50	пятьдесят	пят**и́**десят**и**
3	три	тр**ёх**	60	шестьдесят	шест**и́**десят**и**
4	четыре	четыр**ёх**	70	семьдесят	сем**и́**десят**и**
5	пять	пят**и́**	80	восемьдесят	вос**ьми́**десят**и**
6	шесть	шест**и́**	90	девяносто	девяно́ст**а**
7	семь	сем**и́**	100	сто	ст**а**
8	восемь	вос**ьми́**	200	двести	дв**ух**со́т
9	девять	девят**и́**	300	триста	тр**ёх**со́т
10	десять	десят**и́**	400	четыреста	четыр**ёх**со́т
11	одиннадцать	оди́ннадцат**и**	500	пятьсот	пят**и**со́т
12	двенадцать	двена́дцат**и**	600	шестьсот	шест**и**со́т
13	тринадцать	трина́дцат**и**	700	семьсот	сем**и**со́т
14	четырнадцать	четы́рнадцат**и**	800	восемьсот	вос**ьми**со́т
15	пятнадцать	пятна́дцат**и**	900	девятьсот	девят**и**со́т
20	двадцать	двадцат**и́**	1000	одна тысяча	одн**о́й** ты́сяч**и**
21	двадцать один	двадцат**и́** одн**ого́**	2000	две тысячи	дв**ух** ты́сяч
22	двадцать два	двадцат**и́** дв**ух**	5000	пять тысяч	пят**и́** ты́сяч
23	двадцать три	двадцат**и́** тр**ёх**	1000000	один миллион	одн**ого́** миллио́н**а**
25	двадцать пять	двадцат**и́** пят**и́**	2000000	два миллиона	дв**ух** миллио́н**ов**

Задание 5. Прочитайте неравенства, используйте слова в И. п. и Р. п. из задания 4.

Образец. 4 < 6. Четыре меньше, чем шесть. Четыре меньше шест**и**.

1) $2 < 5$; 2) $5 > 3$; 3) $13 < 22$; 4) $9 > 6$;
5) $52 > 25$; 6) $24 < 31$; 7) $42 < 65$; 8) $13 \neq 17$;
9) $x \leq 0$; 10) $y \geq 8$; 11) $p \leq 1$; 12) $a \geq 4$;
13) $x \leq y$; 14) $b \geq p - 2$; 15) $b \leq c + 2$; 16) $x + y < 0$;
17) $y \geq x - 2$; 18) $n \leq m + 1$; 19) $h > k - 5$; 20) $y < x$.

Задание 6. А) Прочитайте текст.

Знаки =, ≠, <, >, ≤, ≥ – это знаки сравнения. Эти знаки используют для сравнения чисел между собой. Например, $5 \neq 7$, или $5 < 7$.

Если два числовых выражения соединены знаками ≠, <, >, ≤, ≥, то говорят, что задано **числовое неравенство**.

Неравенства бывают строгие и нестрогие.

Если два числовых выражения соединены знаками[9] < или >, то это **строгое неравенство**.

Если два числовых выражения соединены знаками ≤ или ≥, то это **нестрогое неравенство**.

Если $a < b$ и $b < c$, то можно записать **двойное неравенство**:

$$a < b < c.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какие знаки сравнения Вы знаете?
2. Для чего используют знаки сравнения?
3. Что такое числовое неравенство?
4. Какие бывают неравенства?
5. Что такое строгое неравенство? Приведите пример.
6. Что такое нестрогое неравенство? Приведите пример.
7. Запишите двойное неравенство.

В) Сравните числа и выражения.

1) 5 и 12; 2) 13 и 7; 3) 7 и 56;
4) 5 + 3 и 9; 5) $2 \cdot 3$ и $5+1$; 6) $17-6\cdot 3$ и 0.

Г) Прочитайте двойные неравенства по образцу.

Образец. $4 < x < 6$. **Читают:** икс больше, чем четыре, но меньше, чем шесть. Икс больше четыр**ёх**, но меньше шест**и**.

1) $-1 < z < 3$; 2) $8 \le b < 19$; 3) $-3 < c \le 21$; 4) $18 \le d \le 32$;
5) $2 < y < 5$; 6) $2 \le x < 5$; 7) $17 < a < 25$; 8) $0 \le x \le y$.

Задание 7. Прочитайте предложения в таблице. Обратите внимание на вопросительные слова и предлоги.

Вопрос	Результат	Ответ
На сколько число a больше, чем b?	$a - b = c$	Число a больше, чем b **на** c
На сколько число c меньше, чем d?	$d - c = a$	Число c меньше, чем d **на** a
Во сколько раз число a больше, чем b?	$a : b = c$	Число a больше, чем b **в** c **раз**
Во сколько раз число c меньше, чем d?	$d : c = a$	Число c меньше, чем d **в** a **раз**

[9] Знак (И.п. ед.ч.), зна́ки (И.п. мн.ч.), зна́ками (Тв.п. мн.ч.).

Задание 8. Ответьте на вопросы.

1. На сколько число 40 больше, чем 4?
2. На сколько число 5 меньше, чем 25?
3. Во сколько раз 40 больше, чем 4?
4. Во сколько раз 5 меньше, чем 25?
5. На сколько число 16 больше, чем 4?
6. Во сколько раз 4 меньше, чем 16?
7. Во сколько раз 25 больше, чем 5?

Задание 9. А) Прочитайте текст.

Любое число можно сравнить с числом 0. Например, $a > 0$ или $a < 0$.

Существуют положительные и отрицательные числа. Положительное число – это число, которое больше, чем нуль[10]. Отрицательное число – это число, которое меньше, чем нуль. Число 0 – не положительное и не отрицательное число. Все натуральные числа – положительные числа.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. С каким числом сравнивают числа?
2. Что такое положительное число? Приведите пример.
3. Что такое отрицательное число? Приведите пример.
4. Число нуль – это положительное или отрицательное число?
5. Натуральные числа – это положительные или отрицательные числа?

Задания и упражнения

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

1. Если из суммы вычесть первое слагаемое, то получится ________________ ______________________.
2. Если к вычитаемому прибавить разность, то получится ________________________ .
3. Если произведение разделить на первый множитель, то получится ____________________ _______________________ .
4. Если к первому слагаемому прибавить второе слагаемое, то получится _______________ .

Упражнение 1. Сравните числа. На сколько первое число больше (меньше), чем второе? Объясните почему?

Образец. 18 и 6. 18 больше, чем 6 на 12, потому что 18 – 6 = 12.

1) 27 и 3; 2) 30 и 5; 3) 12 и 4; 4) 15 и 45;
5) 12 и 48; 6) 18 и 54; 7) 56 и 28; 8) 56 и 7.

Упражнение 2. Сравните числа. Во сколько раз первое число больше (меньше), чем второе? Объясните почему?

Образец. 6 и 18. 6 меньше, чем 18 в 3 раза, потому что 18 : 6 = 3.

1) 27 и 3; 2) 30 и 5; 3) 12 и 4; 4) 15 и 45;
5) 12 и 48; 6) 18 и 54; 7) 56 и 28; 8) 56 и 7.

[10] Положительное число – это число, **которое** больше, чем нуль = Положительное число – это число, **оно** больше, чем нуль.

Тема 3. Делимость чисел

3.1. Делитель и кратное

Словарь к теме

бесконе́чное мно́жество коне́чное мно́жество кра́тное *чему?* просто́е число́ составно́е число́ де́лится *на что?* на себя́ зна́чить	запи́сывать - записа́ть в виде *чего?/* как *что?* наибо́льший о́бщий дели́тель наиме́ньшее о́бщее кра́тное разложе́ние *чего? на что?* раскла́дывать - разложи́ть *что? на что?* пусть сле́довательно

Запись **читают:**

$a, b \in N$ – а **и** бэ принадлеж**ат** эн.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Если $a, b \in N$ и частное $a : b \in N$, то a делится на b. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \notin N,$ то a не делится на b.

Пусть a делится на b. Тогда a – это **кратное числу *b***, b – это **делитель числа *a***.

Пример 1. Запишите все делители числа 12.

Число 12 делится на числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Запишем все делители числа 12 как множество:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Это множество содержит 6 элементов. Это *конечное множество*.

Пример 2. Запишите все числа, кратные числу 12.

Число 12 делится на 12, число 24 делится на 12, число 36 делится на 12, … . Следовательно, все числа, которые делятся на 12, можно записать как множество:

$$\{12n \mid n \in N\}.$$

Это множество содержит элементы $12, 24, 36, \dots, 12n, \dots$. Это *бесконечное множество*.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \in N$, то a делится или не делится на b?
2. Если $a, b \in N$ и частное $a : b \notin N,$ то a делится или не делится на b?
3. Если a делится на b, то что такое a?
4. Если a делится на b, то что такое b?
5. Приведите пример конечного множества.
6. Приведите пример бесконечного множества.
7. Запишите все делители числа 24.
8. Запишите все числа, кратные числу 24.
9. Сколько элементов содержит множество всех делителей числа 24?
10. Запишите чётные делители числа 24.

3.2. Простые и составные числа

Записи **читают:**
НОД($a;b$) – **н**аибóльший **о́**бщий дели́тель чи́сел a и b;
НОК($a;b$) – **н**аимéньшее **о́**бщее **кр**а́тное чи́сел a и b.

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
раскла́дывать - разложи́ть	раскла́дывать - разложи́ть что? на что?	разложи́(те)	разложéние

Пример. Разложите число 12 на простые множители.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Простое число – это число, которое делится только на 1 и на себя. Например, число 3 делится на 1 и на себя (на 3). Следовательно, 3 – простое число.

Составное число – это число, которое делится на 1, на себя и на другие числа. Например, число 6 делится на 1, на себя (на 6) и на числа 2 и 3 (на другие числа). Следовательно, 6 – составное число.

Число 1 – не простое и не составное число.

Разложить число на простые множители – значит записать его как произведение простых множителей.

Разложение числа на простые множители – это запись числа в виде произведения простых множителей.

Например, число 12 можно записать в виде произведения простых множителей:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Следовательно, запись $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ – это разложение числа 12 на простые множители.

Б) Прочитайте задания и ответы к ним.

Задания	**Ответы**
1. Запишите все делители числа 9.	$A = \{1, 3, 9\}$
2. Запишите все числа, кратные числу 9.	$B = \{9n \mid n \in N\}$
3. Разложите число 9 на простые множители.	$9 = 3 \cdot 3$

Задание 3. А) Прочитайте текст.

Пусть числа a и b делятся на число c, где c – наибольший делитель чисел a и b. Тогда число c – это *наибольший общий делитель* чисел a и b.

Наибольший **о**бщий **д**елитель чисел a и b обозначают так: НОД($a;b$).

Пусть число c делится на числа a и b и число c – наименьшее кратное чисел a и b. Тогда число c – это *наименьшее общее кратное чисел* a и b.

Наименьшее **о**бщее **к**ратное чисел a и b обозначают так: НОК(a;b).

Б) Прочитайте примеры и их решения.

Пример	Решение
1. Найдите НОД(24; 30).	1) 24 = **2** · 2 · 2 · **3**; 2) 30 = **2** · **3** · 5; 3) НОД(24; 30) = **2** · **3** = 6.
2. Найдите НОК(24; 30).	1) 24 = **2** · 2 · 2 · **3**; 2) 30 = **2** · **3** · 5; 3) НОК(24; 30) = **2** · **3** · 2 · 2 · 5 = 120.

Задание 4. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое простое число? Приведите пример.
2. Что такое составное число? Приведите пример.
3. Число 1 – это простое или составное число?
4. Что значит разложить число на простые множители?
5. Как обозначают наибольший общий делитель чисел a и b?
6. Как обозначают наименьшее общее кратное чисел a и b?

Задания и упражнения

Упражнение 1. Разложите на простые множители числа 18, 54, 60, 70, 84, 95, 132, 150.

Упражнение 2. Найдите наибольший общий делитель чисел.

1) 6 и 9; 2) 16 и 12; 3) 10 и 15; 4) 48 и 30;
5) 40 и 48; 6) 34 и 28; 7) 35 и 56; 8) 30 и 45.

Упражнение 3. Найдите наименьшее общее кратное чисел.

1) 6 и 9; 2) 16 и 12; 3) 10 и 15; 4) 48 и 30;
5) 40 и 48; 6) 34 и 28; 7) 35 и 56; 8) 30 и 45.

Задание 1. Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

Число 60 – это составное число. Разложим число 60 на простые множители: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Число 60 делится на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 10, на 12, на 15, на 20, на 30, на 60. Число 60 имеет 12 делителей.

1. Число 60 – это простое или составное число?
2. Сколько всего простых множителей содержит разложение числа 60 на простые множители?
3. Сколько разных простых множителей содержит разложение числа 60 на простые множители?
4. Сколько разных чётных простых множителей содержит разложение числа 60 на простые множители?
5. Сколько разных нечётных простых множителей содержит разложение числа 60 на простые множители?
6. Какое чётное число содержит разложение числа 60 на простые множители?
7. Сколько делителей имеет число 60?
8. Сколько чётных и нечётных делителей имеет число 60?

Тема 4. Дроби

4.1. Обыкновенные дроби

Словарь к теме

величина́	це́лая часть
дополни́тельный мно́житель	выполня́ть - вы́полнить *что?*
непра́вильная дробь	дава́ть - дать
несократи́мая дробь	дан, дана́, дано́, даны́
обыкнове́нная дробь (=дробь)	находи́ть - найти́
пра́вильная дробь	оставля́ть - оста́вить
сме́шанная дробь	получа́ть - получи́ть
сократи́мая дробь	приведе́ние *чего? к чему?*
сво́йство	приводи́ть - привести́ *что? к чему?*
знамена́тель дро́би	рассма́тривать - рассмотре́ть
числи́тель дро́би	сокраще́ние
дро́бная черта́	сокраща́ть - сократи́ть *что? на что?*
дро́бная часть	основно́й

Записи **читают:**

$a:b$

$\dfrac{a}{b}$ – а разделить на бэ;

$a, b \in N$ – а **и** бэ принадлеж**ат** эн;

$\dfrac{a \cdot m}{b \cdot m}$ – *дробь, в числителе*: а умножить на эм, *в знаменателе*: бэ умножить на эм;

$\dfrac{a:n}{b:n}$ – *дробь, в числителе*: а разделить на эн, *в знаменателе*: бэ разделить на эн.

Задание 1. Прочитайте текст.

Пусть $a, b \in N$. Частное чисел a и b можно записать как $a:b$ или $\dfrac{a}{b}$. Число $\dfrac{a}{b}$ – это **обыкновенная дробь**[11], где a – это **числитель дроби**, b – это **знаменатель дроби**.

Запись дроби $\dfrac{a}{b}$ содержит число a (числитель дроби), число b (знаменатель дроби) и дробную черту (черту между числами a и b).

[11] Обыкновенная дробь = дробь;

Рассмотрим дробь $\frac{a}{b}$.

Случай 1	Случай 2
Если $a = 1; 21; 31; \ldots; 91; 101; 121; \ldots,$ $b \neq 3; 23; 33; \ldots; 93; 103; 123; \ldots,$ то дроби **читают:** $\frac{1}{2}$ – одн**а́** втор**а́я**[12]; $\frac{1}{4}$ – одн**а́** четвёрт**ая**[13].	Если $a = 1; 21; 31; \ldots; 91; 101; 121; \ldots,$ $b = 3; 23; 33; \ldots; 93; 103; 123; \ldots,$ то дроби **читают:** $\frac{1}{3}$ – одн**а́** тре́ть**я**[14]; $\frac{41}{33}$ – со́рок одн**а́** три́дцать тре́ть**я**.

Запомните!

$\frac{1}{1}$ – одн**а́** пе́рв**ая**; $\frac{1}{2}$ – одн**а́** втор**а́я**;
$\frac{1}{7}$ – одн**а́** сед**ь**м**а́я**; $\frac{1}{8}$ – одн**а́** во**сь**м**а́я**;
$\frac{1}{40}$ – одн**а́** сорокова́**я**; $\frac{1}{100}$ – одн**а́** со́т**ая**;
$\frac{1}{3}$ – одн**а́** тре́ть**я**

Случай 3	Случай 4
Если $a \neq 1; 21; 31; \ldots; 91; 101; 121; \ldots,$ $b \neq 3; 23; 33; \ldots; 93; 103; 123; \ldots,$ то дроби **читают:** $\frac{2}{5}$ – дв**е** пя́т**ых**; $\frac{5}{7}$ – пять седьм**ы́х**.	Если $a \neq 1; 21; 31; \ldots; 91; 101; 121; \ldots,$ $b = 3; 23; 33; \ldots; 93; 103; 123; \ldots,$ то дроби **читают:** $\frac{2}{3}$ – дв**е** тре́ть**их**; $\frac{5}{103}$ – пять сто тре́ть**их**.

Запомните!

$\frac{7}{2}$ – семь втор**ы́х**; $\frac{3}{8}$ – три во**сь**м**ы́х**; $\frac{2}{7}$ – две сед**ь**м**ы́х**; $\frac{2}{3}$ – дв**е** тре́ть**их**

[12] Одна вторая = полови́на.
[13] Одна четвёртая = че́тверть.
[14] Одна третья = треть.

Б) Ответьте на вопросы.
1. Что такое обыкновенная дробь?
2. Что такое числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$?
3. Какой дроби равна четверть?
4. Какой дроби равна половина?
5. Какой дроби равна треть?

Задание 2. Прочитайте дроби.

Дроби	И. п. что? сколько? **-ая, -я, -ых, -их**	Д. п. чему? скольки? **-ой, -ей, -ым, -им**
$\frac{1}{2}$	одн**а́** втор**а́я**	одн**о́й** втор**о́й**
$\frac{1}{3}$	одн**а́** тре́ть**я**	одн**о́й** тре́ть**ей**
$\frac{1}{4}$	одн**а́** четвёрт**ая**	одн**о́й** четвёрт**ой**
$\frac{1}{7}$	одн**а́** седьм**а́я**	одн**о́й** седьм**о́й**
$\frac{1}{8}$	одн**а́** восьм**а́я**	одн**о́й** восьм**о́й**
$\frac{1}{9}$	одн**а́** девя́т**ая**	одн**о́й** девя́т**ой**
$\frac{2}{3}$	две тре́ть**их**	дв**ум** тре́ть**им**
$\frac{3}{4}$	три четвёрт**ых**	тр**ём** четвёрт**ым**
$\frac{5}{2}$	пять втор**ы́х**	пят**и** втор**ы́м**
$\frac{4}{7}$	четы́ре седьм**ы́х**	четыр**ём** седьм**ы́м**
$\frac{5}{21}$	пять два́дцать пе́рв**ых**	пят**и́** два́дцать пе́рв**ым**
$\frac{59}{70}$	пятьдеся́т де́вять сем**и**деся́т**ых**	пят**и́**десят**и** девят**и́** сем**и**деся́т**ым**
$\frac{1}{100}$	одн**а́** со́т**ая**	одн**о́й** со́т**ой**
$\frac{17}{100}$	семна́дцать со́т**ых**	семна́дцат**и** со́т**ым**
$\frac{3}{1000}$	три ты́сячн**ых**	тр**ём** ты́сячн**ым**
$\frac{7}{10000}$	семь десят**и**ты́сячн**ых**	сем**и** десят**и**ты́сячн**ым**
$\frac{21}{1000000}$	двадцать одна миллио́нн**ая**	двадцат**и** одн**ой** миллио́нн**ой**

Задание 3. А) Выполните задание по образцу.

Образец. $\frac{1}{9}$ – одна девятая. Это обыкновенная дробь. Один – это числитель дроб**и**, девять – это знаменатель дроб**и**.

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{4}{5}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{7}{9}$; 8) $\frac{8}{10}$; 9) $\frac{21}{23}$; 10) $\frac{31}{35}$.

Б) Прочитайте примеры.

Образец. $\frac{1}{21}+\frac{7}{21}=\frac{8}{21}$ – одн**а** двадцать перв**ая** плюс семь двадцать перв**ых** равно во**сьми** двадцать перв**ым**.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{14}{15}$; 4) $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$;

5) $\frac{2}{7}-\frac{1}{7}=\frac{1}{7}$; 6) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$; 7) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{13}{15}$; 8) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$;

9) $x=\frac{2}{13}$; 10) $y=\frac{19}{100}$; 11) $m=\frac{31}{45}$; 12) $n=\frac{93}{133}$.

4.2. Правильные и неправильные дроби. Смешанные дроби

Задание 4. Прочитайте текст.

Рассмотрим обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$. Если $a<b$, то дробь $\frac{a}{b}$ – **правильная дробь**. Если $a\geq b$, то дробь $\frac{a}{b}$ – **неправильная дробь**. Неправильную дробь можно записать как **смешанную дробь**, т.е. выделить целую часть и дробную часть.

Основное свойство дроби. Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить (или разделить) на одно и то же[15] натуральное число.

Запишем основное свойство дроби в виде формулы:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a:n}{b:n},$$

где $m, n\in N$.

Обратите внимание!

$\frac{1}{2}$ – это пра́вильная дробь; $\frac{5}{7}$ – это пра́вильная дробь;

$\frac{2}{1}$ – это непра́вильная дробь; $\frac{2}{2}$ – это непра́вильная дробь.

[15] Одно́ и то же = одина́ковое.

Смешанные дроби **читают:**

$1\frac{1}{2}$ – однá цéл**ая**, однá втор**áя** (или одна целая **и** одна вторая);

$1\frac{2}{3}$ – однá цéл**ая**, две трéть**их**;

$2\frac{3}{5}$ – две цéл**ых**, три пя́т**ых**.

Задание 5. Прочитайте пример.

Пример. Запишите неправильную дробь $\frac{13}{2}$ как смешанную.

Неправильную дробь $\frac{13}{2}$ можно записать в виде $6\frac{1}{2}$. Дробь $6\frac{1}{2}$ – это смешанная дробь. Она имеет две части: целую часть и дробную часть. Число 6 – это целая часть дроби, дробь $\frac{1}{2}$ – это дробная часть дроби.

Задание 6. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какая дробь $\frac{a}{b}$ – правильная? Приведите пример.
2. Какая дробь $\frac{a}{b}$ – неправильная? Приведите пример.
3. Какую дробь можно записать как смешанную? Приведите пример.
4. Сколько частей имеет смешанная дробь?
5. Какие части имеет смешанная дробь?
6. Приведите пример смешанной дроби. Расскажите, какие части она имеет.
7. Запишите основное свойство дроби.

4.3. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
сокращáть - сократи́ть	сокращáть - сократи́ть что? на что?	сократи́(те)	сокращéние
приводи́ть - привести́	приводи́ть - привести́ что? к чему?	приведи́(те)	приведéние

Пример. Сократите дробь $\frac{15}{40}$.

Пример. Приведите дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю.

Задание 7. А) Прочитайте текст.

Сокращение дроби – это *деление* её числителя и знаменателя на *одно и то же число*.

Сократить дробь – значит *разделить* её числитель и знаменатель на *одно и то же число*.

Если дробь сократить, то величина дроби не изменится.

Пример. Рассмотрим дробь $\frac{15}{40}$. Числитель и знаменатель дроби имеют наибольший общий делитель 5. Следовательно, дробь $\frac{15}{40}$ – это сократимая дробь. Разделим числитель и знаменатель дроби на 5. Получим

$$\frac{15}{40} = \frac{15:5}{40:5} = \frac{3}{8}.$$

Мы сократили дробь $\frac{15}{40}$ на число 5. Дробь $\frac{3}{8}$ – это несократимая дробь.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое сокращение дроби?
2. Величина дроби изменится, если дробь сократить?
3. Дробь $\frac{8}{40}$ – это сократимая или несократимая дробь? Почему?
4. На какие числа можно сократить дробь $\frac{8}{40}$?
5. Запишите дробь $\frac{8}{40}$ в виде несократимой дроби.
6. Дробь $\frac{2}{39}$ – это сократимая или несократимая дробь? Почему?

Задание 8. А) Прочитайте конструкцию и пример её использования.

Чтобы *что* (*с*)*делать?* **… , надо/нужно** *что* (*с*)*делать?* **… .**

Чтобы сложить две дроби *с разными знаменателями*, **надо** привести их *к наименьшему общему знаменателю*.

Б) Приведите примеры использования конструкции «**Чтобы** *что* (*с*)*делать?* **… , надо/нужно** *что* (*с*)*делать?* **…** ».

Задание 9. А) Прочитайте пример и его решение.

Пример. Приведите дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю.

Решение. Чтобы привести дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю, надо сначала найти НОК(2;3). НОК(2;3) = 6.

Тогда наименьший общий знаменатель дробей равен числу 6. Потом надо найти дополнительные множители дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Чтобы найти дополнительный множитель к дроби, надо НОК(2;3) разделить на знаменатель этой дроби. Число 3 – это дополнительный множитель дроби $\frac{1}{2}$, потому что $6:2=3$. Число 2 – это дополнительный множитель дроби $\frac{1}{3}$, потому что $6:3=2$. Дробь $\frac{1}{2}$ запишем так: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}$. Дробь $\frac{1}{3}$ запишем так: $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$. Мы привели[16] дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю и получили дроби $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что надо сделать сначала, чтобы привести дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ к наименьшему общему знаменателю?
2. Чему равно НОК(2;3)?
3. Чему равен наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?
4. Чему равен дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{2}$?
5. Почему дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{2}$ равен 3?
6. Чему равен дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{3}$?
7. Почему дополнительный множитель к дроби $\frac{1}{3}$ равен 2?
8. Запишите дроби, которые получили.

---

[16] Привести́ (прошедшее время - привёл, привела́, привело́, привели́).

4.4. Сравнение дробей

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
сра́внивать - сравни́ть	сра́внивать - сравни́ть что? и что?	сравни́(те)	сравне́ние

Пример. Сравните дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Задание 10. Прочитайте текст.

Рассмотрим три случая сравнения дробей.

Случай первый. Пусть дроби имеют одинаковые знаменатели $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$.

Если $a < c$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$. Если $a > c$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$.

Случай второй. Пусть дроби имеют одинаковые числители $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$.

Если $b < c$, то $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$. Если $b > c$, то $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$.

Случай третий. Пусть дроби имеют разные числители и разные знаменатели $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Сначала дроби надо привести к наименьшему общему знаменателю, потом надо сравнить их числители (случай первый).

Задание 11. Выполните задания по образцу. Сравните дроби. Объясните результат.

Образец. Сравните дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$. **Запишем:** $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$. **Объясняем:** Одна вторая меньше, чем три вторых, потому что дроби имеют одинаковые знаменатели, а числитель первой дроби меньше, чем числитель второй дроби.

1) $\frac{1}{8}$ и $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{25}{7}$ и $\frac{20}{7}$; 3) $\frac{25}{19}$ и $\frac{25}{21}$;

4) $\frac{18}{103}$ и $\frac{18}{101}$; 5) $\frac{5}{7}$ и $\frac{15}{21}$; 6) $\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{15}$;

7) $\frac{6}{11}$ и $\frac{8}{11}$; 8) $\frac{11}{21}$ и $\frac{11}{19}$; 9) $\frac{3}{12}$ и $\frac{1}{4}$;

10) $\frac{5}{81}$ и $\frac{1}{9}$; 11) $\frac{2}{9}$ и $\frac{4}{9}$; 12) $\frac{5}{13}$ и $\frac{5}{17}$.

4.5. Действия с обыкновенными и смешанными дробями

Задание 12. А) Изучите действия с обыкновенными дробями.

Операции	Правила	Примеры
1. Сложение (вычитание) обыкновенных дробей с *одинаковыми знаменателями*.	Чтобы сложить (вычесть) дроби *с одинаковыми знаменателями*, надо сложить (вычесть) числители дробей, а знаменатель оставить *общий*.	$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1$; $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
2. Сложение (вычитание) обыкновенных дробей с *разными знаменателями*.	*Сначала* надо привести дроби к наименьшему общему знаменателю, *потом* их сложить (вычесть) как дроби с одинаковыми знаменателями.	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$
3. Умножение обыкновенных дробей.	Чтобы умножить две обыкновенные дроби, надо числитель *первой дроби* умножить на числитель *второй дроби*, и знаменатель *первой дроби* умножить на знаменатель *второй дроби*.	$\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{6}=\frac{5\cdot 14}{7\cdot 6}=\frac{5}{3}$
4. Деление обыкновенных дробей.	Чтобы разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$, надо числитель *первой дроби* умножить на знаменатель *второй дроби*, и знаменатель *первой дроби* умножить на числитель *второй дроби*.	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Б) Изучите действия со смешанными дробями. Приведите примеры.

Операции	**Правила**	**Примеры**
1. Сложение (вычитание) смешанных дробей.	*Сначала* надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а *потом* выполнить операцию сложения (вычитания).	
2. Умножение смешанных дробей.	*Сначала* надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а *потом* выполнить операцию умножения.	
3. Деление смешанных дробей.	*Сначала* надо записать смешанные дроби как неправильные обыкновенные дроби, а *потом* выполнить операцию деления.	

Задания и упражнения

Задание 1. Прочитайте дроби.

1) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{10}; \frac{21}{20}; \frac{31}{30};$

2) $\frac{1}{3}; \frac{1}{23}; \frac{1}{33}; \frac{31}{3}; \frac{31}{23}; \frac{31}{33}; \frac{21}{3}; \frac{21}{23}; \frac{21}{33}; \frac{31}{103};$

3) $\frac{13}{2}; \frac{14}{2}; \frac{15}{2}; \frac{17}{2}; \frac{19}{2}; \frac{25}{2}; \frac{33}{2}; \frac{35}{2}; \frac{49}{2}; \frac{53}{2};$

4) $\frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{4}{9}; \frac{5}{11}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{3}{8}; \frac{4}{10}; \frac{5}{12}; \frac{11}{13}.$

Задание 2. Прочитайте дроби и запишите математическими символами:

1) тридцать одна тридцать третья;
2) двадцать три тридцать седьмых;
3) сто две пятнадцатых;
4) семьдесят пять сто первых;
5) двести сорок семь шестьсот вторых;
6) двенадцать девятнадцатых;
7) девятнадцать двадцатых;
8) одна целая, две третьих;

9) двести одна целая, три четвёртых;

10) триста три целых, пятнадцать шестьдесят вторых;

11) двенадцать целых, семнадцать двадцать седьмых;

12) двадцать восемь целых, семь восьмых;

13) семьсот одна целая, одна восемьдесят восьмая;

14) триста двадцать девять двенадцатых;

15) двести шестьдесят семь вторых;

16) двести шестьдесят целых, две седьмых;

17) пятьсот две третьих;

18) пятьсот целых, две третьих;

19) одна вторая больше, чем одна третья;

20) дробь сорок две вторых равна двадцати одному;

21) дроби две целых одна вторая и пять вторых равны.

Упражнение 1. Прочитайте дроби. Назовите числитель и знаменатель дроби. Это правильная или неправильная дробь? Неправильную дробь запишите как смешанную.

Образец. $\frac{21}{8}$. Двадцать одн**а** восьм**ая**. Число 21 – это числитель дроб**и**. Число 8 – это знаменатель дроб**и**. Это неправильная дробь, потому что её числитель больше, чем знаменатель дроби. $\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$. Дробь $2\frac{5}{8}$ – это смешанная дробь.

1) $\frac{9}{4}$; 2) $\frac{5}{17}$; 3) $\frac{37}{73}$; 4) $\frac{73}{36}$; 5) $\frac{67}{67}$; 6) $\frac{429}{71}$; 7) $\frac{21}{53}$; 8) $\frac{22}{13}$; 9) $\frac{19}{14}$; 10) $\frac{38}{42}$.

Упражнение 2. Прочитайте смешанные дроби. Назовите целую и дробную части дробей.

1) $1\frac{2}{5}$; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $2\frac{1}{2}$; 4) $3\frac{4}{9}$; 5) $5\frac{1}{3}$;

6) $9\frac{3}{8}$; 7) $36\frac{2}{3}$; 8) $21\frac{4}{15}$; 9) $47\frac{13}{23}$; 10) $68\frac{1}{28}$.

Упражнение 3. Прочитайте дроби по образцу.

Образец. $\frac{3\cdot 5+6}{5x}$ – *дробь, в числителе*: три умножить на пять плюс шесть, *в знаменателе*: пять икс.

1) $\frac{2+3x}{1-5x}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$; 3) $\frac{2\cdot(3x+4)}{2x-1}$; 4) $\frac{11\cdot 5+2x}{17x}$;

5) $\frac{2x+y}{x-3y}$; 6) $\frac{c+2}{2-3c}$; 7) $\frac{5d-1}{2+7d}$; 8) $\frac{x+3z}{10z-5x}$;

9) $\frac{x-4}{2+x}$; 10) $\frac{3x-7}{1-5x}$; 11) $\frac{15-5\cdot 7}{7x}$; 12) $\frac{64:8+12x}{2+3x}$.

Тема 5. Десятичные дроби

5.1. Десятичные дроби

Словарь к теме

десяти́чная дробь	запята́я
бесконе́чная периоди́ческая десяти́чная дробь	по́сле *чего?* запято́й
коне́чная десяти́чная дробь	коли́чество
ста́вить - поста́вить *что?* (запяту́ю)	пери́од
переноси́ть - перенести́ *что?* (запяту́ю)	сто́лбик
разделя́ть[17] - раздели́ть *чем?* (запято́й)	отсчи́тывать - отсчита́ть
обраще́ние *чего? во что?*	счита́ть - посчита́ть
обраща́ть - обрати́ть *что? во что?*	ра́вный

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим дроби со знаменателями[18] 10, 100, 1000, …:

$$\frac{1}{10}, \frac{9}{100}, \frac{23}{1000}, \dots .$$

Эти дроби можно записать в виде десятичных дробей. Например, $\frac{21}{10} = 2{,}1$ (дробь двадцать одна десят**ая** равн**а** числу дв**е** цел**ых**, одн**а** десят**ая**).

Десятичная дробь имеет две части: целую часть и дробную часть. Целая и дробная части десятичной дроби разделяются запятой. Рассмотрим десятичную дробь 2,1. Число 2 – это целая часть дроби, число 0,1 (нуль цел**ых**, одн**а** деся́т**ая**) – это дробная часть дроби.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Что такое десятичная дробь?
2. Как можно записать дроби со знаменателями 10,100,1000 и т.д.?
3. Сколько частей имеет десятичная дробь?
4. Какие части имеет десятичная дробь?
5. Чем разделяются целая и дробная части десятичной дроби?

Запомните! Дробную часть десятичной дроби читают также как дробную часть смешанной дроби.

Задание 2. Прочитайте десятичные дроби:

0,1 – нуль це́л**ых**, одн**а** десят**ая**;

1,1 – одна це́л**ая**, одн**а** десят**ая**;

5,7 – пять це́л**ых**, семь десят**ых**;

12,21 – двенадцать це́л**ых**, двадцать одн**а** сот**ая**;

21,22 – двадцать одна це́л**ая**, двадцать дв**е** сот**ых**;

31,102 – тридцать одн**а** це́л**ая**, сто дв**е** тысячн**ых**;

---

[17] Разделя́ть = отделя́ть.

[18] Знаменатель – **со** знаменател**ями** (Тв.п. мн.ч. с чем?).

53,201 – пятьдесят три це́л**ых**, двести одн**а** тысячн**ая**;

3,0002 – три це́л**ых**, дв**е** десят**и**тысячн**ых** (три цел**ых**, три нул**я**, два);

141,1235 – сто сорок одн**а** це́л**ая**, тысяча двести тридцать пять десятитысячн**ых**;

28,00051 – двадцать восемь це́л**ых**, пятьдесят одн**а** стотысячн**ая** (двадцать восемь це́л**ых**, три нуля, пятьдесят один);

0,000001 – нуль це́л**ых**, одн**а** миллионн**ая** (нуль цел**ых**, пять нул**ей**, один);

1,235563 – одна це́л**ая**, двести тридцать пять тысяч пятьсот шестьдесят три миллионн**ых** (одна це́л**ая**, двадцать три, пятьдесят пять, шестьдесят три).

Задание 3. Прочитайте десятичные дроби, назовите целую и дробную части.

Образец. 1,55 – одн**а** цел**ая**, пятьдесят пять сот**ых**. Число 1 (один) – это целая часть дроби. Число 0,55 (нуль цел**ых**, пятьдесят пять сот**ых)** – это дробная часть дроби.

1) 3,1;	2) 9,3;	3) 0,9;
4) 7,21;	5) 13,46;	6) 80,108;
7) 6,042;	8) 73, 2304;	9) 23,23025.

Задание 4. А) Прочитайте текст, примеры и решения.

Десятичные дроби можно складывать, вычитать, умножать и делить. Десятичные дроби можно сравнивать.

При сложении (вычитании) десятичных дробей действуют по правилу: складывают (вычитают) *справа налево* дробные части (тысячные, сотые, десятые) и целые части дробей.

Пример 1. Найдите значение выражения 32,45 + 4,274.

Решение. Запишем дроби столбиком так, чтобы запятая второй дроби находилась под запятой первой дроби. Запишем равное количество цифр после запятой у каждой дроби. Складываем сначала тысячные, потом сотые, затем десятые и целые части десятичных дробей. Получим

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 32{,}450 \\ 4{,}274 \end{array} \\ \hline 36{,}724 \end{array}$$

Следовательно, 32,45 + 4,274 = 36,724.

Чтобы умножить десятичную дробь на десятичную дробь, надо:

1) умножить эти дроби, как натуральные числа;

2) посчитать количество цифр *после запятой* в обеих дробях;

3) в ответе отсчитать *справа налево* столько же цифр и поставить запятую.

Пример 2. Найдите значение выражения $0{,}11 \cdot 2{,}3$.

Решение. Умножим число 11 на 23. Получим 253. В первой дроби *после запятой* две цифры. Во второй дроби *после запятой* одна цифра. В сумме три цифры. Отсчитаем три цифры у числа 253 и поставим запятую. Получим $0{,}11 \cdot 2{,}3 = 0{,}253$. Произведение чисел равно числу 0,253.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какие арифметические операции можно выполнять над десятичными дробями?

2. Как складывают десятичные дроби?

3. Чему равна сумма десятичных дробей 32,45 и 4,274?

4. Чему равно произведение десятичных дробей 0,11 и 2,3?

5. Сколько знаков после запятой имеет произведение дробей 0,11 и 2,3?

6. Сколько знаков после запятой имеет второй множитель в выражении $0{,}11 \cdot 2{,}3$?

Задание 5. Прочитайте слова в таблице. Изучите падежи.

И. п. (что? сколько?)	Д. п. (чему? скольки?)	В. п. (на что? на сколько?)
-ая, -ых	**-ой, -ым**	**-у, -ую, -ых**
нуль це́л**ых**	нул**ю́** це́л**ым**	нуль це́л**ых**
одна це́л**ая**	одн**о́й** це́л**ой**	одн**у** це́л**ую**
две це́л**ых**	дв**ум** це́л**ым**	две це́л**ых**
три це́л**ых**	тр**ём** це́л**ым**	три це́л**ых**
четыре це́л**ых**	четыр**ём** це́л**ым**	четыре це́л**ых**
пять це́л**ых**	пят**и** це́л**ым**	пять це́л**ых**
двадцать одн**а** це́л**ая**	двадцат**и** одн**о́й** це́л**ой**	двадцать одн**у́** це́л**ую**

Задание 6. Выполните задания по образцу. Прочитайте пример и назовите операцию. Ответьте на вопрос: сколько знаков (цифр) у каждой десятичной дроби после запятой?

Образец. $0{,}1 \cdot 2{,}3 = 0{,}23$. Нуль целых, одна десятая умножить на две целых, три десятых равно нул**ю** цел**ым**, двадцат**и** тр**ём** сот**ым**. Это операция умножения. Дробь 0,1 имеет один знак (одну цифру) после запятой. Дробь 2,3 имеет один знак (одну цифру) после запятой. Дробь 0,23 имеет два знака (две цифры) после запятой.

1) $42{,}5 \cdot 10{,}1 = 429{,}25$; 2) $25{,}5 : 17 = 1{,}5$;

3) $429{,}25 + 1{,}5 = 430{,}75$; 4) $7{,}4 \cdot 0{,}8 = 5{,}92$;

5) $164{,}8 - 162{,}19 = 2{,}61$; 6) $20{,}6 \cdot 8{,}01 = 165{,}006$;

7) $244{,}8 : 6 = 40{,}8$; 8) $3{,}1 \cdot 24{,}18 = 74{,}958$.

5.2. Обращение обыкновенной дроби в десятичную дробь

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
обраща́ть - обрати́ть	обраща́ть - обрати́ть что? во что?	обрати́(те)	обраще́ние

Пример. Обратите обыкновенную дробь $\frac{5}{8}$ в десятичную дробь.

Дроби **читают:**

0,(3) – нуль цел**ых**, три **в** пери́од**е**;

1,(17) – одн**а** цел**ая**, семнадцать **в** пери́од**е**;

3,12(6) – три цел**ых**, двенадцать, шесть **в** пери́од**е**.

Задание 7. А) Прочитайте текст.

Чтобы обыкновенную дробь обратить в десятичную дробь, надо числитель дроби разделить на её знаменатель.

Если разложение знаменателя на простые множители содержит только множители 2 и 5, то обыкновенную дробь можно записать как *конечную десятичную дробь*.

Если разложение знаменателя на простые множители имеет множители, которые не равны числам 2 и 5, то обыкновенную дробь можно записать как *бесконечную периодическую десятичную дробь*.

Пример. Обратите обыкновенную дробь в десятичную: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{7}{6}$.

Решение. 1) Разделим числитель дроби на знаменатель дроби. Тогда $\frac{5}{8} = 5:8 = 0{,}625.$ Получили конечную десятичную дробь, потому что разложение числа 8 на простые множители содержит только число 2, т.е. $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2) Разделим числитель дроби на знаменатель дроби. Тогда $\frac{7}{6} = 7:6 = 1{,}16666...$. Получили бесконечную периодическую десятичную дробь, потому что разложение числа 6 на простые множители содержит числа 2 и 3, т.е. $6 = 2 \cdot 3$. Дробь 1,16666… записывают так: 1,1(6).

Б) Ответьте на вопросы.

1. Как обратить обыкновенную дробь в десятичную дробь?
2. Когда обыкновенную дробь можно записать как конечную десятичную дробь?
3. Когда обыкновенную дробь можно записать как бесконечную периодическую десятичную дробь?
4. Какой десятичной дроби равна дробь $\frac{5}{8}$?
5. Какой обыкновенной дроби равна дробь 0,625?
6. Какой десятичной дроби равна дробь $\frac{7}{6}$?
7. Как можно записать дробь 1,16666…?
8. Какая это дробь 1,16666…?
9. Какой обыкновенной дроби равна дробь 1,1(6)?

Задания и упражнения

Задание 1. Прочитайте десятичные дроби.

1) 0,5;	2) 1,7;	3) 2,6;
4) 0,12;	5) 3,19;	6) 5,83;
7) 0,009;	8) 13,804;	9) 0,112;
10) 7,80009;	11) 67,8749;	12) 7,7007.

Задание 2. Запишите десятичные дроби:

1) сорок одна целая, одна десятая;

2) сто три целых, три десятых;

3) двести двадцать целых, двадцать одна сотая;

4) пятнадцать целых, пятнадцать сотых;

5) три целых, триста одна тысячная;

6) нуль целых, пятьсот три тысячных;

7) восемь целых, одна десятитысячная;

8) тридцать целых, пятьсот две десятитысячных;

9) тридцать три целых, двадцать одна стотысячная;

10) девять целых, двадцать две стотысячных;

11) двадцать семь целых, сто одна миллионная;

12) пятьдесят восемь целых, три миллионных;

13) восемнадцать целых, девятнадцать сотых;

14) сорок восемь целых, двенадцать тысячных;

15) нуль целых, двенадцать сотых;

16) одна целая, одна десятая;

17) сорок целых, шесть в периоде;

18) сто сорок одна целая, три, шесть в периоде;

19) нуль целых, нуль, тридцать семь в периоде;

20) восемь целых, шестьдесят три в периоде;

21) сто две целых, два, пятьдесят семь в периоде.

Задание 3. А) Прочитайте текст.

Найдем произведение чисел 6,7809 и 100. Множитель 100 имеет два нуля. Чтобы умножить десятичную дробь на 100, нужно перенести запятую *вправо* на два знака. Получим $6{,}7809 \cdot 100 = 678{,}09$.

Найдем частное чисел 516,32 и 1000. Делитель 1000 имеет три нуля. Чтобы разделить десятичную дробь на 1000, нужно перенести запятую *влево* на три знака. Получим

$$516{,}32 : 1000 = 0{,}51632.$$

Б) Ответьте на вопросы.

1. Сколько нулей имеет число 100?

2. Сколько нулей имеет число 1000?

3. Куда нужно перенести запятую при умножении десятичной дроби на 100?

4. На сколько знаков нужно перенести запятую при умножении десятичной дроби на 100?

5. Куда нужно перенести запятую при делении десятичной дроби на 1000?

6. На сколько знаков нужно перенести запятую при делении десятичной дроби на 1000?

7. Чему равно произведение чисел 6,7809 и 100?

8. Чему равно частное чисел 516,32 и 1000?

Упражнение 1. Найдите значение выражения.

1) $6{,}965+23{,}3$; 2) $76{,}73+3{,}27$; 3) $50{,}4-6{,}98$; 4) $88-9{,}804$;
5) $6{,}5\cdot 1{,}22$; 6) $0{,}48\cdot 2{,}5$; 7) $3{,}725\cdot 3{,}2$; 8) $0{,}016\cdot 0{,}25$;
9) $53{,}4:15$; 10) $16{,}94:2{,}8$; 11) $75:1{,}25$; 12) $123{,}12:30$.

Упражнение 2. Найдите значение выражения.

1) $481{,}92:12-20{,}16$; 2) $6{,}05\cdot(53{,}8+50{,}2)$;
3) $155{,}5-5{,}5\cdot 20{,}7$; 4) $85{,}68:(4{,}138+2{,}162)$;
5) $1{,}08\cdot 30{,}5-9{,}72:2{,}4$; 6) $44{,}69+0{,}5\cdot 25{,}5:3{,}75$;
7) $3{,}6:0{,}08+5{,}2\cdot 2{,}5$; 8) $(9{,}885-0{,}365):1{,}7+4{,}4$;
9) $42{,}5\cdot 10+25{,}5:17$; 10) $16{,}8:10+7{,}4\cdot 0{,}8$.

Упражнение 3. Вычислите.

1) $0{,}375:\frac{9}{16}$; 2) $-\frac{1}{3}:1{,}5$; 3) $-0{,}15\cdot\frac{2}{3}$; 4) $\frac{37}{63}\cdot(-2{,}1)$;
5) $\frac{4}{7}\cdot(-4{,}9)$; 6) $-1{,}6:\left(-\frac{4}{9}\right)$; 7) $6\frac{1}{3}-2{,}2$; 8) $2\frac{2}{7}+4{,}6$.

Задание 4. Вставьте пропущенные слова.

Найдём значение выражения 3,126 · 1000 + 71,9 : 100.

Это выражение содержит ____________________ операции (действия). Первое действие – это ______________________________. Второе действие – это _______________. Третье действие – это ________________.

Выполним первое действие – ______________. Множитель 1000 имеет __________ нуля. Чтобы умножить десятичную дробь 3,126 на 1000, нужно перенести запятую ____________ на ______ знака.

Получим 3,126 · 1000 = ____________.

Выполним второе действие – _________________. Делитель 100 имеет ___________ нуля. Чтобы разделить десятичную дробь 71,9 на 100, нужно перенести запятую ____________ на ______ знака.

Получим 71,9 : 100 = ____________.

Выполним третье действие – ________________.

Получим ________________. Следовательно, значение выражения $3{,}126\cdot 1000+71{,}9:100$ равно числу ______________ .

Тема 6. Степень с натуральным показателем

6.1. Степень с натуральным показателем

Словарь к теме

нахождéние показáтель (м.р.) натурáльный показáтель стéпень (ж.р.) значéние *чего?* стéпени основáние *чего?* стéпени	показáтель *чего?* стéпени возведéние *чего? во что?* возводи́ть - возвести́ *что? во что?* неопределённое выражéние установи́ть *что?* соотвéтствие

Записи **читают:**

a^n – а **в** степен**и эн** (а в э́*нной* степени)	a^{2k-1} – а **в** степен**и два ка минус один**
a^{2n-1} – а **в** степен**и два эн минус один**	2^2 – два **в квадрáте**
a^{2k} – а **в** степен**и два ка**	2^3 – два **в кýбе**

Задание 1. Прочитайте текст.

Степень числа *a* с натуральным показателем *n* ($n > 1$) – это произведение n одинаковых множителей, каждый из которых равен числу a, т.е. a^n – а **в** степен**и эн**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Степень числа a с натуральным показателем n обозначают так: a^n.

Записывают: $a^n = b$. Число a – это **основание степени**, число n – это **показатель степени**, a^n – это **степень**, число b – это **значение степени**.

Например, произведение $2 \cdot 2 \cdot 2$ можно записать как 2^3. Число 2 – это основание степени, число 3 – это показатель степени, 2^3 – это степень.

Возведение в степень – это нахождение значения степени.

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Число 8 – это значение степени.

Задание 2. А) Изучите конструкцию, определите падежи существительных.

Что? называ́ется/называ́ют чем? =

Чем? называ́ется/ называ́ют что?

Б) Прочитайте примеры конструкции.

1) *Число a* в выражении a^n называют *основанием* степени.

2) *Степенью* числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называется *произведение* n одинаковых множителей, каждый из которых равен числу a.

В) Поставьте слова в нужную форму:

1) Выражение a^n называют ________________ (степень).

2) Число n в выражении a^n называют ________________ (показатель) степени.

3) Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется __________________ (сокращение) дроби.

4) Число $\frac{a}{b}$ называют обыкновенной _____________ (дробь).

5) Число a называют ________________ (числитель), число b называют ________________ (знаменатель) дроби $\frac{a}{b}$.

6) Число, которое делится только на 1 и на себя, называется простым ______________ (число).

7) Арифметические операции называют арифметическими __________ (действия).

8) (Разложение) __________________ числа на простые множители называется запись числа в виде произведения простых множителей.

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
возводи́ть - возвести́	возводи́ть - возвести́ что? во что?	возведи́(те)	возведе́ние

Пример. Возведите число 2 в четвёртую степень.

Задание 3. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется степенью числа a с натуральным показателем n?
2. Как обозначают степень?
3. Как называется число a в выражении a^n?
4. Как называется число n в выражении a^n?
5. Назовите основание степени в выражении 2^3.
6. Назовите показатель степени в выражении 2^3.
7. Что такое возведение в степень?
8. Чему равно значение степени 2^3?
9. Возведите десятичную дробь 0,1 в квадрат.
10. Чему равно пять в кубе?
11. Возведите число 10 в куб.

Задание 4. А) Прочитайте числительные и степени.

	Числительные	**Степень**	**В какой степени?**
0	нулев**о́й**	a^0	а в нулев**о́й** степени
1	пе́рв**ый**	a^1	а в пе́рв**ой** степени
2	втор**о́й**	a^2	а в квадрат**е**, а квадрат, а в**о** втор**о́й** степени
3	тре́т**ий**	a^3	а в куб**е**, а куб, а в тре́ть**ей** степени
4	четвёрт**ый**	a^4	а в четвёрт**ой** степени
5	пя́т**ый**	a^5	а в пя́т**ой** степени
6	шест**о́й**	a^6	а в шест**о́й** степени
7	седьм**о́й**	a^7	а в седьм**о́й** степени
8	восьм**о́й**	a^8	а в восьм**о́й** степени
9	девя́т**ый**	a^9	а в девя́т**ой** степени
21	два́дцат**ь** пе́рв**ый**	a^{21}	а в два́дцат**ь** пе́рв**ой** степени
30	тридца́т**ый**	a^{30}	а в тридца́т**ой** степени
40	сороков**о́й**	a^{40}	а в сороков**о́й** степени
50	пят**и**деся́т**ый**	a^{50}	а в пят**и**деся́т**ой** степени
60	шест**и**деся́т**ый**	a^{60}	а в шест**и**деся́т**ой** степени
70	сем**и**деся́т**ый**	a^{70}	а в сем**и**деся́т**ой** степени
80	восьм**и**деся́т**ый**	a^{80}	а в восьм**и**деся́т**ой** степени
90	девяно́ст**ый**	a^{90}	а в девяно́ст**ой** степени
100	со́т**ый**	a^{100}	а в со́т**ой** степени
200	дв**ух**со́т**ый**	a^{200}	а в дв**ух**со́т**ой** степени
500	пят**и**со́т**ый**	a^{500}	а в пят**и**со́т**ой** степени
600	шест**и**со́т**ый**	a^{600}	а в шест**и**со́т**ой** степени
1000	ты́сячн**ый**	a^{1000}	а в ты́сячн**ой** степени

Б) Прочитайте степени. Назовите основание и показатель степени.

Образец. Запись $3{,}14^5$ **читают:** три целых четырнадцать сотых **в** пят**ой** степен**и**. Число 3,14 – это основание степени. Число 5 – это показатель степени.

1) 3^2; 2) 2^3; 3) $1{,}35^7$; 4) 432^{12}; 5) $35{,}03^9$;

6) 10^2; 7) $1{,}6^3$; 8) $0{,}3^{15}$; 9) 52^4; 10) $2{,}33^5$.

Запомните!

a^2 – а **в** квадра́т**е**

a^3 – а **в** ку́б**е**

Задание 5. Прочитайте задания и решения.

1) **Задание.** Возведите число 4 в куб. **Решение.** $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

2) **Задание.** Возведите число 2 в пятую степень.

Решение. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Запомните!

Любое число в нулевой степени равно единице:
$$a^0 = 1$$

Любое число в первой степени равно самому числу:
$$a^1 = a$$

Нуль в любой натуральной степени равен нулю:
$$0^n = 0$$

6.2. Возведение в степень положительных и отрицательных чисел

Задание 6. А) Прочитайте текст.

Основание степени может быть положительным числом, отрицательным числом или числом 0.

Положительное число в любой натуральной степени – это всегда положительное число.

Отрицательное число в чётной степени – это положительное число, т.е.
$$(-a)^{2k} > 0, \text{ где } k \in N.$$

Отрицательное число в нечётной степени – это отрицательное число, т.е.
$$(-a)^{2k-1} < 0, \text{ где } k \in N.$$

Обратите внимание!

1) $(-a)^{2k} = a^{2k}$; **2)** $(-a)^{2k-1} = -a^{2k-1}$; **3)** $(-a)^{2k} \neq -a^{2k}$

Например, $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$, а $-2^4 = -2\cdot2\cdot2\cdot2 = -16$.

Выражение 0^0 – неопределённое выражение.

Б) Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	Конец предложения
Выражение 0^0 – это	положительное число, отрицательное число или число ноль.
Если $a > 0$, $n \in N$, то a^n	неопределённое выражение.
Выражение a^n – это	отрицательное число.
Если $a < 0$, $n \in N$, то a^{2n-1}	степень.
Основание степени – это	положительное число.

Задания и упражнения

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

Если $n \in N,$ то выражение a^n – это _________ . Число a – это ________ _________. Число n – это _____________ _________ . Если a – положительное число, то a^n – это _______________ число. Если a – отрицательное число и показатель степени чётное число, то a^{2k} – это _______________ число, где $k \in N.$ Если a – отрицательное число и показатель степени нечётное число, то a^{2k-1} – это _______________ число, где $k \in N.$

Если возвести любое число в нулевую степень, то получим __________. Если возвести один в натуральную степень, то получим ___________________. Если возвести число нуль в натуральную степень, то получим ____________.

Упражнение 1. Вычислите.

1) 2^3; 2) 3^3; 3) 4^3; 4) 5^3; 5) 6^3;

6) 11^2; 7) 12^2; 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 10) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$;

11) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; 12) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$; 13) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$; 14) 3^5; 15) 2^7;

16) 3^6; 17) 5^4; 18) 1^{14}; 19) 4^5; 20) 0^{712}.

Задание 2. Установите соответствие между левой и правой частями выражения.

Левая часть выражения	**Правая часть выражения**
$a^1 =$	$-(a)^{2k-1}$
$a^0 =$	125
$0^n =$	a^{2k}
$(-a)^{2k} =$	–125
$5^3 =$	a
$(-a)^{2k-1} =$	1
$(-5)^3 =$	0

Упражнение 2. Найдите значение выражения. Ответ объясните.

Образец. $(-3)^5$. Запишем $(-3)^5 = -243$. **Читаем:** минус три в пят**ой** степен**и** равно минус двест**и** сорок**а** **трём**, потому что отрицательное число в нечётной степени – это отрицательное число.

1) $(-2)^3$; 2) $(-3)^4$; 3) $(-4)^3$; 4) $(-12)^2$;

5) $(-6)^3$; 6) $(-11)^2$; 7) $(-0{,}2)^4$; 8) $(-0{,}7)^2$;

9) $(-3)^5$; 10) $(-2)^4$; 11) $(-0{,}1)^3$; 12) $(-1{,}5)^2$.

Тема 7. Извлечение корня из натурального числа, обыкновенной и десятичной дробей

Словарь к теме

ко́рень (м.р.) *чего? из чего?* квадра́тный ко́рень куби́ческий ко́рень значе́ние *чего?* ко́рня показа́тель *чего?* ко́рня	подкоренно́е выраже́ние радика́л извлече́ние *чего? из чего?* извлека́ть - извле́чь *что? из чего?* обра́тный *чему?*

Обозначения и записи **читают:**

n-ой – э́нной;

$\sqrt[n]{a}$ – корень э́нн**ой** степен**и из** а (корень степен**и эн из** а);

$\sqrt[2k-1]{a}$ – корень степени два ка минус один из а;

$\sqrt[2k-1]{a} = b$ – корень степени два ка минус один из а рав**ен** бэ.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Арифметический корень n-ой степени из числа a – это число b, такое, что $b^n = a$, где $n \in N,\ n > 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0$.

Корень n-ой степени обозначают знаком корня[19]: $\sqrt[n]{\ }$. Число a в выражении $\sqrt[n]{a}$ – это **подкоренное выражение**, число n в выражении $\sqrt[n]{a}$ – это **показатель корня**. Число b, которое равно корню $\sqrt[n]{a}$, называют **значением корня**.

Извлечение корня n-ой степени из числа – это операция нахождения корня. Операция извлечения корня – это операция, обратная операции возведения в степень.

Корень n-ой степени из положительного числа – это положительное число, т.е.

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ где } a > 0,\ b > 0,\ n \in N.$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа – это отрицательное число, т.е.

$$\sqrt[2k-1]{a} = b, \text{ где } a < 0, b < 0, k \in N.$$

Б) Поставьте слова в нужную форму:

1) Арифметическим ____________ (корень) n-ой степени из числа a называется число b, такое, что $b^n = a,$ где $n \in N,\ n > 1,\ a \geq 0,\ b \geq 0$.

2) Число n в выражении $\sqrt[n]{a}$ называют _________________ (показатель) корня.

3) Число a в выражении $\sqrt[n]{a}$ называют подкоренным ________________ (выражение).

[19] Ко́рень = радика́л.

4) Операция нахождения корня называется ____________________ (извлечение) корня *n*-ой степени из числа.

В) Ответьте на вопросы.

1. Что называется арифметическим корнем *n*-ой степени из числа *a*?
2. Как обозначают корень *n*-ой степени из числа *a*?
3. Как называют число *a* в выражении $\sqrt[n]{a}$?
4. Как называют число *n* в выражении $\sqrt[n]{a}$?
5. Как называется операция нахождения корня?
6. Какая операция является[20] обратной операции возведения в степень?
7. Какая операция является обратной операции извлечения корня?
8. Когда значение корня имеет положительное значение?
9. Когда значение корня имеет отрицательное значение?

Задание 2. А) Прочитайте корни.

Обозначение корней	Чтение корней	Обозначение корней	Чтение корней
$\sqrt{a}$	квадратный корень из а/ корень квадратный из а	$\sqrt[10]{a}$	корень деся́той степени из а
$\sqrt[3]{a}$	кубический корень из а/ корень кубический из а	$\sqrt[21]{a}$	корень двадцать первой степени из а
$\sqrt[4]{a}$	корень четвёртой степени из а	$\sqrt[100]{a}$	корень со́той степени из а
$\sqrt[5]{a}$	корень пя́той степени из а	$\sqrt[n]{a}$	корень э́нной степени из а
$\sqrt[6]{a}$	корень шестой степени из а	$\sqrt[k]{a}$	корень ка́той степени из а
$\sqrt[7]{a}$	корень се**дь**мой степени из а	$\sqrt[2n]{a}$	корень степени два эн из а
$\sqrt[8]{a}$	корень во**сь**мой степени из а	$\sqrt[5]{a^2}$	корень пя́той степени из а в квадрате
$\sqrt[9]{a}$	корень девя́той степени из а	$\sqrt[7]{a^3}$	корень седьмо́й степени из а в кубе

Задание 3. Прочитайте ко́рень по образцу. Назовите показатель корня и подкоренное выражение.

Образец. Запись $\sqrt[5]{18}$ **читают:** корень пя́т**ой** сте́пен**и из** восемнадцат**и**. Число 5 – это показатель корня. Число 18 – это подкоренное выражение.

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{144}$; 4) $\sqrt{2{,}25}$; 5) $\sqrt{0{,}09}$;

6) $\sqrt[3]{64}$; 7) $\sqrt[3]{125}$; 8) $\sqrt[3]{27}$; 9) $\sqrt[3]{216}$; 10) $\sqrt[3]{0{,}001}$;

11) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$; 12) $\sqrt[5]{\dfrac{8}{27}}$; 13) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$; 14) $\sqrt{\dfrac{9}{144}}$; 15) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$.

Задание 4. А) Прочитайте правило.

Правило. Если числовое выражение содержит операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то сначала выполняют операции возведения в степень и извлечения корня, потом выполняют операции умножения и деления, затем выполняют операции сложения и вычитания.

[20] Что? явля́ется чем?

Б) Прочитайте примеры. Укажите порядок выполнения действий.

1) $\sqrt[3]{64}-8:2^3+7\cdot\sqrt{9}=24$;

2) $\left(\sqrt[3]{64}+8\right):3-15\cdot 3^2=-131$;

3) $5\cdot\left(\sqrt[4]{81}-2^3\right)+3:\sqrt{4}=-23{,}5$;

4) $5\cdot\sqrt[4]{81}-\left(2^3+3\right):\sqrt{4}=9{,}5$.

Запомните!

глагол (НСВ - СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
извлека́ть - извле́чь	извлека́ть - извле́чь что? из чего?	извлеки́(те)	извлече́ние

Пример. Извлеките (что?) корень четвёртой степени из (чего?) шестнадцати.
Пример. Извлеките (что?) корень четвёртой степени из (чего?) числа шестнадцать.

Задание 5. А) Изучите конструкцию, определите падежи существительных и прочитайте пример.

Корень из чего? равен чему?

Запись $\sqrt[3]{8}=2$ **читают:** кубический корень **из** вос**ьми** равен дв**ум**.

Б) Прочитайте примеры.

1) $\sqrt{4}=2$; 2) $\sqrt[3]{125}=5$; 3) $\sqrt[4]{81}=3$;

4) $\sqrt{16}=4$; 5) $\sqrt[3]{216}=6$; 6) $\sqrt[5]{243}=3$;

7) $\sqrt{121}=11$; 8) $\sqrt[6]{64}=2$; 9) $\sqrt[4]{16}=2$;

10) $\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$; 11) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}=\frac{2}{5}$; 12) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$;

13) $\sqrt{0{,}16}=0{,}4$; 14) $\sqrt[3]{0{,}001}=0{,}1$; 15) $\sqrt[3]{-0{,}027}=-0{,}3$.

Задание 6. Прочитайте задания и решения.

1) **Задание.** Извлеките кубический корень из 64. **Решение.** $\sqrt[3]{64}=4$.

2) **Задание.** Извлеките квадратный корень из 25. **Решение.** $\sqrt{25}=5$.

3) **Задание.** Извлеките корень пятой степени из 32. **Решение.** $\sqrt[5]{32}=2$.

4) **Задание.** Извлеките корень четвёртой степени из 81. **Решение.** $\sqrt[4]{81}=3$.

Задания и упражнения

Задание 1. Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	Конец предложения
$\sqrt[n]{a}$ – это	двум.
Число a в выражении $\sqrt[n]{a}$ – это	корень.
Корень нечётной степени из отрицательного числа – это	положительное число.
Число n в выражении $\sqrt[n]{a}$ – это	подкоренное выражение.
Кубический корень из восьми равен	отрицательное число.
Корень нечётной степени из положительного числа – это	показатель корня.

Упражнение 1. Извлеките корень и прочитайте выражение.

Образец. Запись $\sqrt[4]{625}=5$ **читают:** корень четвёртой степени из шестьсот двадцат**и** пят**и** рав**ен** пят**и**.

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{144}$; 4) $\sqrt{2{,}25}$; 5) $\sqrt{0{,}09}$;

6) $\sqrt[3]{64}$; 7) $\sqrt[3]{125}$; 8) $\sqrt[3]{27}$; 9) $\sqrt[3]{216}$; 10) $\sqrt[3]{0{,}001}$;

11) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; 12) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; 13) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 14) $\sqrt{\frac{9}{169}}$; 15) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$.

Упражнение 2. Извлеките корень.

1) $\sqrt[4]{81}$; 2) $\sqrt[3]{-125}$; 3) $\sqrt[3]{27}$; 4) $\sqrt[5]{-32}$;

5) $\sqrt[3]{0{,}001}$; 6) $\sqrt[3]{-0{,}008}$; 7) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; 8) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$;

9) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 10) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$; 11) $\sqrt[5]{-\frac{243}{32}}$; 12) $\sqrt{\frac{49}{225}}$.

Задание 2. Установите соответствие между записью корня и его чтением.

Запись корня	Чтение корня
$\sqrt[4]{a}$	корень квадратный из a
$\sqrt{ab}$	корень кубический из a
$\sqrt[4]{a:b}$	корень четвёртой степени из a
$\sqrt[3]{a}$	корень квадратный из a умножить на b
$\sqrt{a}$	корень четвёртой степени из a разделить на b
$\sqrt{a:b}$	корень кубический из a умножить на b
$\sqrt[3]{a\cdot b}$	корень квадратный из a разделить на b

Тема 8. Отношения. Пропорции. Проценты

8.1. Отношения. Пропорции

Словарь к теме

отноше́ние относи́ться *к чему?* к числу пропо́рция чле́ны пропо́рции кра́йние чле́ны пропо́рции	сре́дние чле́ны пропо́рции проце́нт проце́нтное отноше́ние составля́ть - соста́вить *что? от чего?*

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Отношение чисел a и b – это частное чисел a и b, т.е. это запись $a : b$.

Пример. Запишите отношение чисел 10 и 5.

Решение. Отношение чисел 10 и 5 – это частное этих чисел. Найдём частное чисел 10 и 5:

$$10 : 5 = 2.$$

Следовательно, отношение чисел 10 и 5 равно числу 2.

Пропорция – это равенство двух отношений $a : b = c : d$.

Пропорцию $a : b = c : d$ **читают** так: отношени**е** чисел a и b равн**о** отношени**ю** чисел c и d.

Пропорцию $a : b = c : d$ можно записать так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Числа a, b, c и d – это **члены пропорции**.

Числа a и d – это **крайние члены пропорции**.

Числа b и c – это **средние члены пропорции**.

Свойство пропорции. Произведени**е** крайних членов пропорции равн**о** произведени**ю** средних членов пропорции.

Запишем свойство пропорции с помощью формул:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c.$$

Б) Поставьте слова в нужную форму.

1) Частное чисел a и b называется ___________________ (отношение) этих чисел.

2) Равенство двух отношений называют _________________________ (пропорция).

3) Числа a, b, c и d в пропорции $a : b = c : d$ называют _________________ (члены) пропорции.

4) Числа a и d в пропорции $a : b = c : d$ называют _____________________ _______________ (крайние члены) пропорции.

5) Числа b и c в пропорции $a : b = c : d$ называют _____________________ ____________ (средние члены) пропорции.

В) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое отношение чисел a и b?

2. Что такое пропорция?
3. Как называют числа a, b, c и d в пропорции $a:b=c:d$?
4. Как называют числа a и d в пропорции $a:b=c:d$?
5. Как называют числа b и c в пропорции $a:b=c:d$?
6. Назовите свойство пропорции.

8.2. Проценты

Знаки и записи **читают:**
% – процент;
1% – один проце́нт (21%, 31%, …, 101%, 121%, …);
2% – два проце́нт**а** (3%, 4%, 22%, 23%, 24%, …);
5% – пять проце́нт**ов** (6%, 7%, … , 20%, 25%, …);
1,1% – одна целая, одна десятая (часть) проце́нт**а**;
p% – пэ проце́нт**ов**.
Задание 2. А) Прочитайте текст.
Один процент от числа – это одна сотая часть числа.
Чтобы найти 1% от числа *m*, надо это число разделить на 100, т.е.

$$1\% = \frac{m}{100}.$$

Если число *a* составляет *p*% от числа *m*, то число *a* можно найти по формуле

$$a = \frac{m \cdot p}{100}.$$

Если число *a* составляет *p*% от числа *m*, то число *m* можно найти по формуле

$$m = \frac{a \cdot 100}{p}.$$

Если число *a* составляет *p*% от числа *m*, то число *p* можно найти по формуле

$$p = \frac{a \cdot 100}{m}.$$

Выражение $\left(\frac{a \cdot 100}{m}\right)\%$ – это **процентное отношение** чисел *a* и *m*.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.
1. Что такое один процент от числа?
2. Как найти 1% от числа *m*?
3. Как найти *p*% от числа *m*?
4. Сколько процентов составляет число *a* от числа *m*?
5. Что такое процентное отношение чисел?
6. Прочитайте проценты: 1%; 2%; 7%; 10%; 21%; 22%; 25%; 50%; 100%; 200%; 201%; 202%; 300%; 0,1%; 2,5%.
7. Найдите 1% от числа 12.

Задания и упражнения

Задание 1. Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	Конец предложения
$a : b$ – это	один процент от числа m.
$a : b = c : d$ – это	отношение.
Если $a : b = c : d$, то $a \cdot d = b \cdot c$ – это	процентное отношение чисел.
$1\% = \dfrac{m}{100}$ – это	пропорция.
$\left(\dfrac{a \cdot 100}{m}\right)\%$ – это	свойство пропорции.

Задание 2. Прочитайте пропорции. Назовите крайние и средние члены пропорции.

Образец. $2:3 = x:6$. Отношени**е** чисел 2 и 3 равн**о** отношени**ю** чисел x и 6 (два относится **к трём** как икс относится **к** шест**и**). Числа 2 и 6 – это крайние члены пропорции. Числа 3 и x – это средние члены пропорции.

1) $3:6 = 5:10$; 2) $5:2 = 10:4$; 3) $9:5 = 7{,}2:4$;
4) $8:x = 3:12$; 5) $x:5 = 2:3$; 6) $7:4 = 3:x$;
7) $12:3 = x:4$; 8) $18:6 = 9:3$; 9) $10:5 = 30:15$.

Упражнение 1. Найдите:
1) 1% от числа 250; 2) 5% от числа 250;
3) 80% от числа 250; 4) 150% от числа 250;
5) 3% от числа 500; 6) 6% от числа 120;
7) 40% от числа 15; 8) 10% от числа 155;
9) 120% от числа 8,5; 10) 10% от числа 280;
11) 280% от числа 9,5; 12) 1,2% от числа 1,25;
13) 4% от числа 200; 14) 7% от числа 210.

Упражнение 2. Найдите число, если известно, что:
1) 3% этого числа равны 1,8; 2) 85% этого числа равны 17;
3) 130% этого числа равны 3,9; 4) 15% этого числа равны 230;
5) 20% этого числа равны 30; 6) 50% этого числа равны 5,6;
7) 10% этого числа равны 17; 8) 7% этого числа равны 1,4;
9) 18,75% этого числа равны 32; 10) 0,4% этого числа 125;
11) 3% этого числа равны 42; 12) 110% этого числа равны 660;
13) 5% этого числа равны 50; 14) 2% этого числа равны 32.

Упражнение 3. Сколько процентов составляет:
1) число 8 от числа 200; 2) число 2,1 от числа 12;
3) число 0,363 от числа 6,6; 4) число 10,2 от числа 8,5;
5) число 2 от числа 8; 6) число 8 от числа 16;
7) число 5 от числа 100; 8) число 48 от числа 60;
9) число 32 от числа 64; 10) число 3 от числа 210;
11) число 5 от числа 125; 12) число 8 от числа 128.

Тема 9. Элементы теории множеств

9.1. Понятие множества

Словарь к теме

мно́жество	включа́ть - включи́ть *что? во что?*
бесконе́чное мно́жество	задава́ть - зада́ть *что? как?*
коне́чное мно́жество	облада́ть *чем?*
пусто́е мно́жество	объединённый
подмно́жество	объединён, объединена́, -о́, -ы́ *по чему?*
однозна́чное число́[21]	совпада́ть - совпа́сть *с чем?*
определённое пра́вило	содержа́ться *в чём?*
совоку́пность (ж.р.)	существова́ть
спо́соб	явля́ться *чем?*
характеристи́ческое сво́йство	

Символы и записи **читают:**

$\varnothing$ – пустое множество;

$A = \{1,3,5\}$ – → множество а содержит три элемента: 1, 3, 5;
→ множество а – это множество чисел 1, 3, 5;

$A = \{x \mid P(x)\}$ – множество а – это множество всех икс, таких, что пэ от икс;

$B \subset A$ – → множество бэ является подмножеств**ом** множества а;
→ множество бе содержит**ся во** множеств**е** а.

Задание 1. А) Изучите конструкцию, определите падежи существительных и прочитайте пример.

Что? является чем?

Множество *B* **является подмножеством** множества *A*.

Число 2 **является** натуральным **числом**.

Б) Напишите 2 предложения с конструкцией «что? является чем?».

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Множество – одно из основных понятий в математике. **Множество** – это совокупность предметов, которые объединены по определённому правилу.

Например, множество студентов в группе, множество дней в году, множество натуральных чисел.

Предметы, которые составляют множество, называются **элементами множества**.

Пустое множество – это множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

[21] Однозначное число = число, которое состоит из **одного** знака.

Множества обозначают большими латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы множества обозначают малыми латинскими буквами: a, b, c, … .

Множества бывают конечными и бесконечными. **Конечное множество** – это множество, которое содержит *конечное* число элементов. **Бесконечное множество** – это множество, которое содержит *бесконечное* число элементов.

Существует два способа задания множеств.

Первый способ: можно перечислить все элементы множества. Все элементы множества записывают в фигурных скобках.

Например, множество всех однозначных нечётных чисел можно записать как множество:

$$A = \{1,3,5,7,9\}.$$

Второй способ: можно задать все характеристические свойства множества. Если множество A состоит из элементов x, которые обладают свойством $P(x)$, то множество A записывают так:

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Например, множество B всех натуральных чисел, которые больше, чем 10 и меньше, чем 120, можно записать как множество:

$$B = \{x \mid 10 < x < 120,\ x \in N\}.$$

Множество B называется **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Записывают: $B \subset A$.

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B совпадают, т. е. $A = B$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое множество?
2. Какое множество называется пустым?
3. Каким символом обозначают пустое множество?
4. Назовите способы задания множеств.
5. Какое множество называется конечным?
6. Приведите пример конечного множества.
7. Какое множество называется бесконечным?
8. Приведите пример бесконечного множества.
9. Запишите множество всех натуральных нечётных чисел.
10. Запишите множество всех чисел, которые делятся на 10.
11. Запишите символами: множество C содержится во множестве D.

Задание 3. Запишите как множество. Сколько элементов содержит это множество? Это конечное или бесконечное множество? Что является элементами этого множества?

1) Множество натуральных чисел.
2) Множество дней недели.
3) Множество цифр.
4) Множество студентов в группе.
5) Множество букв русского алфавита.

9.2. Числовые множества

Словарь к теме

действи́тельное[22] число́ иррациона́льное число́ рациона́льное число́ це́лое число́	непериоди́ческая десяти́чная дробь объедине́ние *чего?* мно́жеств приближённо[23]

Символы и записи **читают:**

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$ – ку – это множество всех дробей эм разделить на эн, таких, что $m \in Z, n \in N$;

$\bigcup$ – объединение;

$R = Q \bigcup I$ – эр равн**о** объединени**ю** ку и и;

π – пи;

$\approx$ – приближённо равно;

$\pi \approx 3{,}14$ – пи приближённо равно числ**у** три целых, четырнадцать сотых;

$N \subset Z \subset Q \subset R$ – эн содержит**ся в** зэт, зэт содержит**ся в** ку, ку содержит**ся в** эр;

R^+ – эр плюс;

R^- – эр минус.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Множества, элементами которых являются числа, называют **числовыми множествами**.

Вспомним некоторые числовые множества.

Название множества	**Обозна-чение**	**Запись множества**	**Элементы множества**
Множество натуральных чисел	N	$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$	Натуральные числа
Множество целых чисел	Z	$Z = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$	Целые числа
Множество рациональных чисел	Q	$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$	Рациональные числа
Множество иррациональных чисел	I	–	Иррациональные числа
Множество действительных чисел	R	$R = Q \bigcup I$	Действительные числа

[22] Действи́тельное число = веще́ственное число.
[23] Приближённо = приблизи́тельно.

Натуральные числа – это числа 1, 2, 3, …, n, … . **Целые числа** – это положительные натуральные числа, отрицательные натуральные числа и число 0. **Рациональные числа** – это все обыкновенные дроби. Обыкновенные дроби можно записать как конечные десятичные дроби и как бесконечные периодические десятичные дроби. Следовательно, конечные десятичные дроби и бесконечные периодические десятичные дроби – это рациональные числа. **Иррациональные числа** – это бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, число $\pi \approx 3{,}14$ – это иррациональное число. **Действительные числа** – это все рациональные и иррациональные числа.

Если число 5 – элемент множества R, то записывают $5 \in R$. Если число π не является элементом множества Q, то записывают $\pi \notin Q$.

Множества N, Z, Q и I – это подмножества множества R. Записывают

$$N \subset Z \subset Q \subset R, I \subset R.$$

Множество всех действительных положительных чисел обозначают R^+. Множество всех действительных отрицательных чисел обозначают R^-. Число 0 – это не положительное и не отрицательное число.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите числовые множества.
2. Запишите все подмножества множества Z.
3. Запишите все подмножества множества Q.
4. Запишите все подмножества множества R.
5. Число e ($e \approx 2{,}71$) – это рациональное или иррациональное число?
6. Как называются элементы множества Z?
7. Как называются элементы множества Q?
8. Число 0 – это рациональное или иррациональное число?
9. Обыкновенная дробь является элементом множества Z?
10. В виде каких десятичных дробей можно записать обыкновенную дробь?
11. Запишите символами: 10 – элемент множества R.

Задание 5. Запишите символами записи по образцу.

Образец. a = 5. a – это натуральное число, a – целое число, a – действительное число, a – положительное число, a – не иррациональное число. Запишем: $a \in N,\ a \in Z,\ a \in R,\ a \in R^+,\ a \notin I$.

1) $a = -3$. a – это целое число, a – рациональное число, a – отрицательное число, a – не иррациональное число.

2) $a = \pi$. a – это иррациональное число, a – действительное число, a – неотрицательное число, a – не рациональное число.

3) $a = 2{,}72$. a – это рациональное число, a – действительное число, a – положительное число, a – не целое число.

4) $a = -\dfrac{1}{3}$. a – это рациональное число, a – действительное число, a – отрицательное число, a – не иррациональное число.

9.3. Модуль числа

Словарь к теме

абсолю́тная величина́	определя́ть - определи́ть *что? по чему?*
мо́дуль (м.р.)	отлича́ть *что? от чего?*
противополо́жный	отлича́ться друг от друга *чем?*

Записи **читают:**

$|a|$ – модуль а (абсолютная величина а);

$|x|$ – модуль икс;

$|3|$ – модуль (чего?) тр**ёх**;
модуль числа три;

$|-5|$ – модуль минус пят**и**;
модуль числа минус пять;

$|x+3|$ – модуль выражения икс плюс три;
икс плюс три **по** модул**ю**;

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ 0, \text{ если } a = 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

– модуль а рав**ен** а, если а больше нуля; рав**ен** нулю, если а равно нулю; рав**ен** минус а, если а меньше нуля;

$|-3| = |3| = 3$ – модуль минус тр**ёх** рав**ен** модул**ю** тр**ёх**, рав**ен** тр**ём**.

Задание 6. А) Прочитайте текст.

Модуль (абсолютная величина) числа *a* – это неотрицательное число, которое обозначают $|a|$ и определяют по формуле:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ 0, \text{ если } a = 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Действительные числа *a* и (–*a*) называются **противоположными числами**. Сумма противоположных чисел равна нулю.

Например, числа 3 и (–3) – противоположные числа. Следовательно, противоположные числа отличаются друг от друга знаком.

Модули противоположных чисел равны. Например, $|-3| = |3| = 3$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какие числа называются противоположными?
2. Чем отличаются друг от друга противоположные числа?
3. Как обозначают абсолютную величину числа *a*?
4. Запишите формулу модуля числа *a*.
5. Чему равен модуль нуля?
6. Чему равна абсолютная величина числа (–2)?
7. Модули каких чисел равны?
8. Чему равна сумма противоположных чисел?

9.4. Числовая ось

Словарь к теме

едини́чный отре́зок	рису́нок (рис.)
масшта́б [машта́п]	стре́лка
направле́ние	изобража́ть - изобрази́ть *что?*
ось (ж.р.)	откла́дывать - отложи́ть *что? на чём?*
числова́я ось	отмеча́ть - отме́тить *что? на чём?*
отсчёт [отщо́т]	принима́ть - приня́ть *что? за что?*
нача́ло *чего?* отсчёта	счита́ть[24]
пряма́я ли́ния	стро́ить - постро́ить[25]

Задание 7. А) Прочитайте текст.

Построим прямую линию. Выберем на ней направление оси́ и обозначим его знаком «стрелка» → (рис. 1). На рисунке 1 мы изобразили *ось*. *Положительное направление оси́* обозначили стрелкой. Противоположное направление оси́ считают *отрицательным*.

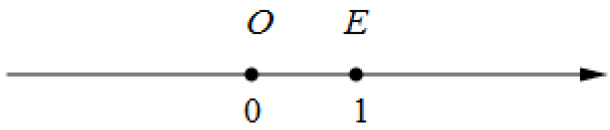


Рис. 1. Числовая ось

Отметим на оси́ любую точку и обозначим её буквой *O*. Точка *O* изображает число 0. Точку *O* называют **началом отсчёта**. Отметим на оси́ справа от точки *O* любую точку и обозначим её буквой *E*. *OE* – это единичный отрезок, т.е. отрезок, который принимают за единицу длины.

Будем считать, что точка *E* изображает число 1, т.е. мы выбрали масштаб[26]. Мы построили числовую ось. На числовой оси́ можно отложить положительное или отрицательное число с помощью масштаба. Положительные числа находятся на числовой оси́ справа от точки *O*. Отрицательные числа на числовой оси́ находятся слева от точки *O*.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Каким знаком обозначают положительное направление оси?
2. Какое направление оси считают отрицательным?
3. Какой буквой обозначают начало отсчёта?
4. Какие числа находятся справа от точки *O*?
5. Какие числа находятся слева от точки *O*?
6. Какое число изображает точка *O*?
7. Какое число изображает точка *E*?
8. Где находится число 5 на числовой оси?
9. С помощью чего откладывают положительные и отрицательные числа на числовой оси?

[24] Счита́ть = полага́ть.
[25] Постро́ить = изобрази́ть.
[26] Масша́б = едини́ца длины́.

9.5. Числовые промежутки

Словарь к теме

бесконе́чность (ж.р.) интерва́л полуинтерва́л отре́зок откры́тый луч числово́й луч	промежу́ток числово́й промежу́ток усло́вие включи́тельно включа́ть - включи́ть *что?во что?* удовлетворя́ть *чему?* усло́вию

Символы и запись **читают:**

$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – множество всех действительных икс, таких, что икс больше или равен а, и меньше или равен бэ;

∞ – бесконечность;

$-\infty$ – минус бесконечность.

Задание 8. Прочитайте текст.

Множество всех чисел, которые удовлетворяют какому-либо условию, называется **числовым промежутком**.

Числовой промежуток можно задать тремя способами:

1) неравенством;
2) обозначением;
3) изображением на числовой оси.

Задание 9. Прочитайте множества.

1) $\{x \in R \mid a < x < b\}$; 2) $\{x \in R \mid -\infty < x < \infty\}$;
3) $\{x \in R \mid a \le x < b\}$; 4) $\{x \in R \mid a < x \le b\}$;
5) $\{x \in R \mid a \le x < \infty\}$; 6) $\{x \in R \mid -\infty < x \le b\}$;
7) $\{x \in R \mid a < x < \infty\}$; 8) $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$.

Задание 10. А) Изучите конструкцию, определите падежи числительных и прочитайте примеры.

от чего? до чего?

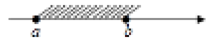
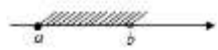
Запись «от 5 до 10» **читают:** от пят**и** до десят**и**.

Запись «от 2 до ∞» **читают:** от дв**ух** до бесконечност**и**.

Б) Прочитайте записи, используйте конструкцию «от чего? до чего?».

1) от 1 до ∞;	2) от 0 до 7;	3) от 12 до 100;
4) от –3 до –1;	5) от –8 до 13;	6) от $-\infty$ до 90;
7) от $-\infty$ до ∞;	8) от 1 до 3;	9) от 8 до 23;
10) от –4 до ∞;	11) от 1,1 до 2,3;	12) от 0,1 до ∞;
13) от $-\infty$ до 4,1;	14) от –24 до 0;	15) от 3,3 до 8,1;
16) от 0,01 до 0,2;	17) от –3 до 3;	18) от 5 до 112.

Задание 11. А) Изучите числовые промежутки.

Название числового промежутка	Обозначение числового промежутка	Неравенство, которое задаёт числовой промежуток	Чтение числового промежутка	Изображение числового промежутка
Отрезок	$[a; b]$	$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$	отрезок от а до бэ	
Интервал	$(a; b)$	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	интервал от а до бэ	
	$(-\infty; \infty)$	$\{x \in R \mid -\infty < x < \infty\}$	интервал от минус бесконечности до (плюс) бесконечности	
Полуинтервал	$[a; b)$	$\{x \in R \mid a \le x < b\}$	полуинтервал от а включительно до бэ	
	$(a; b]$	$\{x \in R \mid a < x \le b\}$	полуинтервал от а до бэ включительно	
Числовой луч	$[a; \infty)$	$\{x \in R \mid a \le x < \infty\}$	полуинтервал от а включительно до бесконечности	
	$(-\infty; a]$	$\{x \in R \mid -\infty < x \le a\}$	полуинтервал от минус бесконечности до а включительно	
Открытый числовой луч	$(a; \infty)$	$\{x \in R \mid a < x < \infty\}$	интервал от а до бесконечности	
	$(-\infty; a)$	$\{x \in R \mid -\infty < x < a\}$	интервал от минус бесконечности до а	

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называют **числовыми промежутками**.

Бесконечными промежутками называют промежутки $(a;\infty)$, $(-\infty;a)$, $[a;\infty)$, $(-\infty;a]$ и $(-\infty;\infty)$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется числовым промежутком?
2. Запишите, каким знаком обозначают бесконечность.
3. Как можно задать числовой промежуток?
4. Запишите бесконечные промежутки.

9.6. Операции над множествами

Словарь к теме

графи́ческая иллюстра́ция объедине́ние мно́жеств	пересече́ние мно́жеств ра́зность мно́жеств

Знаки и записи **читают:**

$\bigcup$ – объединение;

$\bigcap$ – пересечение;

$\backslash$ – разность;

$A\bigcup B$ – объединение множеств а и бэ (а в объединении с бэ);

$A\bigcap B$ – пересечение множеств а и бэ (а в пересечении с бэ);

$A \setminus B$ – разность множеств а и бэ (а минус бэ);

$A\bigcup B=C$ – объединение множеств а и бэ есть цэ (объединение множеств а и бэ равн**о** множеств**у** цэ);

$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A \text{ или } x\in B\}$ – объединение множеств а и бэ – это множество всех икс, таких, что $x \in A$ или $x \in B$.

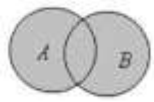
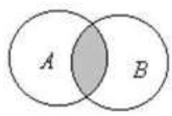
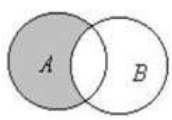
Задание 12. Прочитайте записи:

1) $A\bigcap B=D$; 2) $B \setminus A = C$; 3) $A\bigcup B=D$;

4) $A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A \text{ и } x\in B\}$; 5) $A \setminus B = \{x\,|\, x\in A \text{ и } x\notin B\}$;

6) $B \setminus A = \{x\,|\, x\in B \text{ и } x\notin A\}$; 7) $Q\bigcup I = R$.

Задание 13. А) Изучите операции над множествами.

Название операции	Знак опера-ции	Определение операции	Графическая иллюстрация
Объединение множеств *A* и *B*	$\bigcup$	$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A \text{ или } x\in B\}$	
Пересечение множеств *A* и *B*	$\bigcap$	$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A \text{ и } x\in B\}$	
Разность множеств *A* и *B*	$\backslash$	$A \setminus B = \{x\,|\, x\in A \text{ и } x\notin B\}$	

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какие операции над множествами Вы знаете?
2. Запишите знаки операций над множествами?
3. Запишите символами разность множеств [a; b] и (a; b).
4. Найдите пересечение множеств [0; 9] и (–1; 3). Сделайте рисунок.
5. Найдите объединение множеств [0; 9] и (–1; 3). Сделайте рисунок.

Задания и упражнения

Задание 1. Назовите все числовые множества. Какое числовое множество самое маленькое? Какое числовое множество самое большое?

Упражнение 1. Запишите, каким из множеств *N, Z, Q, I, R*, R^+, R^- принадлежит число *a*.

1) $a = -7$; 2) $a = 12$; 3) $a = 1{,}1$; 4) $a = -5{,}8$;

5) $a = -\pi$; 6) $a = -1{,}(3)$; 7) $a = 0$; 8) $a = \frac{5}{9}$.

Упражнение 2. Запишите модуль выражений по образцу и прочитайте запись.

Образец. $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ если } x \geq 1; \\ -x+1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$ Модуль выражения икс минус один рав**ен** икс минус один, если икс больше или рав**ен** одн**ому**, рав**ен** минус икс плюс один, если икс меньше одн**ого**.

1) $|x+2|$; 2) $|x-3|$; 3) $|5-x|$; 4) $|x-0{,}5|$; 5) $|y-2x|$; 6) $|2x-3|$.

Упражнение 3. Найдите модуль (абсолютную величину) числа *a*.

Образец. $a = -4$. $|-4| = 4$. Модуль минус четыр**ёх** рав**ен** четыр**ём** (абсолютная величина числа минус четыре рав**на** четыр**ём**).

1) $a = -7$; 2) $a = 12$; 3) $a = 1{,}34$; 4) $a = -5{,}8$;

5) $a = -\pi$; 6) $a = \sqrt{7}$; 7) $a = 0$; 8) $a = -1$.

Задание 2. Прочитайте числовой промежуток. Это конечный или бесконечный числовой промежуток?

1) $[-4;6]$; 2) $(-4;6)$; 3) $(-4;\infty)$; 4) $(-\infty;6)$; 5) $[-4;6)$;

6) $(-4;6]$; 7) $[-4;\infty)$; 8) $(-\infty;6]$; 9) $(-\infty;\infty)$; 10) $[-2;3]$;

11) $(2;3)$; 12) $[2;3)$; 13) $(2;3]$; 14) $(-\infty;3]$; 15) $(2;\infty)$.

Задание 3. Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	**Конец предложения**
Неотрицательное число – это число, которое	неотрицательное число.
Неположительное число – это число, которое	противоположными числами.
Модуль числа *a* – это	больше или равно нулю.
Числа *a* и (– *a*) называются	равна пяти.
Модуль числа минус пять	меньше или равно нулю.
Абсолютная величина минус пяти	объединение множеств *A* и *B*.
$\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ – это	равен пяти.
$\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ – это	разность множеств *A* и *B*.
$\{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ – это	пересечение множеств *A* и *B*.

Тема 10. Действия над действительными числами

После XVI века понятие числа стало меняться. До XVI века изучались только положительные рациональные числа. С XVI века учёные начали изучать иррациональные и отрицательные числа. В XVIII веке учёные продолжили изучать действия над десятичными дробями, в частности действия с бесконечными и периодическими десятичными дробями.

Во второй половине XIX века появились теоретические работы о действительных числах.

Действительные числа – это рациональные числа (обыкновенные дроби) и иррациональные числа (бесконечные непериодические десятичные дроби).

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в степень. Можно извлекать корень из действительного числа. Рассмотрим действия (операции) над действительными числами.

10.1. Сложение и вычитание действительных чисел

Задание 1. Прочитайте правила сложения действительных чисел и примеры.

Правила сложения	**Примеры**
1. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда $a+b>0$.	1) $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$; 2) $0{,}1+0{,}11=0{,}21$
2. Пусть $a < 0$, $b < 0$. Тогда $a+b<0$.	1) $-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=-1$; 2) $-0{,}1-0{,}11=-(0{,}1+0{,}11)=-0{,}21$
3. Пусть $a > 0$, $b < 0$, $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$. Тогда $a+b<0$.	1) $\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$; 2) $0{,}1-0{,}11=-(0{,}11-0{,}1)=-0{,}01$
4. Пусть $a < 0$, $b > 0$, $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$. Тогда $a+b>0$.	1) $-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; 2) $-0{,}1+0{,}11=0{,}11+(-0{,}1)=0{,}01$
5. Пусть $a < 0$, $b > 0$, $\lvert a\rvert=\lvert b\rvert$. Тогда $a+b=0$.	1) $-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$; 2) $-0{,}1+0{,}1=0$

Вычитание – это действие, которое обратно действию сложения.

Если $a-b=c$, то $b+c=a$. И наоборот, если $b+c=a$, то $a-b=c$.

10.2. Умножение и деление действительных чисел

Словарь к теме

вноси́ть - внести́ *что? куда?* выноси́ть - вы́нести *что? за что?* раскры́тие *чего?* ско́бок	раскрыва́ть - раскры́ть *что?* обра́тные чи́сла обра́тно *чему?* числу́

Задание 2. Прочитайте правила умножения действительных чисел и примеры.

Правила умножения	**Примеры**
1. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда $a \cdot b > 0$.	1) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$; 2) $0{,}1 \cdot 0{,}11 = 0{,}011$
2. Пусть $a < 0$, $b < 0$. Тогда $a \cdot b > 0$.	1) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{36}$; 2) $(-0{,}1) \cdot (-0{,}11) = 0{,}011$
3. Пусть $a > 0$, $b < 0$. Тогда $a \cdot b < 0$.	1) $\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{36}$; 2) $0{,}1 \cdot (-0{,}11) = -0{,}011$
4. Пусть $a < 0$, $b > 0$. Тогда $a \cdot b < 0$.	1) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{36}$; 2) $(-0{,}1) \cdot 0{,}11 = -0{,}011$

Записать выражение $a \cdot (b + c)$ как выражение $a \cdot b + a \cdot c$ – значит *раскрыть скобки*.

Записать выражение $a \cdot b + a \cdot c$ как выражение $a \cdot (b + c)$ – значит *вынести общий множитель за скобки*.

Записать выражение $a \cdot d \cdot (b + c)$ как выражение $d \cdot (a \cdot b + a \cdot c)$ – значит *внести множитель a в скобки*.

Запомните!

глагол (НСВ – СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
раскрыва́ть - раскры́ть	раскрыва́ть - раскры́ть что?	раскро́й(те)	раскры́тие
выноси́ть - вы́нести	выноси́ть - вы́нести что? за что?	вы́неси(те)	вынесе́ние
вноси́ть - внести́	вноси́ть - внести́ что? куда? (во что?)	внеси́(те)	внесе́ние

Задание 3. Прочитайте задания и решения.

Задание	Решение
Раскройте скобки в выражении $5\cdot(x+y)$.	$5\cdot(x+y)=5x+5y$
Вынесите общий множитель за скобки в выражении $10x+5y$.	$10x+5y=5\cdot(2x+y)$
Внесите в выражении $5\cdot a\cdot(x+y)$ **число** 5 **в скобки**.	$5\cdot a\cdot(x+y)=a\cdot(5x+5y)$

Деление – это действие, которое обратно умножению.

Если $a:b=c$, то $b\cdot c=a$. И наоборот, если $b\cdot c=a$, то $a:b=c$.

Задание 4. Прочитайте правила деления действительных чисел и примеры.

Правила деления	Примеры
1. Пусть $a>0$, $b>0$. Тогда $a:b>0$.	1) $\frac{1}{6}:\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$; 2) $0{,}1:0{,}11=0{,}(90)$
2. Пусть $a<0$, $b<0$. Тогда $a:b>0$.	2) $\left(-\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$; 2) $(-0{,}1):(-0{,}11)=0{,}(90)$
3. Пусть $a>0$, $b<0$. Тогда $a:b<0$.	3) $\frac{1}{6}:\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{1}{5}$; 2) $0{,}1:(-0{,}11)=-0{,}(90)$
4. Пусть $a<0$, $b>0$. Тогда $a:b<0$.	4) $\left(-\frac{1}{6}\right):\frac{5}{6}=\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{6}{5}=-\frac{1}{5}$; 2) $(-0{,}1):0{,}11=-0{,}(90)$

Дробь **читают:**

$\frac{1}{a}$ – один разделить на а.

Задание 5. А) Прочитайте текст.

Пусть $a\in R,\ a\neq 0.$ Тогда числа a и $\frac{1}{a}$ называют **обратными числами**.

Произведение обратных чисел равно единице, т.е.

$$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1.$$

Например, числа 5 и $\frac{1}{5}$ – это обратные числа. Число 5 обратно числу $\frac{1}{5}$. И наоборот, число $\frac{1}{5}$ обратно числу 5.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какие числа называют обратными числами?
2. Чему равно произведение обратных чисел?
3. Можно найти число, обратное нулю?
4. Как найти число, обратное целому числу?

10.3. Возведение в степень

Словарь к теме

перемножáть - перемнóжить

Записи **читают:**

a^n – а **в** степен**и** эн (а **в** э́нн**ой** степен**и**);

a^{-n} – а **в** степен**и** минус эн (а **в** минус э́нн**ой** степен**и**);

$\frac{1}{a^n}$ – один разделить на а **в** степен**и** эн;

3^{-3} – три **в** минус треть**ей** степен**и**;

$\frac{1}{3^3}$ – один разделить на три **в** куб**е**.

Задание 6. А) Прочитайте текст.

Возвести число *a* в степень *n*, где $n \in N, n \neq 1,$ – значит умножить число a само на себя n раз, т.е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}.$$

Выражение a^n – это **степень**, число a – это **основание степени**, число n – это **показатель степени**.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ – это степень. Дробь $\frac{1}{3}$ – это основание степени. Число 5 – это показатель степени.

Запомните!

Если $(-n)$ – целое отрицательное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Если $n = -1$, то $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Например, дробь $\frac{1}{2}$ можно записать как 2^{-1}, т.е. $\frac{1}{2} = 2^{-1}$. Степень 3^{-3} можно записать как дробь $\frac{1}{3^3}$ или как дробь $\frac{1}{27}$, т.е. $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

Запишем свойства степеней с целыми показателями с помощью формул. Пусть $n, m \in Z,\ a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$ Тогда

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; 5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.
1. Что значит возвести число *a* в степень *n*?
2. Как называется число *a* в выражении a^n?
3. Как называется число *n* в выражении a^n?
4. Как умножить степени с одинаковыми основаниями?
5. Чему равна степень частного?
6. Как возвести степень в степень?
7. Возведите число 5 в куб.
8. Возведите 0,5 в квадрат.
9. Запишите произведение степеней 2^5 и 2^3 как степень.
10. Запишите частное степеней 2^5 и 3^5 как степень.

В) Установите соответствие между левой и правой частью равенства.

Левая часть	**Правая часть**
$a^3 =$	1
$a^{-1} =$	a^{n+m}
$a^n \cdot a^m =$	a^{n-m}
$a^n : a^m =$	$a \cdot a \cdot a$
$a^n : b^n =$	$(a \cdot b)^n$
$a^n \cdot b^n =$	$a^{n \cdot m}$
$(a^m)^n =$	$(a : b)^n$
$a^0 =$	$\frac{1}{a}$

Задание 7. А) Прочитайте текст.

Сократим выражение $\frac{10a^5}{6a^3}$. Числа 10 и 6 делятся на 2, поэтому дробь надо сократить на 2. При делении степеней с одинаковым основанием показатели степени вычитают, а основание оставляют прежним, т.е. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Тогда получим

$$\frac{10a^5}{6a^3} = \frac{5}{3}a^2.$$

Б) Ответьте на вопросы.

1. На какое число можно сократить выражение $\frac{10a^5}{6a^3}$?
2. Почему дробь $\frac{10a^5}{6a^3}$ можно сократить на 2?
3. Как разделить степени с одинаковым основанием?
4. Чему равно значение выражения $\frac{10a^5}{6a^3}$?

10.4. Формулы сокращённого умножения

Словарь к теме

непóлный квадрáт сýммы непóлный квадрáт рáзности

Задание 8. А) Прочитайте формулы сокращённого умножения.

Название формулы	**Формула**	**Чтение формулы**
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$	а в квадрате минус бэ в квадрате равно а минус бэ умножить на а плюс бэ.
Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	а плюс бэ в квадрате равно а в квадрате плюс два а бэ, плюс бэ в квадрате.
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	а минус бэ в квадрате равно а в квадрате минус два а бэ, плюс бэ в квадрате.
Разность кубóв	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	а в кубе минус бэ в кубе равно а минус бэ умножить на а в квадрате плюс а бэ, плюс бэ в квадрате.
Сумма кубóв	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	а в кубе плюс бэ в кубе равно а плюс бэ умножить на а в квадрате минус а бэ, плюс бэ в квадрате.
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	а плюс бэ в кубе равно а в кубе плюс три а в квадрате бэ, плюс три а бэ в квадрате, плюс бэ в кубе.
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	а минус бэ в кубе равно а в кубе минус три а в квадрате бэ, плюс три а бэ в квадрате, минус бэ в кубе.

Выражение $a^2 - ab + b^2$ называют **неполным квадратом разности**. Выражение $a^2 + ab + b^2$ называют **неполным квадратом суммы**.

Запомните!

$$a^2 - ab + b^2 \neq (a-b)^2$$
$$a^2 + ab + b^2 \neq (a+b)^2$$
$$a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$$

Б) Запишите формулы:
1) разность квадратов; 2) квадрат разности; 3) куб суммы;
4) куб разности; 5) разность кубов;
6) квадрат суммы; 7) сумма кубов.

В) Ответьте на вопрос: как называется формула?
1) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 2) $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$;
3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; 4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; 6) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
7) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Задание 9. Запишите выражение в виде произведения. Какую формулу сокращённого умножения применили?
1) $a^2 - 4$; 2) $9 - 4a^2$; 3) $a^2 + 4a + 4$;
4) $a^3 - 8$; 5) $27 - 8a^3$; 6) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$;
7) $a^3 + 8$; 8) $8 + 27a^3$; 9) $27 + 27a + 9a^2 + a^3$.

10.5. Извлечение корня

Знаки и записи **читают:**

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда;

$a^{\frac{m}{n}}$ – а **в** степен**и** эм разделить **на** эн;

$\sqrt[n]{a^m}$ – корень степени эн **из** а **в** степен**и** эм;

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ – один разделить на корень степени эн **из** а **в** степен**и** эм;

$\sqrt{a^2} = |a|$ – корень квадратный из а **в** квадрат**е** рав**ен** модул**ю** а;

$\sqrt[n\cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$ – корень степени эн умножить на ка **из** а в степени ка рав**ен** корн**ю** степени эн **из** а.

Задание 10. А) Прочитайте текст.

Извлечь корень степени *n* из числа *a* – значит найти такое число b, что $b^n = a$.

Вспомним, что корень степени n из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$, где a – это **подкоренное выражение**, n – это **показатель корня**.

Следовательно, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Возвести число *a* в рациональную степень $\frac{m}{n}$ – значит извлечь корень степени *n* из числа *a* в степени *m*, т.е.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Выражение $\sqrt[n]{a^m}$ можно записать так: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Запомните!

$$\boxed{\textbf{1) } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\textbf{; 2) } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

Запомните!

$$\boxed{\textbf{1) } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a\textbf{; 2) } \sqrt{a^2} = |a|}$$

Запишем свойства корней с натуральными показателями с помощью формул. Пусть $a \geq 0,\ b \geq 0,\ n, k \in N,\ n \neq 1,\ k \neq 1.$ Тогда

1) $\sqrt[n \cdot k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$; 2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$; 5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.

Запомните!

глагол (НСВ – СВ)	**конструкция**	**императив (СВ)**	**существительное**
выноси́ть - вы́нести	выноси́ть - вы́нести что? из-под чего?	вы́неси(те)	вынесе́ние
вноси́ть - внести́	вноси́ть - внести́ что? под что?	внеси́(те)	внесе́ние

Б) Прочитайте задания и примеры.

Задание	**Пример**
Вынесите (что?) общий **множитель** (из-под чего?) **из-под знака** корня.	$\sqrt[3]{125b^7} = \sqrt[3]{\left(5b^2\right)^3 b} = 5b^2 \cdot \sqrt[3]{b}$
Внесите (что?) ***a*** (под что?) **под знак корня**.	$a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$

В) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что значит извлечь корень степени *n* из числа *a*?
2. Как обозначают корень степени *n* из числа *a*?
3. Как называется число *a* в выражении $\sqrt[n]{a}$?
4. Как называется число *n* в выражении $\sqrt[n]{a}$?
5. Чему равен корень из произведения двух неотрицательных чисел?
6. Чему равен корень из частного двух чисел?
7. Чему равна степень корня?
8. Запишите символами: корень нечётной степени из отрицательного числа есть отрицательное число.
9. Запишите символами: корень энной степени из единицы равен одному.
10. Запишите символами: корень энной степени из нуля равен нулю.
11. Запишите степень $a^{\frac{m}{n}}$ в виде корня.
12. Запишите корень $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ в виде степени.
13. Запишите степень $3^{\frac{2}{3}}$ в виде корня.

Задания и упражнения

Задание 1. Установите соответствие между заданием и примером.

Задание	**Пример**
Вынесите множитель за скобки.	$5b(2a+1)=10ab+5b$
Раскройте скобки.	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
Возведите степень в степень.	$10ab+5b=5b(2a+1)$
Возведите корень в степень.	$\sqrt[4]{16}=2$
Внесите множитель под знак корня.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Вынесите множитель из-под знака корня.	$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$
Возведите число в степень.	$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$
Извлеките корень из числа.	$3^3=27$

Задание 2. Вставьте пропущенные слова.

Произведение двух положительных чисел или двух отрицательных чисел – это _________________ число. Если числа имеют разные знаки, то произведение чисел – это _________________ число.

Если числа имеют одинаковые знаки, то частное чисел – это ________________ число. Если числа имеют разные знаки, то частное чисел – это _________________ число.

Числа a и $\frac{1}{a}$, где $a \neq 0$, – это _______________ числа. Если a и $\frac{1}{a}$ обратные числа, то их ____________________ равно единице.

Чтобы найти число, обратное числу (–a), надо единицу _______________ на число (–a). Число, которое обратно числу (–a), записывают так ____ .

Упражнение 1. Найдите значение выражения. Назовите операцию.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$;

5) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; 7) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}$; 8) $\left(-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$;

9) $0{,}5+1{,}23$; 10) $0{,}5-1{,}23$; 11) $0{,}5\cdot1{,}23$; 12) $(-1{,}23):0{,}5$;

13) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; 14) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; 15) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 16) $\sqrt[4]{81}$.

Задание 3. Прочитайте записи.

1) $\frac{1}{\sqrt{m}}$; 2) $\frac{\sqrt{x}}{8}$; 3) $\frac{2}{\sqrt[3]{y}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{p}}{2}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[4]{z}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt[3]{z}^2-1}$;

7) $2^{\frac{m}{2}}$; 8) $x^{\frac{2}{3}}$; 9) $5^{\frac{3}{x}}$; 10) $y^{\frac{5}{x}}$; 11) $y^{\frac{x}{2}}$; 12) $y^{\frac{1}{x+1}}$.

Упражнение 2. Выполните задания.

1. Вынесите общий множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{12a^3-4a^2c}$; б) $\sqrt[3]{8a^3-4a^4}$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $3d\sqrt{a+3d}$; б) $a\sqrt[3]{1+c}$.

3. Разложите выражение на множители:

а) $125-x^3$; б) $25a^2-49$.

4. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $15x^2y-10xy^2$; б) $3ab^2-6ab$.

5. Раскройте скобки:

а) $5x(x-y^3)$; б) $(x-3)\cdot(x+4)$.

Задание 4. Назовите преобразования.

Образец. 1) $10x+5y=5\cdot(2x+y)$ – преобразование: вынесение общего множителя за скобки.

1) $5abc+10cd=5c(ab+2d)$; 2) $5c(ab+2d)=5abc+10cd$;

3) $x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$; 4) $5a\sqrt{c}=\sqrt{25a^2c}$;

5) $\sqrt{25a^2c}=5a\sqrt{c}$; 6) $(3-b)\cdot(9+3b+b^2)=27-b^3$.

Тема 11. Некоторые формулы элементарной математики

11.1. Определение логарифма. Свойства логарифмов

Словарь к теме

конста́нта логари́фм десяти́чный логари́фм натура́льный логари́фм аргуме́нт *чего?* логари́фма	значе́ние *чего?* логари́фма основа́ние *чего?* логари́фма логарифми́рование логарифми́ческое то́ждество

Обозначения и записи **читают**:

$\log_a x$ – логарифм икс **по** основани**ю** а;

$\ln x$ – натуральный логарифм икс;

$\lg x$ – десятичный логарифм икс;

$\log_2 3$ – логарифм (чего?) тр**ёх** **по** основани**ю** (числа) два;

$\ln 2$ – натуральный логарифм (чего?) дв**ух**;

$\lg 1$ – десятичный логарифм (чего?) одн**ого**;

$\log_a x = y$ – логарифм икс **по** основани**ю** а рав**ен** игрек;

$a^{\log_a x}$ – а в степени логарифм икс **по** основани**ю** а;

$\log_{10} x = \lg x$ – логарифм икс **по** основани**ю** десять рав**ен** десятичн**ому** логарифм**у** икс;

$\log_e x = \ln x$ – логарифм икс **по** основани**ю** *е* рав**ен** натуральн**ому** логарифм**у** икс;

$\frac{1}{\log_a x}$ – один разделить на логарифм икс **по** основани**ю** а;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда;

c = const – цэ константа.

Задание 1. Прочитайте текст.

Логарифм числа *x* по основанию *a*, где $a > 0, a \neq 1, x > 0,$ – это **показатель степени *y***, в которую надо возвести число *a*, чтобы получить число *x*.

Логарифм числа *x* по основанию *a* обозначают так: $\log_a x$. Число *a* – это **основание логарифма**, число *x* – это **аргумент логарифма**.

Запишем определение логарифма символами:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x,\ a > 0, a \neq 1, x > 0.$$

Число *y* в выражении $\log_a x = y$ – это **значение логарифма**.

Логарифм числа *x* по основанию *e*, где $e \approx 2{,}7$, обозначают $\ln x$ и называют **натуральным логарифмом**.

Логарифм числа *x* по основанию 10 обозначают $\lg x$ и называют **десятичным логарифмом**.

Запомните обозначения!

$$\textbf{1)}\ \log_{10} x = \lg x;\ \textbf{2)}\ \log_e x = \ln x$$

Операцию нахождения логарифма числа x по основанию a называют **логарифмированием**. Логарифмирование – это операция, обратная операции возведения в степень.

Например, чтобы вычислить $\log_2 16$, надо найти такое число y, что $2^y = 16$. Таким образом, $\log_2 16 = 4$, т.к. $2^4 = 16$.

Задание 2. А) Изучите конструкцию, определите падежи числительных.

Логарифм (чего?) равен (чему?)

Б) Прочитайте примеры использования конструкции.

Образец. Запись $\log_2 16 = 4$ **читают:** логарифм шестнадцат**и по** основани**ю два** рав**ен** четыр**ём**.

1) $\log_2 8 = 3$; 2) $\log_5 25 = 2$; 3) $\log_8 64 = 2$; 4) $\log_3 81 = 4$;

5) $\ln e = 1$; 6) $\log_5 5 = 1$; 7) $\log_5 125 = 3$; 8) $\lg 100 = 2$.

Задание 3. Прочитайте свойства логарифмов и формулы.

Свойства логарифмов	**Формулы**
1. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.	$\log_a 1 = 0$
2. Логарифм a по основанию a равен одному.	$\log_a a = 1$
3. Логарифм произведения – это сумма логарифмов.	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. Логарифм частного – это разность логарифмов.	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм её основания.	$\log_a x^c = c \cdot \log_a x$, где c = const
6. Если в основании логарифма находится степень, то величину, обратную показателю степени, можно вынести за знак логарифма.	$\log_{a^c} x = \frac{1}{c} \cdot \log_a x$, где c = const
7. Переход к новому основанию.	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$
8. Основное логарифмическое тождество.	$a^{\log_a x} = x$

Задание 4. Ответьте на вопросы и выполните задания.
1. Что такое логарифм числа x по основанию a?
2. Как обозначается логарифм числа x по основанию a?
3. Как называется число x в выражении $\log_a x$?
4. Как называется число a в выражении $\log_a x$?
5. Как называется логарифм по основанию $e \approx 2{,}7$?
6. Как называется логарифм по основанию 10?
7. Какие значения может принимать число a в выражении $\log_a x$?
8. Какие значения может принимать число x в выражении $\log_a x$?
9. Как называется операция нахождения логарифма?
10. Запишите символами определение логарифма.

11.2. Формулы тригонометрии

Словарь к теме

геометри́ческая фигу́ра	гипотену́за
определе́ние	у́гол
треуго́льник	о́стрый у́гол
прямоуго́льный треуго́льник	прямо́й у́гол
верши́на *чего?* треуго́льника	си́нус *чего?* угла́
сторона́ *чего?* треуго́льника	ко́синус *чего?* угла́
ка́тет	та́нгенс *чего?* угла́
прилежа́щий ка́тет	кота́нгенс *чего?* угла́
противолежа́щий ка́тет	се́канс *чего?* угла́
тригономе́трия	косе́канс *чего?* угла́
тригонометри́ческие фо́рмулы	прилега́ть *к чему?*
основно́е тригонометри́ческое то́ждество	

Знаки и записи **читают**:
α – а́льфа;
β – бэ́тта;
γ – га́мма;
$\sin\alpha$ – си́нус а́льфа;
$\cos\alpha$ – ко́синус а́льфа;
$\mathrm{tg}\,\alpha$ – та́нгенс альфа;
$\mathrm{ctg}\,\alpha$ – кота́нгенс а́льфа;
$\sec\alpha$ – се́канс а́льфа;
$\mathrm{cosec}\,\alpha$ – косе́канс а́льфа;
$\sin^2\alpha$ – си́нус квадра́т а́льфа (синус в квадрате альфа);
$\sin 2\alpha$ – си́нус дв**ух** а́льфа;
ΔABC – треугольник а, бэ, цэ;
$\angle ABC$ – угол а, бэ, цэ;

$\angle ABC = 90^0$ – угол а, бэ, цэ рав**ен** девяност**а** градусам;

$\pm$ – плюс, минус;

$\mp$ – минус, плюс;

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ – альфа больше нул**я** и меньше пи на два.

Задание 5. А) Прочитайте текст.

На рисунке 2 изображена́ геометрическая фигура – треугольник *ABC*. Точки *A*, *B* и *C* – это вершины ΔABC. $\angle CAB = \alpha$ (угол при вершине *A* равен альфа) – острый угол, т.к. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. $\angle ACB = 90^0$ – прямой угол. Треугольник *ABC* называют **прямоугольным треугольником**.

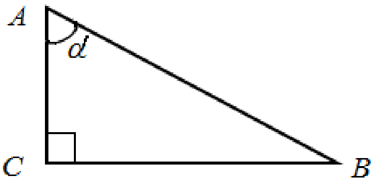


Рис. 2. Треугольник *ABC*

Отрезки *AB*, *AC* и *BC* – это стороны ΔABC. Сторона *AB* называется **гипотенузой** ΔABC. Стороны *AC* и *BC* называются **катетами** ΔABC. Если α – угол при вершине *A* в Δ *ABC*, то катет *AC* называют **прилежащим**[27] **катетом**. Если α – угол при вершине *A* в ΔABC, то катет *BC* называют **противолежащим**[28] **катетом**.

Б) Прочитайте формулы и определения тригонометрических функций.

Формула	**Определение**
$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$	**Синусом угла** α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$	**Косинусом угла** α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$	**Тангенсом угла** α называется отношение противолежащего катета к прилежащему.
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$	**Котангенсом угла** α называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
$\sec\alpha = \dfrac{AB}{AC}$	**Секансом угла** α называется отношение гипотенузы к прилежащему катету.
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{AB}{BC}$	**Косекансом угла** α называется отношение гипотенузы к противолежащему катету.

В) Ответьте на вопросы.

1. Как называется треугольник *ABC*, если один угол равен 90^0?
2. Назовите катеты в прямоугольном треугольнике *ABC* (рис. 2)?

[27] Прилежащий катет = катет, который прилегает к углу.

[28] Противолежащий катет = катет, который лежит напротив угла.

3. Назовите прилежащий и противолежащий катеты к углу ABC в прямоугольном треугольнике ABC.

4. Что называется синусом угла α?

5. Что называется косинусом угла α?

6. Что называется тангенсом угла α?

7. Что называется котангенсом угла α?

8. Что называется секансом угла α?

9. Что называется косекансом угла α?

Задание 6. Прочитайте основные тригонометрические тождества.

Формулы	**Допустимые значения аргумента**
1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\alpha\in R$
2. $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
3. $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$
4. $\mathrm{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
5. $\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$
6. $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$	$\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$

Задание 7. А) Прочитайте в таблице значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов основных углов.

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Б) Прочитайте записи по образцу.

Образец. 1) $\sin 30^0$ – синус (чего?) тридцат**и** гра́дус**ов**;

2) $\mathrm{ctg}51^0$ – котангенс пят**и**десят**и** одн**ого** градус**а**.

1) $\cos 1^0$; 2) $\mathrm{tg}90^0$; 3) $\mathrm{ctg}45^0$; 4) $\sin 15^0$; 5) $\mathrm{tg}22^0$;

6) $\sin 8^0$; 7) $\cos 10^0$; 8) $\mathrm{tg}31^0$; 9) $\mathrm{ctg}53^0$; 10) $\cos 100^0$;

11) $\sin 3^0$; 12) $\mathrm{tg}45^0$; 13) $\cos 8^0$; 12) $\mathrm{ctg}14^0$; 13) $\sin 51^0$.

Задания и упражнения

Задание 1. Поставьте слова в нужную форму:

1) ____________________ (логарифм) числа x по основанию a, где $a>0, a\neq 1, x>0,$ называют показатель степени, в который надо возвести число a, чтобы получить число b.

2) Число a в выражении $\log_a x$ называют ______________ (основание) логарифма, число x называют ________________ (аргумент) логарифма.

3) Число y в выражении $\log_a x = y$ называют _____________ (значение) логарифма.

4) Логарифм единицы по любому основанию равен ________________ (нуль).

5) Точки O, A и B называют _____________________ (вершины) треугольника OAB.

6) Отрезки OA, AB и OB называются __________________ (стороны) треугольника OAB.

7) Отношение противолежащего катета к гипотенузе называется _______________ (синус) угла α.

8) Треугольник, в котором один угол прямой, называется ________________ _________________ (прямоугольный треугольник).

9) Сумма углов треугольника равна ста восьмидесяти ______________ (градусы).

10) Если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, то угол α называют ____________ ______________ (острый угол).

11) Если $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, то угол α называют ______________ ____________ (прямой угол).

12) Формула $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ называется ____________________ ____________ ________________ (основное тригонометрическое тождество).

13) Формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ называют _________________ (формулы) двойного угла.

Упражнение 1. Вычислите. Назовите основание логарифма. Назовите аргумент логарифма. Назовите значение логарифма.

Образец. Вычислите $\log_3 9$. Получим $\log_3 9 = 2$. Логарифм девят**и по** основани**ю** три рав**ен** дв**ум**. Число 3 – это основание логарифма. Число 9 – аргумент логарифма. Число 2 – это значение логарифма.

1) $\log_2 16$;	2) $\log_3 27$;	3) $\log_7 49$;	4) $\lg 1000$;
5) $\log_3 \dfrac{1}{3}$;	6) $\log_{0,2} 0{,}04$;	7) $\ln 1$;	8) $\log_8 8$;
9) $\lg 0{,}1$;	10) $\ln e$;	11) $\log_4 64$;	12) $\log_{0,4} 1$.

Задание 2. Установите соответствие между формулой и её названием.

Формула	Название формулы
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	Основное тригонометрическое тождество.
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	Синус двойного угла.
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	Синус суммы аргументов.
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$	Сумма синусов.
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	Произведение синусов.
$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$	Косинус двойного угла.
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	Формула понижения степени.

Задание 3. А) Переведите слова «вы́разить - выража́ть», «радиа́н».

Б) Прочитайте текст.

В математике величину угла измеряют в градусах или в радианах. Один радиан (сокращение – рад.) примерно равен 57^0, $\pi = 180^0$. Выразим 1^0 через π. Получим $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$. Выразим 30^0 через радианы. Так как $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$, то $30^0 = 1^0\cdot 30 = \dfrac{\pi}{180}\cdot 30 = \dfrac{\pi}{6}$.

В) Выразите через радианы 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 145^0, 150^0, 180^0, 270^0, 300^0, 360^0.

Упражнение 2. Найдите значение выражения.

1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$; 2) $\cos\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}$; 5) $\sin\dfrac{\pi}{6}$; 6) $\cos\dfrac{\pi}{3}$;

7) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$; 8) $\operatorname{ctg}\pi$; 9) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$; 10) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 11) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Упражнение 3. Прочита́йте формулы и уравнения.

Читают: v_0 – вэ нулево́е.

1) $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$; 2) $L = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$;

3) $H = \dfrac{v_0^2}{4g}\cdot(1-\cos 2\alpha)$; 4) $Q = mv^2\sin^2\alpha$;

5) $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2\sin\alpha$; 6) $S = bc\sin\alpha$;

7) $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$; 8) $F = b\cdot l\cdot I\cos\alpha$;

9) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$; 10) $9^{\sin x} = 3$;

11) $4^{\cos x}=1$;

12) $9^{\log_9 x}=3x^2$;

13) $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$;

14) $\cos 4x-\cos x=0$;

15) $\log_4(\sin x+\sin 2x+16)=2$;

16) $\log_7(2\cos^2 x+3\cos x-1)=0$;

17) $\sqrt{\cos 2x-\sin 5x}=-2\cos x$;

18) $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x\right)\cdot\sqrt{-\sin x}=0$;

19) $4\cos^2 x+12\cos x+5=0$;

20) $15\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}x-2=0$;

21) $\dfrac{4\sin^2 x-3}{\sqrt{11\mathrm{tg}x}}=0$;

22) $u=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cdot v\cos\alpha$.

Задание 4. Поставьте глаголы в скобках в форму первого лица множественного числа настоящего или будущего времени.

Образец: (Записать) **Запишем** уравнение.

1. (Прочитать) ________________ текст.
2. (Изучить) ________________ конструкцию.
3. (Определить) ____________ падежи чисел.
4. (Выполнить) ______________ упражнения.
5. (Решить) ________________ задачу.
6. (Использовать) ___________ свойства логарифмов.
7. (Применить) _____________ свойства логарифмов.
8. (Найти) _____________ значение логарифма.
9. (Запомнить) _______________ тригонометрические формулы.
10. (Повторить) ____________ тригонометрические формулы.
11. (Преобразовать) ____________________ выражение.
12. (Построить) __________________ треугольник.
13. (Назвать) ______________ углы треугольника *ABC*.
14. (Выучить) _______________ формулы.
15. (Измерить) ______________ углы.
16. (Перевести) ______________ радианы в градусы.
17. (Установить) ______________ соответствие.
18. (Раскрыть) ________________ скобки.
19. (Внести) ________________ множитель под знак корня.
20. (Вынести) _______________ общий множитель за скобки.
21. (Вычислить)__________________ синус угла 45^0.
22. (Построить) _________________ координатную ось.
23. (Отметить) ______________ точку на координатной оси.
24. (Называть) _____________ основание логарифма.
25. (Выразить) ______________ градусы через радианы.
26. (Поставить) ______________ слова в нужную форму.
27. (Разложить) ______________ выражение на множители.
28. (Обозначить) _________ положительное направление оси стрелкой.
29. (Задать) ___________ числовой промежуток неравенством.
30. (Выбрать)__________ направление оси́ координат.
31. (Разделить) _____________ число на 100.

Тема 12. Функция

12.1. Координатная плоскость. Координаты точки

Словарь к теме

абсци́сса [абци́са]	че́тверть (ж.р.)
ось абсци́сс = ось *OX*	нача́ло отсчёта[31]
ордина́та	паралле́льные прямы́е
ось ордина́т = ось *OУ*	произво́льный
взаи́мно перпендикуля́рные прямы́е	симметри́чный *чему?*
координа́та	симметри́чен, симметри́чна, -о, -ы
нача́ло координа́т	симметри́чна относи́тельно *чего?*
прямоуго́льная[29] систе́ма координа́т	соотве́тствие *чего? чему?*
координа́тная пло́скость	поста́влен, -а, -о, -ы *во что?* (в
координа́тный у́гол[30]	соотве́тствие)
о́си координа́т	принима́ть - приня́ть *за что? что?*

Записи **читают:**

M(*x*,*y*) – точка эм **с** координат**ами** икс, игрек;

OX – о икс;

OУ – о игрек.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Построим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые *OX* и *OУ*. Выберем на прямых *OX* и *OУ* направление и обозначим их знаком стрелка → (рис. 3). Обозначим точку пересечения прямых *OX* и *OУ* буквой *O*. Точка *O* – это начало отсчёта. Примем за положительное направление прямой *OX* направление вправо, за положительное направление прямой *OУ* – направление вверх.

Прямые *OX* и *OУ* – это **о́си координат**. Ось *OX* – это **ось абсцисс**. Ось *OУ* – это **ось ординат**. Точка *O* – это **начало координат**. Плоскость *XOУ* называют **координатной плоскостью**. Начало координат и о́си координат называют **прямоугольной системой координат**.

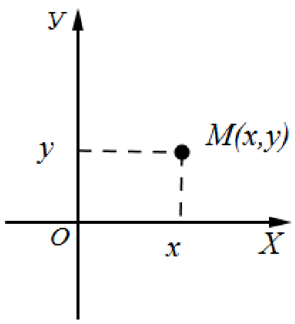


Рис. 3

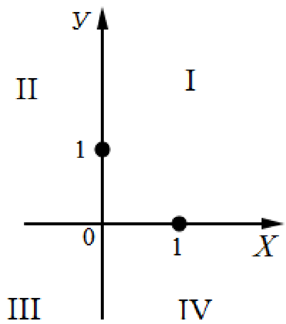


Рис. 4

[29] Прямоугольная = дека́ртовая.
[30] Координатный угол = четверть.
[31] Начало отсчёта = начало координа́т.

На плоскости *ХОУ* можно построить точку с помощью масштаба, который выбран на осях *ОХ* и *ОУ*. **Масштаб** – это единица длины.

О́си координат делят координатную плоскость на четыре части. Эти части называют **координа́тными угла́ми** (или **четвертя́ми**).

Координа́тные углы́ (че́тверти) обозначают римскими цифрами: I, II, III, IV (рис. 4).

Пусть *М* – произвольная точка плоскости *ХОУ*. Проведём через точку *М* прямые, параллельные[32] ося́м координат (рис. 3). Первую координату точки *М* называют **абсциссой** и обозначают буквой x. Вторую координату точки *М* называют **ординатой** и обозначают буквой y. Числа x и y – это **координаты точки *М***.

Записывают: $M(x, y)$ или $M(x; y)$.

Каждой точке плоскости поставлена в соответствие пара координат точки.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Постройте координатную плоскость *ХОУ*.
2. Как называется ось *ОХ*?
3. Как называется ось *ОУ*?
4. Как называется точка *О*?
5. Как называют плоскость *ХОУ*?
6. Что приняли за положительное направление оси *ОХ*?
7. Что приняли за положительное направление оси *ОУ*?
8. Что называют прямоугольной системой координат?
9. Как называют первую координату точки *М*?
10. Как называют вторую координату точки *М*?
11. Что такое координаты точки *М*?
12. Постройте координатную плоскость *ХОУ*. Выберите единичный отрезок на осях координат. Постройте на координатной плоскости точки $A(3; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(-3; 0)$, $D(0; 5)$.

Задание 2. Выполните задания по образцу.

Образец. $A(1; 2)$ – точка *А* **с** координат**ами** один и два. Число один – это абсцисса точки *А*. Число два – это ордината точки *А*. Точка *А* **находится в** перв**ой** четверт**и**.

$A(-1; 2)$ – точка *А* **с** координат**ами** минус один и два. Число минус один – это абсцисса точки *А*. Число два – это ордината точки *А*. Точка *А* **находится во** втор**ой** четверт**и**.

$A(0; 2)$ – точка *А* **с** координат**ами** ноль и два. Число ноль – это абсцисса точки *А*. Число два – это ордината точки *А*. Точка *А* лежит **на** положительной оси́ ордина́т.

1) $A(2; 4)$;	2) $A(-1; 3)$;	3) $A(1; -2)$;	4) $A(-4; -5)$;
5) $A(0; 1)$;	6) $A(7; 0)$;	7) $A(0; -5)$;	8) $A(-3; 0)$;
9) $A(-7; 12)$;	10) $A(1; -8)$;	11) $A(-11; 9)$;	12) $A(-8; -9)$.

[32] Прямые, параллельные осям координат = прямые, которые параллельны осям координат.

Задание 3. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим точки $A(x;\ y)$ и $B(-x;\ y)$. Точки A и B имеют одинаковые ординаты, а абсциссы точек имеют противоположные знаки. Поэтому точки A и B **симметричны относительно оси ординат**.

Рассмотрим точки $A(x;\ y)$ и $C(x;\ -y)$. Точки A и C имеют одинаковые абсциссы, а ординаты точек имеют противоположные знаки. Поэтому точки A и C **симметричны относительно оси абсцисс**.

Рассмотрим точки $A(x;\ y)$ и $D(-x;\ -y)$. Абсциссы и ординаты точек A и D имеют противоположные знаки. Поэтому точки A и D **симметричны относительно начала координат**.

Б) Назовите точку, симметричную[33] точке $M(x;\ y)$ относительно

1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

Постройте точку $M(x;\ y)$ и симметричные ей точки на плоскости.

1) $M(2;\ 4)$; 2) $M(-1;\ 3)$; 3) $M(-1;\ -2)$; 4) $M(4;\ -5)$;
5) $M(0;\ 1)$; 6) $M(7;\ 0)$; 7) $M(0;\ -5)$; 8) $M(-3;\ 0)$.

12.2. Числовая функция. Способы задания функций

Словарь к теме

аргуме́нт	зави́симая переме́нная
гра́фик	незави́симая переме́нная
графи́ческий	фу́нкция
компью́тер	числова́я фу́нкция
компью́терный	спо́соб
компью́терная програ́мма	табли́ца
о́бласть (ж.р.) значе́ний фу́нкции	табли́чный
о́бласть определе́ния фу́нкции	аналити́ческий
переме́нная	соотве́тсвующий

Записи **читают:**

$y = f(x)$ – игрек рав**ен** эф **от** икс;

$x \in X$ – икс маленьк**ое** принадлежит (множеству) икс больш**ому**.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Говорят, что **на множестве *X* задана функция *f* со значениями из множества *У***, если каждому элементу x из множества X по правилу f поставлен в соответствие один и только один элемент y из множества $У$.

Множество X называют **областью определения функции**. Множество $У$ называют **областью значений функции**.

Функцию обозначают так: $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in У$.

Величину x называют **независимой переменной** или **аргументом** функции $y = f(x)$. Величину y называют **зависимой переменной** или **функцией**.

[33] Точка, симметричная точке = точка, которая симметрична точке.

Функция $y = f(x)$ называется **числовой функцией**, если её область определения и область значений – числовые множества.

Рассмотрим основные способы задания числовых функций.

1. *Словесный способ*. Функцию описывают словами.

2. *Аналитический способ*. Функцию задают формулой $y = f(x)$. Например, $y = x^2$.

3. *Табличный способ*. Функцию задают таблицей, в которой даны значения *x* и соответствующие им значения *y*.

x	1	2							
y	2	4							

4. *Графический способ*. Функцию задают графиком.

5. *Компьютерный способ*. Функцию задают компьютерной программой.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ координатной плоскости *XOУ* (рис. 5), где *x* – аргумент функции, *y* – значение функции в точке *x*.

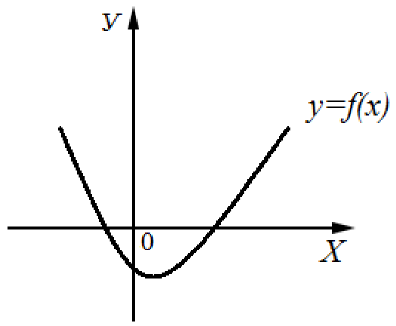


Рис. 5

На рисунке 5 изображён график произвольной функции $y = f(x)$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Когда говорят, что на множестве *X* задана функция со значениями из множества *У*?
2. Как называют множество *X* для функции $y = f(x)$?
3. Как называют множество *У* для функции $y = f(x)$?
4. Что называется областью определения функции $y = f(x)$?
5. Что называется областью значений функции $y = f(x)$?
6. Как называют величину *x* для функции $y = f(x)$?
7. Как называют величину *y* для функции $y = f(x)$?
8. Что называют зависимой переменной или функцией?
9. Что называют независимой переменной или аргументом функции?
10. Какая функция называется числовой функцией?
11. Назовите способы задания функции.
12. Что называется графиком функции $y = f(x)$?

12.3. Графики некоторых функций

Словарь к теме

квадрати́чная фу́нкция	пара́бола
лине́йная фу́нкция	куби́ческая пара́бола
логарифми́ческая фу́нкция	ве́тви *чего?* пара́болы
показа́тельная фу́нкция	верши́на *чего?* пара́болы
степенна́я фу́нкция	аркко́синус
тригонометри́ческая фу́нкция	арккота́нгенс
обра́тная тригонометри́ческая фу́нкция	акрси́нус
чётная фу́нкция	аркта́нгенс
нечётная фу́нкция	синусо́ида
пряма́я ли́ния[34]	косинусо́ида
углово́й коэффицие́нт *чего?* прямо́й	выполня́ться
напра́влен, - а, - о, -ы *куда?* вверх / вниз	выполня́ется усло́вие
проходи́ть - пройти́ *через что?*	принадлежа́щий *чему?*
гипе́рбола	изображе́ние
ве́тви *чего?* гипе́рболы	изобража́ть - изобрази́ть

Записи **читают:**

$y = kx + b$ – игрек рав**ен** ка икс плюс бэ;

$y = |x|$ – игрек рав**ен** модуль икс;

$y = x^{\alpha}$ – игрек рав**ен** икс **в** степен**и** альфа;

$y = a^{x}$ – игрек рав**ен** а **в** степен**и** икс;

$y = \log_a x$ – игрек рав**ен** логарифм икс **по** основани**ю** а;

$y = \sin x$ – игрек рав**ен** си́нус икс;

$y = \cos x$ – игрек рав**ен** ко́синус икс;

$y = \mathrm{tg}\, x$ – игрек рав**ен** та́нгенс икс;

$y = \mathrm{ctg}\, x$ – игрек рав**ен** кота́нгенс икс;

$y = \arcsin x$ – игрек рав**ен** аркси́нус икс;

$y = \arccos x$ – игрек рав**ен** аркко́синус икс;

$y = \mathrm{arctg}\, x$ – игрек рав**ен** аркта́нгенс икс;

$y = \mathrm{arcctg}\, x$ – игрек рав**ен** арккота́нгенс икс;

$k = \mathrm{tg}\alpha$ – ка равн**о** та́нгенс а́льфа.

Задание 5. А) Прочитайте текст.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b,$ где $k \neq 0.$ Её график – прямая линия (рис. 6). Уравнение $y = kx + b$ – это уравнение прямой с угловым коэффициентом. Число k называют **угловым коэффициентом**

[34] Прямая линия = прямая.

прямой. Если α – угол между положительным направлением оси *OX* и прямой, то $k = \mathrm{tg}\alpha$. Если *b* = 0, то прямая проходит через начало координат.

Если $k > 0$, то α – острый угол. Если $k < 0$, то α – тупой угол. Если $k = 0$, то прямая параллельна оси *OX*.

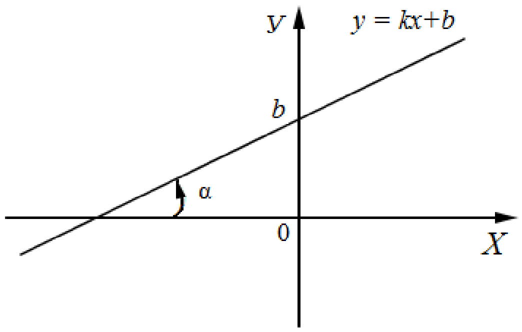


Рис. 6

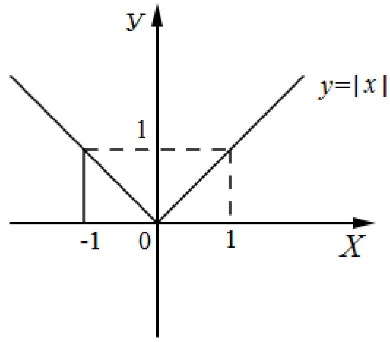


Рис. 7

График функции $|x| = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0, \\ x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$ изображён на рисунке 7.

График функции $y = |x|$ симметричен относительно оси *OY*.

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Её график – **парабола**. Парабола имеет две ветви и одну вершину. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх (рис. 8). Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 9).

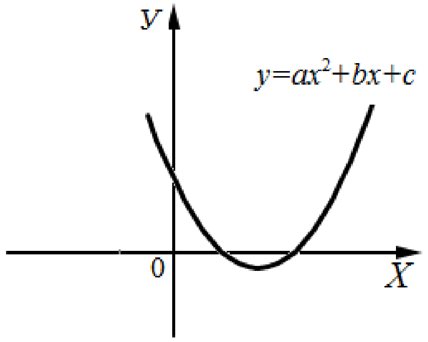


Рис. 8

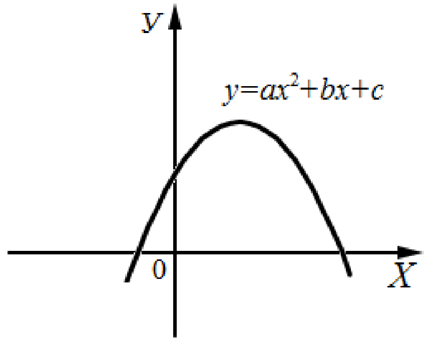


Рис. 9

Степенно́й функцией называют функцию вида $y = x^{\alpha}$, где $a \in R$. Например, $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ – это степенные функции.

На рисунке 10 изображён график степенной функции $y = x^3$. График функции $y = x^3$ называют **кубической параболой**.

На рисунке 11 изображён график степенной функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$. График функции $y = \frac{k}{x}$ называют **гиперболой**. Гипербола имеет две ветви.

Если $k>0$, то ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$ расположены в первой и третьей четвертях (рис. 11).

Если $k<0$, то ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$ расположены **во** второй и четвёртой четвертях.

Графики функций $y=x^3$ и $y=\frac{k}{x}$ симметричны относительно начала координат.

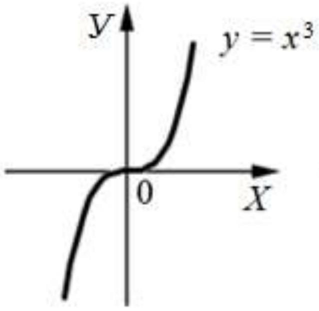


Рис. 10

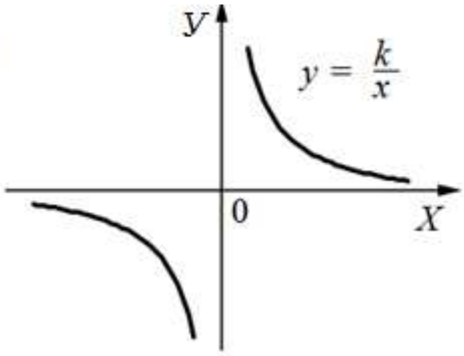
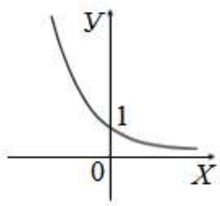
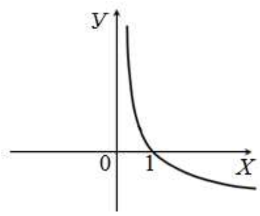
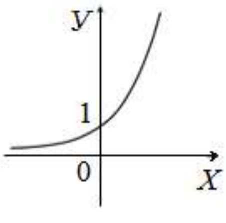
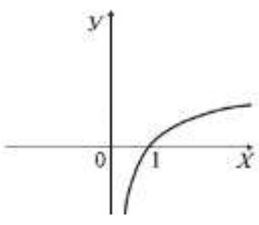


Рис. 11

Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$.

Логарифмической функцией называется функция вида $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1,\ x>0$.

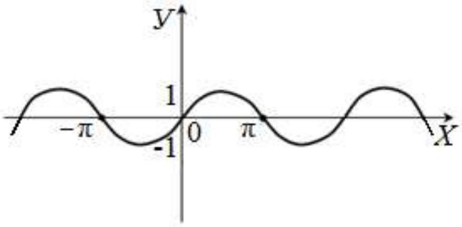
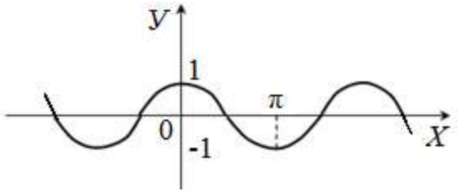
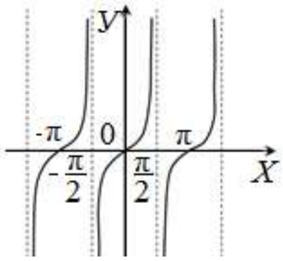
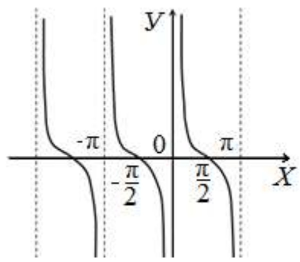
Ниже представлены графики показательных и логарифмических функций.

Показательная функция		**Логарифмическая функция**	
Формула	**График функции**	**Формула**	**График функции**
1. $y=a^x$, $0<a<1$, $y\in(0;+\infty)$.		**1.** $y=\log_a x$, $0<a<1$, $x\in(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.	
2. $y=a^x$, $a>1$, $y\in(0;+\infty)$.		**2.** $y=\log_a x$, $a>1$, $x\in(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.	

Тригонометрическими функциями называют функции вида $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}\,x$. Множество значений функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ – это отрезок $[-1;1]$. Множество значений функций $y=\mathrm{tg}\,x$ и

$y = \operatorname{ctg} x$ – это множество всех действительных чисел. Графики функций $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ симметричны относительно начала координат. График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси OY.

Ниже изображены графики тригонометрических функций.

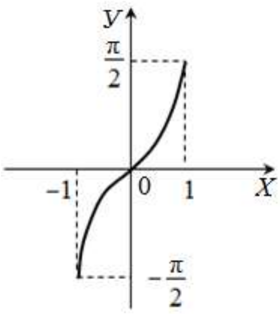
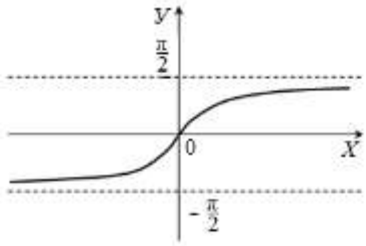
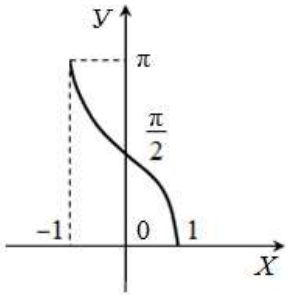
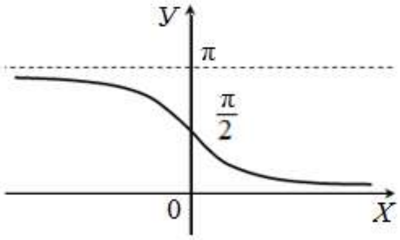
Тригонометрические функции	
Формула	**График функции**
1. $y = \sin x$, $T = 2\pi$, где T – период функции, $x \in R$, $y \in [-1;1]$. График функции – синусóида.	
2. $y = \cos x$, $T = 2\pi$, где T – период функции, $x \in R$, $y \in [-1;1]$. График функции – косинусóида.	
3. $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$, где T – период функции, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, $y \in R$.	
4. $y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$, где T – период функции, $x \neq k\pi, k \in Z$, $y \in R$.	

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

Область определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ – это отрезок $[-1;1]$. Область определения функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ – это множество всех действительных чисел.

Графики функций $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ симметричны относительно начала координат.

Ниже представлены графики обратных тригонометрических функций.

Обратные тригонометрические функции			
Формула	**График функции**	**Формула**	**График функции**
1. $y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.		**3.** $y = \mathrm{arctg}\, x$, $x \in R$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.	
2. $y = \arccos\ x$, $x \in [-1;1]$, $y \in [0;\ \pi]$.		**4.** $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in R$, $y \in (0;\pi)$.	

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какая функция называется линейной?
2. Как называют график линейной функции?
3. Какая функция называется квадратичной?
4. Как называют график квадратичной функции?
5. Когда ветви параболы направлены вверх?
6. Когда ветви параболы направлены вниз?
7. Какую функцию называют степенной?
8. График какой функции называют кубической параболой?
9. График какой функции называют гиперболой?
10. Сколько ветвей имеет гипербола?
11. Где расположен график функции $y = \frac{1}{x}$?
12. Какая функция называется показательной?
13. Какая функция называется логарифмической?
14. Какие функции называются тригонометрическими?
15. Какие функции называются обратными тригонометрическими?
16. Как называют графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

Задания и упражнения

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

Рассмотрим координатную плоскость *ХОУ*. Оси *ОХ* и *ОУ* называются _______ ___________. Ось *ОХ* – это _____ _________. Ось *ОУ* – это _____ _____________. Точка *О* – это _________ ______________. Начало координат и оси координат называют ____________ __________ _____________. Оси *ОХ* и *ОУ* делят координатную плоскость на ________ ______________.

Рассмотрим точку *М*(*x*; *y*). Числа *x* и *y* называют _____________ точки *М*. Число *x* называют _____________ ____ точки *М*. Число *y* называют _____________ точки *М*. Если $x > 0$, $y > 0$, то точка *М*(*x*; *y*) находится в _________ ___________. Если $x = 0$, $y > 0$, то точка *М*(0; *y*) лежит на _________ ___________. Точки *М*(*x*; *y*) и *N*(-*x*; *y*) симметричны относительно _______ ______________. Точки *М*(*x*; *y*) и *К*(*x*; -*y*) симметричны относительно _______ ______________.

Задание 2. Установите соответствие между названием функции и её формулой.

Название функции	Формула
тригонометрическая функция	$y = x^2$
логарифмическая функция	$y = kx + b$
обратная тригонометрическая функция	$y = \frac{1}{x}$
квадратичная функция	$y = \sin x$
линейная функция	$y = a^x$
степенная функция	$y = \log_a x$
показательная функция	$y = \arcsin x$

Задание 3. Установите соответствие между функцией и её графиком.

Функция	График функции
$y = x^2$	гипербола
$y = kx + b$	парабола
$y = x^{-1}$	график функции расположен в I и II четвертях
$y = \sin x$	прямая
$y = \cos x$	график функции расположен в I и IV четвертях
$y = a^x$	график функции расположен в I и III четвертях
$y = \log_a x$	синусоида
$y = \arcsin x$	косинусоида

Упражнение 1. Постройте графики функции. Как называется функция? Как называется график функции?

1) $y=2x+3$; 2) $y=4-x^2$; 3) $y=2-x$;

4) $y=x^2$; 5) $y=-\dfrac{3}{x}$; 6) $y=\dfrac{2}{x}$;

7) $y=x^3$; 8) $y=|x|$; 9) $y=\sin x$;

10) $y=\cos x$; 11) $y=\operatorname{tg} x$; 12) $y=\operatorname{ctg} x$.

Задание 4. А) Прочитайте примеры. Образуйте прилагательные от существительных, используйте суффиксы в скобках. Проверьте слова по словарю.

существительное	**суффикс**	**прилагательное**
математ**ика**	-ическ-	математи́ческий
метр	-ов-	метро́вый
квадрат	-н-	квадра́тный
десят**ь**	-ичн-	десяти́чный
пространств**о**	-енн-	простра́нственный

1) аналит**ик**а (-ическ-) – ________________
2) граф**ик** (-ическ-) – ________________
3) квадрат (-ичн-) – ________________
4) компьютер (-н-) – ________________
5) координат**а** (-н-) – ________________
6) куб (-ическ-) – ________________
7) логарифм (-ическ-) – ________________
8) параллель (-н-) – ________________
9) перпендикуляр (-н-) – ________________
10) показатель (-н-) – ________________
11) прямоуголь**ник** (-н-) – ________________
12) симметр**ия** (-ичн-) – ________________
13) степен**ь** (-н-) – ________________
14) табли**ца** (-н-) – ________________
15) тождеств**о** (-енн-) – ________________
16) тригонометр**ия** (-ическ-) – ________________
17) числ**о** (-ов-) – ________________
18) фигур**а** (-н-) – ________________

Задание 5. Составьте словосочетания с прилагательными из задания 4.

Задание 6. Поставьте глаголы в скобках в форму первого лица множественного числа будущего времени.

Образец: (Решить) **Решим** уравнение.

1. (Рассмотреть) ______________ координатную плоскость *XOY*.
2. (Выбрать) ________________ на оси *OX* масштаб.
3. (Построить) _______________ график функции.

4. (Отметить) ___________ точку на плоскости.

5. (Поставить) _______________ в соответствие элемент множества.

6. (Установить) ________________ соответствия между функцией и её графиком.

7. (Изучить) ______________ свойства функций.

8. (Привести) _____________ пример степенной функции.

9. (Найти) ____________ значение синуса 45^0.

10. (Вспомнить) ____________________ график функции $y = \sin x$.

11. (Назвать) __________________ абсциссу точки $M(x,y)$.

12. (Выучить) _______________ названия графиков функций.

13. (Прологарифмировать) ___________________ обе части равенства.

14. (Изобразить) _______________ прямую линию на плоскости.

15. (Провести) ______________ прямую через две точки.

16. (Принять) _______________ за положительное направление оси.

17. (Задать) ________________ функцию формулой $y = f(x)$.

18. (Проверить) _________________ условие.

19. (Раскрыть) _______________ модуль икс по определению.

20. (Объяснить) ________________ решение примера.

21. (Выразить) _____________ x через y.

22. (Подставить) _____________ вместо x число 2.

23. (Обозначить) ____________ буквой O начало координат.

24. (Прочитать) ______________ знаки и символы.

25. (Выполнить) ________________ задание.

Задание 7. А) Прочитайте текст.

Пусть множество X – область определения функции $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной функцией**, если для любого значения аргумента $x \in X$ (икс ма́ленького, принадлежащ**его** икс большо́му) выполняются условия:

$$1)\ -x \in X\ ; \qquad 2)\ f(-x) = f(x).$$

Функция $y = f(x)$ называется **нечётной функцией**, если для любого значения аргумента $x \in X$ выполняются условия:

$$1)\ -x \in X\ ; \qquad 2)\ f(-x) = -f(x).$$

График чётной функции симметричен относительно оси́ ординат (оси́ OY). График нечётной функции симметричен относительно начала координат – точки $O(0;0)$.

Функция $y = x$ – это нечётная функция, потому что $f(-x) = -x = -f(x)$. График функции $y = x$ симметричен относительно начала координат – точки $O(0;0)$.

Функция $y = x^2$ является чётной, потому что $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси́ OY.

Б) Приведите примеры чётных и нечётных функций. Объясните, почему эти функции чётные или нечётные.

Тема 13. Уравнения и неравенства

13.1. Уравнения

Словарь к теме

дискримина́нт	логарифми́ческое уравне́ние
заме́на *чего?* переме́нной	квадра́тное уравне́ние
переме́нная под зна́ком *чего?*	показа́тельное уравне́ние
коэффицие́нт *при чём?*	просте́йшее уравне́ние
уравне́ние	тригонометри́ческое уравне́ние
уравне́ние *с чем?* с неизве́стным	ве́рное ра́венство
уравне́ние имее́т *что?*	не́сколько
ко́рень *чего?* уравне́ния	отли́чный -ая, -ое, -ые *от кого?/чего?*
преобразова́ние *чего?* уравне́ния	подо́бные слага́емые
член *чего?* уравне́ния	равноси́льно *чему?*
удовлетворя́ть *чему?* уравне́нию	своди́ть - свести́ *к чему?*
лине́йное уравне́ние	тожде́ственный = равноси́льный

Записи **читают:**

$ax+b=0$ – а икс плюс бэ равно нулю;

$ax^2+bx+c=0$ – а икс квадрат плюс бэ икс плюс цэ равно нулю;

$D=b^2-4ac$ → дэ равно бэ в квадрате минус четыре а, цэ;
→ дискриминант рав**ен** бэ в квадрате минус четыре а, цэ;

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ – икс один, два рав**ен** минус бе плюс минус корень из дэ (из дискриминанта) разделить на два а;

$x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ – икс один рав**ен** икс два равен минус бэ разделить на два а;

$a^x=a^y$ – а в степени икс равн**о** а в степени игрек;

$\log_a x=\log_a y$ – логарифм икс **по** основани**ю** а рав**ен** логарифм**у** игрек **по** основани**ю** а;

$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$ – икс равен минус один **в** степен**и** эн аркси́нус а плюс пи эн;

$x=\pm\arccos a+2\pi n$ – икс равен плюс минус аркко́синус а плюс два пи эн;

$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n$ – икс равен аркта́нгенс а плюс пи эн;

$x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n$ – икс равен арккота́нгенс а плюс пи эн;

$a\in[-1;1]$ – а принадлежит отрезк**у** **от** минус одн**ого** **до** одн**ого**.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Уравнение – это равенство двух выражений, которое содержит одну или несколько неизвестных переменных.

Значения переменных, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство, называют **корнями уравнения** или **решениями уравнения**.

Уравнение может иметь только один корень, несколько корней, бесконечное множество корней или не иметь корней.

Решить уравнение – значит найти все его корни или убедиться, что уравнение не имеет корней.

Рассмотрим следующие виды уравнений:

1) линейные уравнения;
2) квадратные уравнения;
3) показательные уравнения;
4) логарифмические уравнения;
5) тригонометрические уравнения.

Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида $ax+b=0$, где x – неизвестное, a и b – любые числа. Число a называется **коэффициентом при неизвестном**, число b – **свободным членом**.

Например, $2x-5=0$ – это линейное уравнение с неизвестным x. Значение $x=2{,}5$ – это корень уравнения $2x-5=0$, потому что число 2,5 обращает уравнение в верное числовое равенство: $2\cdot 2{,}5-5=0$.

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b и c – некоторые числа, $a\neq 0$, x – неизвестное. Числа a, b и c называются **коэффициентами квадратного уравнения**. Коэффициент c называется **свободным членом**.

Чтобы решить квадратное уравнение, надо сначала найти **дискриминант квадратного уравнения.** Дискриминант квадратного уравнения находят по формуле

$$D=b^2-4ac.$$

Рассмотрим три случая решения квадратного уравнения.

Случай	Корни квадратного уравнения
1. Пусть $D > 0$.	Уравнение имеет 2 разных корня, которые находят по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
2. Пусть $D = 0$.	Уравнение имеет 2 одинаковых корня, которые находят по формуле $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$
3. Пусть $D < 0$.	Уравнение не имеет действительных корней.

Показательные уравнения – это уравнения, которые содержат неизвестное x в показателе степени.

Простейшее показательное уравнение имеет вид $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$. При решении показательных уравнений используют равенство: $a^x = a^y$. Из равенства $a^x = a^y$ находят значение x, которое равно значению y.

Некоторые показательные уравнения можно свести к квадратным уравнениям с помощью замены $a^x = t$, где $t > 0$.

Например, уравнение $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$ сводится с помощью замены $3^x = t$ к квадратному уравнению $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Уравнение, которое содержит неизвестную переменную под знаком логарифма и (или) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1, x > 0$. Область определения логарифмической функции – это множество положительных действительных чисел. При решении логарифмических уравнений используют равенство: $\log_a x = \log_a y$. Из этого равенства находят значение x, которое равно значению y.

Некоторые логарифмические уравнения можно свести к квадратным уравнениям с помощью замены $\log_a x = t$.

Например, уравнение $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ сводится с помощью замены $\lg x = t$ к квадратному уравнению $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Тригонометрические уравнения – это уравнения, которые содержат неизвестную переменную под знаком тригонометрической функции.

Например, $\sin 3x = 1$, $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$, $\operatorname{ctg} 2x = 1$, $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$ – это тригонометрические уравнения.

К **простейшим тригонометрическим уравнениям** относятся уравнения вида

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Чтобы решить простейшие тригонометрические уравнения, надо знать формулы, которые представлены в таблице.

Простейшие тригонометрические уравнения	**Решения**
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$, $a \in [-1;1]$
$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$, $a \in [-1;1]$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$

Решение многих тригонометрических уравнений сводится к решению простейших уравнений с помощью замены переменной или преобразований.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Что называется уравнением?
2. Что называется решением или корнем уравнения?
3. Что значит решить уравнение?
4. Как называется уравнение вида $ax+b=0$, где a и b – любые числа?
5. Как называется число a в уравнении $ax+b=0$?
6. Как называется число b в уравнении $ax+b=0$?
7. Какое уравнение называется квадратным уравнением?
8. По какой формуле находят дискриминант квадратного уравнения?
9. Когда квадратное уравнение имеет два различных корня?
10. По какой формуле находят корни квадратного уравнения?
11. Когда квадратное уравнение имеет два одинаковых корня?
12. Когда квадратное уравнение не имеет действительных корней?
13. Какое равенство используют при решении показательного уравнения?
14. Какое равенство используют при решении логарифмического уравнения?

13.2. Неравенства

Запись **читают:**

$5\cdot(3x+4)<2 \Leftrightarrow 15x+20<2$ – неравенств**о** $5\cdot(3x+4)<2$ **равносильно** неравенств**у** $15x+20<2$.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Если два выражения соединены знаками <, >, ≤, ≥, то говорят, что задано **неравенство**. Если два выражения соединены знаками < или >, то это **строгое неравенство**. Если два выражения соединены знаками ≤ или ≥, то это **нестрогое неравенство**.

Решить неравенство – значит найти значения переменных, которые обращают это неравенство в верное числовое неравенство.

Б) Прочитайте неравенства и их решения.

1. Решите неравенство $3(4x-6)-15>x$.

Решение. $3(4x-6)-15>x \Leftrightarrow 12x-18-15>x \Leftrightarrow 12x-x>18+15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11x>33 \Leftrightarrow x>3$.

Следовательно, решением неравенства является интервал $(3;+\infty)$.

Ответ: $x\in(3;+\infty)$.

2. Решите неравенство $2-4(x-3)\le 3x+7$.

Решение. $2-4(x-3)\le 3x+7 \Leftrightarrow 2-4x+12\le 3x+7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4x-3x\le 7-2-12 \Leftrightarrow -7x\le -7 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Следовательно, решением неравенства является полуинтервал $[1;+\infty)$.

Ответ: $x\in[1;+\infty)$.

В) Прочитайте примеры некоторых неравенств.

Название неравенства	**Вид неравенства**	**Условие**
Линейное неравенство	$ax+b\le 0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b>0$, $ax+b<0$	$a\ne 0$
Квадратное неравенство	$ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$	$a\ne 0$
Простейшее показательное неравенство	$a^x\le b$, $a^x\ge b$, $a^x<b$, $a^x>b$	$a>0$, $b>0$, $a\ne 1$
Простейшее логарифмическое неравенство	$\log_a x\le b$, $\log_a x\ge b$, $\log_a x<b$, $\log_a x>b$	$a>0$, $a\ne 1$, $x>0$
Простейшее тригонометрическое неравенство	$\sin x\le a$, $\sin x\ge a$, $\sin x<a$, $\sin x>a$, $\cos x\le a$, $\cos x\ge a$, $\cos x<a$, $\cos x>a$, $\mathrm{tg}x\le b$, $\mathrm{tg}x\ge b$, $\mathrm{tg}x<b$, $\mathrm{tg}x>b$, $\mathrm{ctg}x\le b$, $\mathrm{ctg}x\ge b$, $\mathrm{ctg}x<b$, $\mathrm{ctg}x>b$	$a\in[-1;1]$, $b\in R$

Г) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Когда говорят, что задано неравенство?
2. Когда неравенство является строгим?
3. Когда неравенство является нестрогим?
4. В неравенстве можно раскрывать скобки?
5. Можно прибавлять к обеим частям неравенства одно и то же выражение?
6. Можно прибавлять к обеим частям неравенства разные выражения?
7. Что будет со знаком неравенства, если умножить обе части неравенства на одно и то же положительное число?
8. Что будет со знаком неравенства, если умножить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число?
9. Приведите пример строгого линейного неравенства.
10. Приведите пример нестрогого линейного неравенства.
11. Приведите пример строгого квадратного неравенства.
12. Приведите пример нестрогого квадратного неравенства.
13. Приведите пример строгого показательного неравенства.
14. Приведите пример нестрогого логарифмического неравенства.
15. Приведите примеры строгого и нестрогого тригонометрического неравенства относительно $\cos x$.

Задания и упражнения

Задание 1. Приведите примеры:

1) линейного уравнения;
2) квадратного уравнения;
3) показательного уравнения;
4) логарифмического уравнения;
5) тригонометрического уравнения;
6) квадратного уравнения относительно $\sin x$;
7) квадратного уравнения относительно $\ln x$.

Задание 2. Установите соответствие между выражением и его названием.

Выражение	Название
$x^2 - 4 \geq 0$	линейное уравнение
$\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$	линейное неравенство
$16^x - 2 \cdot 12^x \leq 3^{2x+1}$	квадратное уравнение
$x + 1 \geq 0$	квадратное неравенство
$x^2 + 2x + 5 = 0$	показательное уравнение
$\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$	показательное неравенство
$\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$	логарифмическое уравнение
$2x - 3 = 0$	логарифмическое неравенство
$5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-1} = 26$	тригонометрическое уравнение
$\ln(x+1) > 0$	тригонометрическое неравенство

Задание 3. Поставьте слова в скобках в нужную форму.

Равенство двух выражений, каждое из которых содержит одну или несколько неизвестных переменных, называется ______________ (уравнение).

Значения переменных, которые обращают уравнение в верное числовое равенство, называются _______________ (корни) уравнения.

(Линейное уравнение)_____________ _____________ с одним неизвестным называется уравнение вида $ax + b = 0$, где x – неизвестное, a и b – любые числа. Число a называется ______________ (коэффициент) при неизвестном. Число b называется _____________ ______________ (свободный член).

(Квадратное уравнение) _____________ __________ называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Числа a, b и c называются _______________ (коэффициенты) квадратного уравнения. Коэффициент c называется _______________ ___________ (свободный член). Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется ________________ (дискриминант) квадратного уравнения.

Уравнение, которое содержит неизвестную переменную под знаком логарифма, называется _________________ ______________ (логарифмическое уравнение). Уравнение $\log_a x = b$ называется ___________ _________________ ___________________ (простейшее логарифмическое уравнение). Множество положительных действительных чисел является ___________ ____________ (область определения) уравнения $\log_a x = b$.

Задание 4. **А)** Переведите слова и словосочетания: пра́вая (левая) часть неравенства, вы́колотая точка, закра́шенная точка, ме́тод интерва́лов, чередова́ться.

Б) Прочитайте тексты 1 и 2. Поставьте глаголы в скобках в форму первого лица множественного числа будущего времени.

Текст 1. Решим линейное неравенство $5\cdot(x-4)+5>2x$.

(Раскрыть) ___________________ скобки в левой части неравенства $5x-5\cdot4+5>2x$. В правую часть неравенства (перенести) ___________ числа с противоположными знаками. В левую часть неравенства (перенести) ________________ переменные с противоположными знаками. (Получить) ______________ $5x-2x>20-5$. (Привести) _________ подобные слагаемые. Получим $3x>15$. (Разделить) _________ обе части неравенства на число 3. Знак неравенства при этом не изме́нится. (Получить) _______________ $x>5$. (Построить) ____________ числову́ю ось (рис. 12).

(Отметить) _____________ на числовой оси число 5 выколотой точкой, потому что неравенство строгое. Значения $x>5$ находятся на числовой оси справа от числа 5. (Записать) _______ решение неравенства: $x \in (5;+\infty)$.

Текст 2. Решим квадратное неравенство $x^2-4x+3\geq0$ **методом интервалов**.

(Найти) ________________ корни квадратного уравнения $x^2-4x+3=0$. (Найти) _________________ дискриминант квадратного уравнения по формуле $D=b^2-4ac$. (Получить) ____________ $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4$. Дискриминант $D>0$. Следовательно, уравнение имеет два корня. (Найти) ___________ корни уравнения по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. (Получить) ___________ $x_1=\dfrac{4+2}{2\cdot1}=3$, $x_2=\dfrac{4-2}{2\cdot1}=1$. (Построить) ___________________ числовую ось. (Отметить) _____________ на числовой оси значения x_1 и x_2 закрашенными точками, потому что неравенство нестрогое. Чи́сла 1 и 3 разбивают числову́ю ось на три интервала. (Определить) ________________ знак функции $y=x^2-4x+3$ на каждом интервале. При $x=0$ (получить) ___________ знак «+». При $x=2$ (получить) ___________ знак «–». При $x=4$ (получить) __________ знак «+». Знаки неравенства чередуются (рис. 13).

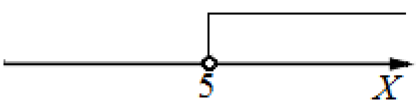


Рис. 12

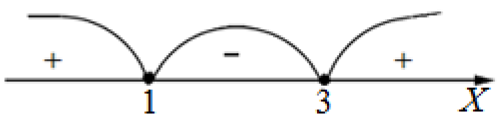


Рис. 13

(Выбрать) ____________________ интервалы со знаком «+», потому что $x^2-4x+3\geq 0$. Следовательно, решением неравенства $x^2-4x+3\geq 0$ является множество *x*, таких, что $x\in(-\infty;1]\cup[3,+\infty)$.

Задание 5. Решите неравенства и объясните решение.

1) $3x-4>0$; 2) $5-6x\leq 0$; 3) $3+x<0$;

4) $x^2-2x+1\geq 0$; 5) $x^2-5x+6<0$; 6) $x^2-2x-3\leq 0$;

7) $x^2+4x+4<0$; 8) $-x^2+7x-10>0$; 9) $x^2+6x+9>0$.

Упражнение 1. Прочитайте уравнения и неравенства и определите их названия.

1) $5^{x+2}=125$; 2) $3x\geq 1$; 3) $2\sin 3x\sin x=0$;

4) $\sin 3x\leq 1$; 5) $\log_x(3x-1)>0$; 6) $1-5x\geq 0$;

7) $\mathrm{tg}3x=\sqrt{3}$; 8) $\ln^3(5x+1)<0$; 9) $2x^2+x>0$;

10) $\sin 2x\leq\frac{1}{2}$; 11) $\mathrm{ctg}2x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$; 12) $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$;

13) $2^x>16$; 14) $1+x^2=3x$; 15) $\lg(10-x)=4$.

Задание 6. Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	**Конец предложения**
Линейное уравнение с одним неизвестным – это…	выражение $D=b^2-4ac$.
В квадратном уравнении числа a, b и c – это…	уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c – некоторые числа, $a\neq 0$, x – неизвестное.
В линейном уравнении с одним неизвестным число b – это…	уравнение вида $ax+b=0$, где a и b – некоторые числа, $a\neq 0$, x – неизвестное.
Корень уравнения – это…	строгое квадратное неравенство.
В линейном уравнении с одним неизвестным число a – это…	значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.
Неравенство $ax^2+bx+c<0$ – это…	свободный член.
Дискриминант квадратного уравнения – это…	коэффициент при неизвестном.
Квадратное уравнение – это…	коэффициенты квадратного уравнения.
Уравнение $a^x=b$ – это …	простейшее тригонометрическое уравнение.
Уравнение $\sin x=a$, где $a\in[-1;1]$ – это …	простейшее показательное уравнение.

Тема 14. Геометрия

14.1. Геометрия на плоскости

Словарь к теме

гео́метрия диагона́ль квадра́т квадра́тные едини́цы многоуго́льник окру́жность (ж.р.) диа́метр *чего?* окру́жности длина́ *чего?* окру́жности ра́диус *чего?* окру́жности центр *чего?* окру́жности пери́метр планиме́трия пло́щадь (ж.р.) прямоуго́льник расстоя́ние ромб теоре́ма трапе́ция треуго́льник произво́льный треуго́льник прямоуго́льный треуго́льник равнобе́дренный треуго́льник	равносторо́нний треуго́льник верши́на *чего?* треуго́льника высота́ *чего?* треуго́льника медиа́на *чего?* треуго́льника сторона́ *чего?* треуго́льника у́гол у́гол *при чём?* при вершине о́стрый у́гол прямо́й у́гол биссектри́са *чего?* угла́ фигу́ра четырёхуго́льник паралле́льно, -а, -ы попа́рно паралле́льны[35] перпендикуля́рно, -а, -ы противополо́жные сто́роны равноудалена́, -о, -ы опуска́ть - опусти́ть *что? на что?* проводи́ть - провести́ *что? из чего?* проходи́ть - пройти́ *через что?* соединя́ть - соедини́ть *что? с чем?*

Записи **читают:**

ΔABC – треугольник а, бэ, цэ;

$S_{\Delta ABC}$ – площадь треугольника а, бэ, цэ;

$\angle A$ – угол а;

$\angle BAC = B\hat{A}C$ – угол бэ, а, цэ;

$\angle ACB = 90^0$ – угол а, цэ, бэ рав**ен** девяност**а** градус**ам** (угол а, цэ, бэ – прямой);

$AC \perp CB$ – (сторон**а)** а, цэ перпендикулярн**а** (сторон**е)** цэ, бэ;

$CK \perp BA$ – (отрезок) цэ, ка перпендикуляр**ен** (отрезк**у**) бэ, а;

$\angle A = \angle B$ – угол а рав**ен** угл**у** бэ;

$\angle CAM = \angle MAC$ – угол цэ, а, эм рав**ен** угл**у** эм, а, цэ;

$BC \,||\, AD$ – (сторон**а**) бэ, цэ параллельн**а** (сторон**е**) а, дэ;

---

[35] Попа́рно паралле́льны = паралле́льны па́рами.

$S = \frac{1}{2}ah$ – эс равн**о** одна вторая а на аш (площадь равн**а** половин**е** произведения основания на высоту);

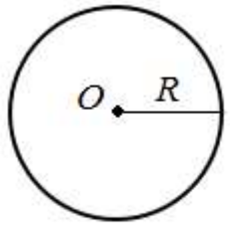
$c^2 = a^2 + b^2$ – цэ квадрат равн**о** а квадрат плюс бэ квадрат (квадрат гипотенузы рав**ен** сумме квадратов катетов).

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучают точку, расстояние между двумя точками, прямую и фигуры на плоскости. Рассмотрим некоторые фигуры на плоскости.

Рассмотрим некоторые фигуры на плоскости.

Окружность – это геометрическое место всех точек плоскости, которые равноудалены от заданной точки O (рис. 14). Точку O называют **центром окружности**. Расстояние от точки O до любой точки окружности называют **радиусом окружности**. Радиус окружности обозначают большой латинской буквой R или маленькой латинской буквой r.



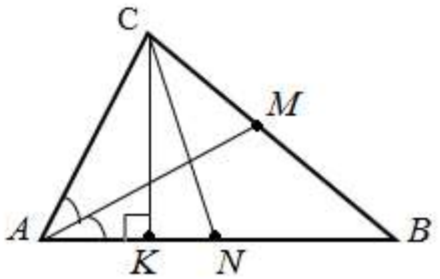


Рис. 14. Окружность　　　　Рис. 15. Треугольник ABC

Диаметр окружности – это отрезок, который проходит через центр окружности и соединяет две точки окружности. Диаметр окружности обозначают буквой d. Диаметр окружности находят по формуле $d = 2R$. Длину окружности находят по формуле $L = 2\pi R$.

Треугольник – это геометрическая фигура. Треугольник состоит из трёх точек, которые последовательно соединены отрезками. Треугольник имеет три вершины, три стороны и три угла. Вершины треугольника не лежат на одной прямой.

Рассмотрим произвольный ΔABC и его элементы (рис. 15). Пусть точка N делит отрезок AB пополам ($AN = NB$). Соединим точку N с вершиной C. Получим отрезок NC. Отрезок NC называют **медианой** ΔABC.

Проведём из вершины A прямую, которая делит угол при вершине A пополам ($\angle CAM = \angle MAB$). Прямую AM называют **биссектрисой** угла A.

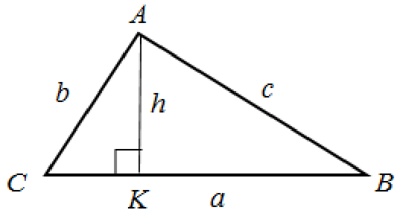
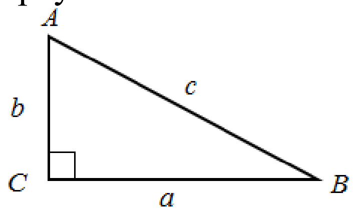
Из вершины C проведём прямую CK перпендикулярно прямой AB. Прямая CK – это **высота**, опущенная[36] из вершины C на сторону AB.

В любом треугольнике можно провести три высоты, три медианы и три биссектрисы.

[36] Высота, опущенная из вершины = высота, которую опустили из вершины.

Если в треугольнике все стороны равны или все углы равны, то треугольник называется **равносторонним**. В равностороннем треугольнике все углы равны 60^0, т.к. сумма всех углов треугольника равна 180^0. Если угол равен 90^0, то его называют **прямым углом**. Если треугольник имеет прямой угол, то треугольник называют **прямоугольным треугольником**. Если в треугольнике *ABC* равны две стороны (*AB* = *BC*), то треугольник называют **равнобедренным**, а сторону *AC* называют **основанием** треугольника.

Запишем элементы треугольника и некоторые формулы для треугольника.

Некоторые виды треугольников	**Элементы треугольника**	**Формулы**
1. Произвольный треугольник 	Точки *A*, *B*, *C* – это вершины треугольника. Отрезки *AB*, *AC*, *BC* – это стороны треугольника. $AK \perp CB$, где *AK* – это высота, опущенная из вершины *A* на сторону *CB*.	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ – площадь треугольника; $P = a + b + c$ – периметр ΔABC.
2. Прямоугольный треугольник 	$AC \perp CB$, т.е. $\angle ACB = 90^0$, сторона *AB* – гипотенуза, стороны *CA* и *CB* – катеты.	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ – площадь треугольника; $c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.

Четырёхугольник – это геометрическая фигура. Четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и четыре угла.

Трапеция – это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны. Параллельные стороны трапеции называют **основаниями трапеции**.

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны[37].

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что изучает планиметрия?
2. Запишите формулу длины окружности через её диаметр.
3. Чему равна сумма всех углов треугольника?
4. В каком треугольнике все углы равны 60^0?
5. Как называют треугольник, в котором один угол равен 90^0?

[37] Попа́рно паралле́льны = паралле́льны па́рами.

6. Найдите угол (в градусах) треугольника, если сумма двух других углов треугольника равна 150^0?

7. Сколько высот можно построить в треугольнике?

8. Как называют параллельные стороны трапеции?

9. Назовите четырёхугольники, у которых все углы прямые.

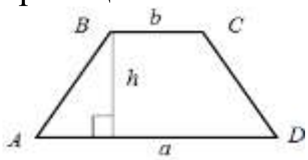
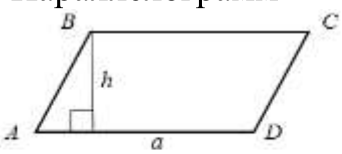
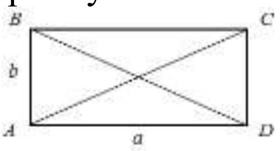
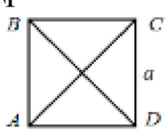
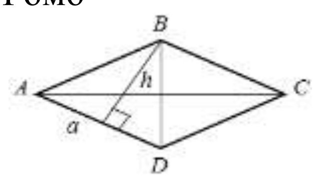
10. Назовите четырёхугольники, у которых стороны попарно параллельны.

11. Назовите четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны.

12. Назовите четырёхугольники, у которых углы равны.

13. Назовите четырёхугольник, у которого все стороны равны и углы равны.

В) Изучите основные виды четырёхугольников и их элементы.

Виды четырёхугольников	**Элементы четырёхугольников**	**Формулы**
1. Трапеция 	Точки *A*, *B*, *C*, *D* – это вершины трапеции. *AB*, *AD*, *BC*, *CD* – это стороны трапеции. $BC \parallel AD$, *BC* и *AD* – основания трапеции.	$S = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$ – площадь трапеции.
2. Параллелограмм 	$BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$. *BD* и *AC* – диагонали параллелограмма, *a* – основание, *h* – высота, опущенная из вершины *B* на сторону *AD*.	$S = a \cdot h$ – площадь параллелограмма.
3. Прямоугольник 	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$. *AB* = *CD*, *BC* = *AD*, *BD* и *AC* – диагонали прямоугольника.	$S = a \cdot b$ – площадь прямоугольника.
4. Квадрат 	$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$. *AB* = *BC* = *CD* = *AD*, *BD* и *AC* – диагонали квадрата.	$S = a^2$ – площадь квадрата.
5. Ромб 	$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. *AB* = *BC* = *CD* = *DA* = *a*, *BD* и *AC* – диагонали ромба; *h* – высота, опущенная из вершины *B* на сторону *AD*.	$S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$ – площадь ромба; $S = a \cdot h$ – площадь ромба.

14.2. Геометрия в пространстве

Словарь к теме

грань (ж.р.) ко́нус круг куб куби́ческие едини́цы объём *чего?* те́ла параллелепи́пед пирами́да треуго́льная пирами́да пло́скость (ж.р.) пло́щадь *чего?* основа́ния пове́рхность (ж.р.)	при́зма четырёхуго́льная при́зма простра́нство ребро́ длина́ *чего?* ребра́ стереоме́трия сфе́ра цили́ндр шар ограни́чен, -а, -о, -ы *чем?* удовлетворя́ть *чему?* уравне́нию

Записи **читают:**

$F(x, y, z) = 0$ – эф **от** икс, игрек, зэт равн**о** нулю;

$z = f(x, y)$ – зэт равн**о** эф **от** икс, игрек;

$S_{осн.}$ – эс основания (площадь основания);

$\pi \approx 3$ – пи приближённо равн**о** тр**ём**;

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – вэ равн**о** четыре третьих пи эр в кубе;

$V = \pi R^2 H$ – вэ равн**о** пи эр в квадрате аш;

$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$ – вэ равн**о** одна третья эс основания умножить на аш (объём рав**ен** одн**ой** треть**ей** площади основания, умноженной[38] на высоту).

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур в пространстве. Фигурами в пространстве являются точки, прямые, плоскости и поверхности.

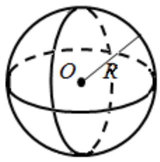
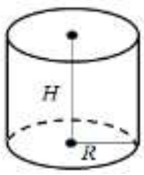
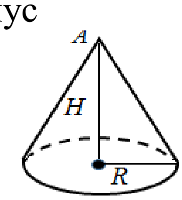
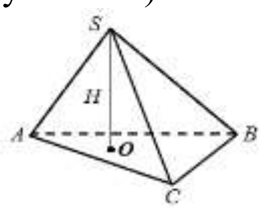
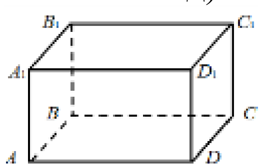
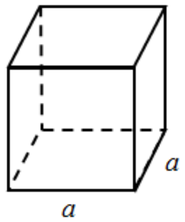
Поверхность в трёхмерном пространстве определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ или уравнению $z = f(x, y)$.

Например, уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение плоскости в пространстве имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

[38] Площадь основания, умноженная на высоту = площадь основания, которую умножили на высоту.

Рассмотрим некоторые поверхности в пространстве.

Виды поверхностей	**Элементы поверхностей**	**Формула объёма тела**
1. Сфера 	O – центр сферы, R – радиус сферы.	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ – объём шара, ограниченного[39] сферой.
2. Цилиндр 	H – высота цилиндра, основание цилиндра – круг, R – радиус круга.	$V=\pi R^2 H$, $V=S_{осн.}H$
3. Конус 	A – вершина конуса, H – высота конуса, основание конуса – круг, R – радиус круга.	$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, $V=\frac{1}{3}S_{осн.}H$
4. Пирамида (треугольная) 	S – вершина пирамиды, ABC – основание пирамиды, SA – ребро пирамиды, ASC – грань пирамиды, $SO=H$ – высота пирамиды.	$V=\frac{1}{3}S_{осн.}H$
5. Четырёхугольная призма (параллелепипед) 	$ABCD$ – основание параллелепипеда, грани параллелепипеда – четырёхугольники, рёбра параллелепипеда – отрезки, например, AA_1.	$V=S_{осн.}H$, где H – высота призмы
6. Куб 	Грани куба – квадраты, a – длина ребра куба.	$V=a^3$

[39] Шар, ограниченный сферой = шар, который ограничили сферой.

Запомните!

Фигуры **на** плоскост**и**.
Фигуры **в** пространств**е**.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что изучает стереометрия?
2. Что является фигурой в пространстве?
3. Запишите уравнения поверхности.
4. Назовите поверхности, у которых в основании лежит круг.
5. Постройте четырёхугольную пирамиду.
6. Чему равен радиус сферы, если объём шара, ограниченного сферой, равен 24 кубическим единицам ($\pi \approx 3$)?
7. Что является основанием конуса?
8. Сколько граней имеет куб?
9. Сколько рёбер имеет куб?
10. Что является гранями треугольной пирамиды?
11. Сколько граней имеет треугольная пирамида?
12. Сколько рёбер имеет треугольная пирамида?
13. Чему равна сторона куба, если его объём равен 64 кубическим единицам?
14. Постройте треугольную призму.
15. Что является гранями треугольной призмы?
16. Сколько вершин имеет треугольная призма?

Задания

Задание 1. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Сколько диагоналей имеет ромб?
2. Чему равен угол (в градусах) между диагоналями ромба?
3. Найдите радиус окружности, если длина окружности равна π.
4. Чему равна сторона квадрата, если его площадь равна 256 квадратным единицам?
5. Чему равен периметр квадрата, если его площадь равна 256 квадратным единицам?
6. Приведите примеры поверхностей.
7. Чему равен объём цилиндра, если $R = 2$ и $H = 1$?
8. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания и высоту. Во сколько раз объём цилиндра больше, чем объём конуса?
9. Какая фигура является основанием конуса?
10. Найдите радиус сферы, если её объём равен 36 кубическим единицам.

Задание 2. Поставьте глаголы в скобках в форму первого лица множественного числа будущего времени.

Образец: (Записать) **Запишем** уравнение окружности.

1. (Рассмотреть) ___________ некоторые фигуры на плоскости.
2. (Провести) _______________ прямую через точку A.
3. (Опустить) _______________ перпендикуляр из вершины A на сторону BC.
4. (Соединить) _________________ точку A с точкой C.
5. (Изучить) ______________ фигуры на плоскости и в пространстве.
6. (Обозначить) _______________ радиус окружности буквой R.
7. (Построить) _______________ трапецию.
8. (Получить) ____________ отрезок.

Задание 3. Закончите определения.

Если в треугольнике все стороны равны или все углы равны, то треугольник называется ________________.

Если в треугольнике угол равен 90^0, то треугольник называется ________________.

Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется ____________________.

Четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется ____________________.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется ____________________.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется _________.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется _______________.

Геометрическое место точек, которые равноудалены от заданной точки O, называется ___________________. Точка O называется _______________ _____________.

Задание 4. Прочитайте примеры. Образуйте прилагательные от существительных, используйте суффиксы в скобках. Проверьте слова по словарю.

существительное	**суффикс**	**прилагательное**
математика	-ическ-	математи́ческий
метр	-ов-	метро́вый
квадрат	-н-	квадра́тный
пространство	-енн-	простра́нственный

1) геометр**ия** (-ическ-) – ___________________
2) гипербол**а** (-ическ-) – ___________________
3) диагональ (-н-) – ___________________
4) круг (-ов-) – ___________________
5) куб (-ическ-) – ___________________
6) парабол**а** (-ическ-) – ___________________

7) параллель (-н-) – ________________
8) перпендикуляр (-н-) – ________________
9) поверхност**ь** (-н-) – ________________
10) прямоуголь**ник** (-н-) – ________________
11) сфер**а** (-ическ-) – ________________
12) треуголь**ник** (-н-) – ________________
13) уг**о**л[40] (-ов-) – ________________
14) четырёхуголь**ник** (-н-) – ________________
15) цилиндр (-ическ-) – ________________

Задание 5. Составьте словосочетания с прилагательными из задания 4.

Образец. Квадратные скобки.

Задание 6. А) Прочитайте текст.

Периметр – это сумма длин всех сторон многоугольника. Периметр обозначают большой латинской буквой P. Например, периметр прямоугольника – это сумма длин всех сторон прямоугольника. Периметр прямоугольника со сторонами a и b находят по формуле $P = 2(a + b)$.

Б) Переведите словосочетание: равнобедренная трапеция. Установите соответствие между формулой и её названием.

Формула	Название формулы
1. $P = 4a$	периметр трапеции
2. $P = a + b + c$	периметр квадрата
3. $P = 2(a + b)$	периметр равнобедренного треугольника
4. $P = a + b + c + d$	периметр треугольника
5. $P = a + b + 2c$	периметр параллелограмма
6. $P = a + 2b$	периметр равностороннего треугольника
7. $P = 3a$	периметр равнобедренной трапеции

Задание 7. Установите соответствие между формулой и её названием.

Формула	Название формулы
1. $V = a^3$	объём пирамиды
2. $V = S_{осн.} \cdot H$	объём конуса
3. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$	объём куба
4. $V = \pi R^2 \cdot H$	объём шара
5. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$	объём призмы
6. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	объём цилиндра

[40] Угол (Р.п. угла́, Д.п. углу́, Тв.п. угло́м,).

ЧАСТЬ 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Тема 1. Элементы линейной алгебры

1.1 Матрицы

Словарь к теме

и́ндекс масси́в ма́трица разме́р столбе́ц строка́ табли́ца	дифференциа́льное уравне́ние ква́нтовая тео́рия заключён, заключена́, -о́, -ы́ позволя́ть - позво́лить *что* (*с*)*делать?* предска́зывать - предсказа́ть *что?* шифрова́ть

Матрицы позволяют работать с массивами чисел, функций или математических символов. Матрицы используют в математике, физике, информатике, экономике и так далее. Матрицы помогают решать системы линейных и дифференциальных уравнений, предсказывать значения физических величин в квантовой теории, шифровать сообщения в Интернете и многое другое.

В математике для записи информации часто используют таблицы.

Прямоугольная таблица состоит из строк и столбцов.

это первая строка	→	→
это вторая строка	→	→
это третья строка	→	→

это первый столбец	это второй столбец	это третий столбец
↓	↓	↓
↓	↓	↓

Задание 1. Поставьте существительные в скобках в правильную форму. Прочитайте.

Одна (строка)	Один (столбец)
Две, три, четыре (строка)	Два, три, четыре (столбец)
Пять (6,7, … , 20) (строка)	Пять (6,7, … , 20) (столбец)

Записи **читают:**

$(m \times n)$ – эм на эн;

a_{ij} – а, и, жи;

a_{23} – а, два, три;

$a_{13,1}$ – а, тринадцать, один.

Задание 2. А) Прочитайте элемент по образцу. Обратите внимание, как читать элемент. Определите падежи числительных и существительных.

Образец. Элемент a_{23} **читают:** «а, два, три». Индексы два и три означают, что элемент «а» сто́ит **во** втор**ой** строк**е**, **в** треть**ем** столбц**е**.

Б) Прочитайте элементы матрицы по образцу:

$$a_{11},\ a_{13},\ a_{31},\ a_{33},\ a_{11,1},\ a_{4,11},\ a_{22},\ a_{97},\ a_{32},\ a_{24}.$$

Задание 3. Прочитайте конструкции и примеры их использования в предложениях. Определите падеж существительных.

Что? называется/называют чем?
Множество, которое содержит конечное число элементов, называется конечным множеством.
Что? обозначается/обозначают чем? / как?
Множества обозначают большими латинскими буквами *A, B, C* и т.д.
Что? записывают в виде чего? в чём?
Координаты точки записывают в виде пары чисел в круглых скобках.

Задание 4. А) Прочитайте текст. Обратите внимание на конструкции с глаголами **«называться»**, **«обозначаться»**, **«записывать»**.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым множеством.

Пустое множество обозначается (обозначают) символом $\varnothing$.

Координаты точки записывают в виде пары чисел, которые заключены в круглые скобки (x, y).

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – некоторые числа, $a \neq 0$, x – неизвестное, называется квадратным уравнением.

Множество целых чисел обозначают буквой Z.

Все элементы множества натуральных чисел N записывают в фигурных скобках, т.е. записывают в виде

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}.$$

Б) Ответьте на вопросы, используя конструкции с глаголами **«называться»**, **«обозначаться»**, **«записывать»**.

1. Какое множество называется пустым?
2. Каким символом обозначают пустое множество?
3. В виде чего записывают координаты точки?
4. Что называется квадратным уравнением?
5. Как обозначают множество целых чисел?
6. Как записывают элементы множества N?

Задание 5. Прочитайте конструкцию. Определите падежи существительных.

Что? **изменяется от чего**? **до чего**?

Записи **читают:**

$i = 1, 2, \ldots, m$ – и равно один, два и так далее эм;

$i = \overline{1, m}$ – и изменяется **от** одного **до** эм;

$j = 1, 2, \ldots, n$ – жи равно один, два и так далее эн;

$j = \overline{1, n}$ – жи изменяется **от** одного **до** эн.

Запись $i = \overline{1, m}$ **означает, что** $i = 1, 2, \ldots, m$.

Запись $j = \overline{1, n}$ **означает, что** $j = 1, 2, \ldots, n$.

Задание 6. Прочитайте примеры, используя конструкцию из задания 5.

1) $i = \overline{1,5}$; 2) $j = \overline{2,7}$; 3) $k = \overline{0,10}$; 4) $m = \overline{3,8}$; 5) $l = \overline{1,200}$;

6) $i = \overline{m,n}$; 7) $i = \overline{0,k}$; 8) $j = \overline{5,80}$; 9) $k = \overline{0,72}$; 10) $k = \overline{1,100}$.

Задание 7. А) Прочитайте текст. Обратите внимание на конструкции с глаголами **«называться»**, **«обозначаться»**, **«записывать»**.

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, которая состоит из m строк и n столбцов.

Матрицы обозначают большими латинскими буквами A, B, C и так далее.

В математике матрицы записывают в круглых скобках:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

где a_{ij} – это **элементы матрицы**. Первый индекс i – номер строки ($i = \overline{1, m}$). Второй индекс j – номер столбца ($j = \overline{1, n}$). Элементами матрицы могут быть числа или функции.

Если $m \neq n$ (число строк матрицы не равно числу столбцов), то матрица называется **прямоугольной**.

Б) Ответьте на вопросы, используя конструкции с глаголами **«называться»**, **«обозначаться»**, **«записывать»**.

1. Что называется матрицей размера $(m \times n)$?
2. Как записывают матрицы в математике?
3. Как обозначают элементы матрицы?
4. Что означают первый индекс i и второй индекс j элемента a_{ij}?
5. Какая матрица называется прямоугольной?

Задание 8. Прочитайте примеры и решение.

Пример 1.

Матрица размера (2×3)	Матрица размера (3×3)	Матрица размера (2×2)
$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 1\\ -2 & 5 & 0\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}\mathrm{tg}x & \mathrm{ctg}x\\ -\mathrm{tg}x & \mathrm{ctg}x\end{pmatrix}$

Пример 2. Найдите размер матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет 3 строки и 4 столбца. Следовательно, матрица A имеет размер (3×4).

Задание 9. А) Найдите размер матриц. Сколько строк и сколько столбцов имеет каждая матрица?

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$;

4) $D=\begin{pmatrix}10 & -1 & 3\end{pmatrix}$; 5) $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$; 6) $F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

7) $G=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 8) $H=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$; 9) $K=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$.

Б) Приведите примеры матриц размера

1) (3×2); 2) (2×1); 3) (3×5); 4) (1×1); 5) (5×4); 6) (3×4).

Задание 10. Ответьте на вопросы.

1. Где используются матрицы?
2. Из чего состоит таблица?
3. Что можно делать с помощью матриц?
4. Как называется прямоугольная таблица, которая состоит из m строк и n столбцов?
5. Как найти размер матрицы?
6. Как записывают матрицу?
7. Как обозначают размер матрицы?
8. У какой матрицы число строк матрицы не равно числу столбцов?
9. Сколько строк имеет матрица размера (3×2)?
10. Сколько столбцов имеет матрица размера (3×2)?

1.2. Виды матриц

Словарь к теме

гла́вная диагона́ль побо́чная диагона́ль диагона́льный /недиагона́льный едини́чная ма́трица нулева́я ма́трица	треуго́льная ма́трица трапециеви́дная ма́трица ма́трица-столбе́ц ма́трица-строка́ поря́док

Задание 11. Образуйте прилагательные от существительных, используйте суффиксы в скобках. Проверьте слова по словарю.

1) диагональ (-н-) – _________________
2) един**ица** (-ичн-) – _________________
3) нул**ь** (-ев-) – _________________
4) треуголь**ник** (-н-) – _________________
5) матр**ица** (-ичн-) – _________________
6) числ**о** (-енн-) **–** _________________

Запомните!

Трапеция – трапециеви́дный

Задание 12. А) Прочитайте текст.

● Если $m = n$ (число строк матрицы равно числу столбцов), то матрица A называется **квадратной матрицей порядка *n***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ называются **элементами главной диагонали квадратной матрицы**. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ составляют главную диагональ матрицы.

Элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ называются **элементами побо́чной диагонали квадратной матрицы**.

● **Диагональной матрицей** называется квадратная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

● Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется **единичной** и обозначается буквой E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

● Квадратная матрица называется **треугольной**, если все её элементы, которые ниже или выше главной (или побочной) диагонали равны нулю. Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

● Матрица размера $(m \times n)$ называется **трапециеви́дной**, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

● Матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ размера $(m \times 1)$ называют **матрицей-столбцо́м длины *m***.

● Матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ размера $(1 \times n)$ называют **матрицей-строко́й длины *n***.

● Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Нулевую матрицу обозначают буквой O:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какие конструкции есть в тексте?
2. Какая матрица называется квадратной?
3. Как называются элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ матрицы A?
4. Какая матрица называется диагональной?
5. Какая диагональная матрица называется единичной?
6. Как обозначают единичную матрицу?
7. Какая матрица называется треугольной?
8. Как обозначают нулевую матрицу?
9. Какую матрицу называют матрицей-столбцом длины m?
10. Какая матрица называется матрицей-строкой длины n?
11. Какая матрица называется нулевой матрицей?
12. Что составляют элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ матрицы A?

Задания и упражнения

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Что такое матрица?
2. Какие виды матриц Вы знаете?
3. У какой матрицы число строк матрицы равно числу столбцов?
4. Какие диагонали имеет квадратная матрица?

Задание 2. Вставьте пропущенные слова.

1. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица A называется ________________________.

2. Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица A называется ________________________.

3. Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется _________________________.

4. Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой все _________________________ элементы равны нулю.

5. Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны единице, то матрица называется __________________ .

Упражнение 1. А) Укажите вид матрицы

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

4) $D = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Б) Назовите элементы главной и побочной диагоналей у квадратных матриц.

1.3. Линейное уравнение с *n* неизвестными

Словарь к теме

алгори́тм вклад *во что?* шифрова́ние неоднoро́дное уравне́ние одноро́дное уравне́ние среднеазиа́тский	подставля́ть - подстави́ть *что? куда?* (*вместо чего?*) позволя́ть - позво́лить *что* (*с*)*делать?* происходи́ть - произойти́ *от чего?* систематизи́ровать

Записи **читают:**

чи́сла a_i – числа а и́тые (мн.ч.);

x_i – икс и́тые (мн.ч.).

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Общие способы решения линейных уравнений открыл среднеазиатский учёный Муха́ммед ибн Муса́ Аль-Хорезми́ (коротко Аль-Хорезми). Он ввёл и систематизировал многие алгебраические приёмы в своём учебнике «Китаб аль-Джебр ва-ль-Мука́баля».

Слово «аль-джебр» означает операцию по перенесению отрицательных членов из одной части уравнения в другую для получения положительных членов в обеих частях. Слово «ва-ль-Мука́баля» означает приведение подобных членов в обеих частях уравнения.

От названия учебника происходит слово «алгебра». Книгу Аль-Хорезми перевели на латинский язык и до XVI века использовали в европейских университетах как один из основных учебников по математике.

Современное слово «алгоритм» произошло от имени Аль-Хорезми. Алгебра и алгоритмы позволили создать современные компьютеры и придумать шифрование. Без вклада учёного Аль-Хорезми в развитие алгебры не было бы современных технологий.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Кто открыл общие способы решения линейных уравнений?
2. Что означает слово «аль-джебр»?
3. Какое слово произошло от имени Аль-Хорезми?
4. Что позволило создать современные компьютеры и шифрование?

Задание 2. Прочитайте текст.

Линейным уравнением с *n* неизвестными называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где a_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$, b – числа, x_i – неизвестные (переменные). Числа a_i называются **коэффициентами уравнения**. Число b называется **свободным членом**. Если свободный член уравнения равен нулю, то уравнение называется **линейным однородным уравнением**. Если свободный член уравнения не равен нулю, то уравнение называется **линейным неоднородным уравнением**.

Набор чисел $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n$ называется **решением уравнения**, если выполняется равенство

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = b.$$

Решить уравнение – значит найти его решение.

Задание 3. А) Прочитайте конструкцию, определите падежи существительных.

Подставить вместо *чего? что?* = Подставить *что?* вместо *чего?*

Б) Прочитайте задания и решения. Обратите внимание на конструкции «подставить вместо чего? что?» и «подставить что? вместо чего?».

1) **Задание.** Проверьте, является ли пара чисел $x = 2$ и $y = -1$ решением уравнения $3x + 2y = 3$?

Решение. *Подставим* в уравнение $3x + 2y = 3$ *вместо x число* 2, *вместо y – число* (–1). Получим

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 6 - 2 = 4 \neq 3.$$

Следовательно, пара чисел $(2; -1)$ **не является решением уравнения**.

2) **Задание.** Проверьте, является ли пара чисел $x = -2,\ y = 3$ решением уравнения $4x - 2y = -14$?

Решение. *Подставим* в уравнение $4x - 2y = -14$ *число* (–2) *вместо x*, *число* 3 *вместо y*. Получим

$$4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -14.$$

Следовательно, пара чисел $(-2; 3)$ **является решением уравнения**.

В) Выполните задания и объясните их решение.

1) Проверьте, является ли пара чисел $x = 1,\ y = -2$ решением уравнения $3x - 3y = 1$?

2) Проверьте, является ли набор чисел $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = -7$ решением уравнения $x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$?

3) Проверьте, является ли набор чисел $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0$ решением уравнения $5x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0$?

4) Проверьте, является ли набор чисел $x = 1,\ y = 1$ и $z = 5$ решением уравнения $2x + y - z = -2$?

Задание 4. Прочитайте примеры линейных уравнений.

Линейное неоднородное уравнение	**Линейное однородное уравнение**
$2x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 5$	$5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0$
$3x + 4y - z = -1$	$x - 2y + 4z = 0$
$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 8$	$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0$
$3x + 2y - z + 5d = 3$	$x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 2$	$2x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0$

Задания и упражнение

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Что называется линейным уравнением с n неизвестными?
2. Какое уравнение называется линейным однородным уравнением?
3. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением?
4. Что называется решением уравнения?
5. Что значит решить уравнение?
6. Почему пара чисел $x = 2$, $y = -1$ является решением уравнения $3x + 2y = 4$?
7. Как называется число b в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$?
8. Как называются числа a_i в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$?
9. Как изменяется индекс i коэффициентов a_i в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$?
10. Как называются x_i в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$?

Упражнение 1. А) Запишите линейное однородное уравнение с тремя́ неизвестными.

Б) Запишите линейное неоднородное уравнение с четырьмя́ неизвестными.

Задание 2. Ответьте на вопросы.

1) Является ли набор чисел $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$ решением уравнения $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$?

2) Является ли набор чисел $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ решением уравнения $x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 1$?

Задание 3. Установите соответствие между началом и концом предложения.

Начало предложения	**Конец предложения**
Запись $i = \overline{1,6}$ означает, что	решение уравнения $2x_1 - x_2 + 6x_3 = -1$.
Набор чисел $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ – это	свободный член уравнения $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.
Набор чисел $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ – это	линейное однородное уравнение.
Число 0 – это	i изменяется от одного до шести.
Число 5 – это	решение уравнения $5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6$.
Уравнение $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ – это	коэффициент при x_3 в уравнении $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.
Уравнение $3x_1 + 7x_2 - x_3 = 7$ – это	решением уравнения $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$.
Набор чисел $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ является	линейное неоднородное уравнение.

1.4. Системы линейных уравнений

Словарь к теме

итера́ция	осно́ван, -а, -о, -ы (*на чём?*)
ме́тод	основна́я ма́трица систе́мы
определи́тель (м.р.)	расши́ренная ма́трица систе́мы
подстано́вка	ма́тричная фо́рма за́писи
поня́тие	Вавило́н
приближе́ние	вавило́нский
ру́копись (ж.р.)	Еги́пет
систе́ма	еги́петский
совоку́пность (ж.р.)	чи́сленный
составле́ние	доба́вить - добавля́ть

Обозначения и записи **читают:**

$\tilde{A}$ – а с волной;

$|A|$ $(= \det A)$ – определитель матрицы A;

Δ – де́льта.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Задачи на составление и решение систем уравнений с несколькими неизвестными встречаются ещё в вавилонских и египетских рукописях II века до нашей эры.

Система уравнений может состоять из алгебраических уравнений, линейных алгебраических уравнений, нелинейных уравнений, дифференциальных уравнений.

Системы линейных уравнений можно решить методом Крамера, методом Гаусса, матричный методом, методом итераций и т.д. Итерационные методы основаны на использовании процесса, который повторяется. Метод простой итерации называют методом последовательного приближения. Нелинейные системы и системы дифференциальных уравнений часто решают численными методами (методом Э́йлера, Ру́нге-Ку́тта и т.д.).

Системы линейных уравнений используются в задачах по физике, химии, экономике и другим наукам.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Когда встречались задачи на составление и решение систем уравнений с несколькими неизвестными?
2. Из каких уравнений может состоять система?
3. Где используются системы линейных уравнений?
4. Какими методами можно решить системы линейных уравнений?
5. Какими методами можно решить нелинейные системы уравнений?
6. Какие численные методы решения нелинейных систем уравнений Вы знаете?
7. На чём основаны итерационные методы?

8. Как называют метод простой итерации?

Задание 2. А) Прочитайте конструкции и примеры их использования. Определите падежи первого существительного, слова «который» и причастий.

Который / которая / которое / которые + глагол	=	Активное причастие
Студент, **который составляет** матрицу системы, учится на физическом факультете.	=	Студент, **составляющий** матрицу системы, учится на физическом факультете.

Который / которую / которое / которые + глагол	=	Пассивное причастие
Матрицу, **которую составили** из коэффициентов при неизвестных, называют основной матрицей системы.	=	Матрицу, **составленную** из коэффициентов при неизвестных, называют основной матрицей системы.

Б) Приведите примеры со словом «который» и причастиями.

Задание 3. А) Прочитайте предложения. Определите падежи прилагательных и существительных.

Модель:

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, ***состоящая*** из m строк и n столбцов.

Прямоугольная таблица, ***состоящая*** из m строк и n столбцов, называется матрицей размера $(m \times n)$.

Б) Приведите примеры предложений с глаголом **«называться»** по модели.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Из коэффициентов при неизвестных системы (1) запишем матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется **основной матрицей** системы (1).

К элементам матрицы A добавим столбец свободных членов и запишем матрицу $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрица $\tilde{A}$ называется **расширенной матрицей** системы (1).

Пусть X – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$. Это уравнение называют **матричной формой** записи системы (1).

Если $B \neq 0$, то система линейных уравнений (1) называется **неоднородной**.

Если $B = 0$, то система линейных уравнений (1) называется **однородной**.

Однородная система линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$A \cdot X = O.$$

Пример 1.

Система линейных неоднородных уравнений	Основная матрица системы	Расширенная матрица системы
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Пример 2.

Система линейных однородных уравнений	Основная матрица системы	Расширенная матрица системы
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Пример 3.

Система линейных неоднородных уравнений	Матричная форма записи системы $A \cdot X = B$
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Пример 4.

Система линейных однородных уравнений	Матричная форма записи системы $A \cdot X = O$
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Решением системы линейных уравнений (1) называют совокупность всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при подстановке которых все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

Для квадратной матрицы существует понятие определителя матрицы порядка *n*.

Определитель матрицы A обозначают так: $|A|$, $\det A$ или Δ.

Запись «**det**» – это сокращение слова **det**ermination.

Определитель квадратной матрицы порядка *n* записывают в виде массива элементов, заключённого между вертикальными прямыми:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Существуют три основных метода решения систем линейных уравнений: метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какая матрица называется основной матрицей системы?

2. Какая матрица называется расширенной матрицей системы?

3. Какая запись системы линейных уравнений называется матричной формой записи?

4. Какая система линейных уравнений называется однородной?

5. Запишите в матричной форме систему линейных однородных уравнений.

6. Какая система линейных уравнений называется неоднородной?

7. Запишите в матричной форме систему линейных неоднородных уравнений.

8. Что называют решением системы линейных уравнений?

9. Для каких матриц существует понятие определителя матрицы?

10. Как обозначают определитель матрицы A?

11. Назовите основные методы решения систем линейных уравнений.

12. Можно ли вычислить определитель матрицы $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$? Почему?

13. Запишите систему линейных уравнений, если дана её матричная форма

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

14. Запишите основную и расширенную матрицы системы

1) $\begin{cases}2x_1+3x_3+x_4=6,\\ 3x_1-5x_2+2x_3+2x_4=4,\\ 9x_1+4x_2-7x_4=2,\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x_1-3x_2+\ \ x_3-x_4=0,\\ 3x_1+\ \ x_2-3x_3+x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+3x_3+x_4=0.\end{cases}$

15. Запишите определитель основной матрицы системы уравнений

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=4,\\ 3x_1-5x_2=0,\\ -x_1+4x_2-7x_3=2.\end{cases}$$

Задания и упражнения

Задание 1. Даны системы уравнений

$$1)\ \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 8x_4 - 5x_5 = 1, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0, \\ -5x_1 + 16x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Это однородная или неоднородная система линейных уравнений? Почему?
2. Сколько уравнений и сколько переменных имеет система?
3. Запишите основную матрицу системы.
4. Найдите размер основной матрицы системы.
5. Можно найти определитель основной матрицы системы? Почему?
6. Запишите матрицу-столбец свободных членов.
7. Запишите расширенную матрицу системы.
8. Сколько строк имеет расширенная матрица системы?
9. Сколько столбцов имеет расширенная матрица системы?
10. Найдите размер расширенной матрицы системы.
11. Запишите систему линейных уравнений в матричной форме.

Упражнение 1. А) Запишите систему линейных уравнений, если расширенная матрица системы имеет вид:

$$1)\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Б) Укажите систему линейных однородных уравнений.

В) Для какой системы линейных уравнений можно найти определитель основной матрицы системы?

Тема 2. Векторная алгебра

2.1. Векторные и скалярные величины

Словарь к теме

величина́	числово́е значе́ние
ве́ктор	шкала́
естествозна́ние	характеризова́ться *чем?*
изображе́ние	ква́нтовая фи́зика
Ирла́ндия	тео́рия относи́тельности
ирла́ндский	занима́ть осо́бое ме́сто *где?* (*в чём?/ среди чего?*)
скаля́р	применя́ть *где?*
те́рмин	происходи́ть *от чего?*

Задание 1. А) Прочитайте текст.

При изучении физики, механики и астрономии встречают величины двух видов. Одни величины (температура, время, масса, площадь, объём и т.д.) имеют числовое значение. Их называют **скалярными величинами**. Другие величины (сила, скорость, ускорение) характеризуются числовым значением и направлением и называются **векторными величинами**. Для геометрического изображения физических векторных величин используют **векторы**.

Термин «скаляр» происходит от латинского слова «scala», что означает «шкала». Для каждого значения скалярной величины найдётся определённое место на шкале.

Термин «вектор» происходит от латинского слова «vector». Этот термин ввёл ирландский учёный Уи́льям Га́мильтон.

Векторы применяют в классической механике, в теории относительности, квантовой физике, математической экономике и многих других разделах естествознания, а также в различных областях математики.

Векторы занимают осо́бое место среди объектов изучения высшей математики, т.к. каждый вектор имеет не только числовое значение – длину, но и направление.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое скалярная величина? Приведите примеры скалярных величин.
2. Что такое векторная величина? Приведите примеры векторных величин.
3. От каких латинских слов произошли термины «скаляр» и «вектор»? Какое значение имеют эти слова?
4. Где применяются векторы?
5. Почему векторы занимают особое место среди объектов высшей математики?
6. Назовите имя учёного, который ввёл термин «вектор».

2.2. Основные понятия

Словарь к теме

напра́вленный напра́влен, (-а, -о, -ы) нача́льный коне́чный компланá́рные совпада́ть *с чем?* коллинеа́рный, коллинеа́рен (-на, -но, -ны) определённый	определён, определена́, (-ó, -ы́) паралле́льный паралле́лен паралле́льна (-но, -ны) перпендикуля́рный перпендикуля́рен (-на, -но, -ны) сонапра́вленный, сонапра́влен (-ы)

Обозначения и записи **читают:**

$|\overline{AB}|$ – модуль вектора а бэ (длина вектора а бэ);

$\bar{a} \parallel \bar{b}$ – вектор**ы** а и бэ параллельн**ые** вектор**ы** (вектор а параллел**ен** вектор**у** бэ);

$\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$ – вектор**ы** а бэ и цэ дэ сонапра́влен**ы** (вектор а бэ сонапра́вл**ен** вектор**у** цэ дэ);

$\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{CD}$ – вектор**ы** а бэ и цэ дэ противоположн**о** напра́влен**ы**;

$|\bar{a}| = |\bar{b}|$ – модуль вектор**а** а рав**ен** модул**ю** вектор**а** бэ;

$\Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ – следовательно (тогда) вектор а рав**ен** вектор**у** бэ;

$\bar{a} \perp \bar{b}$ – вектор а перпендикуляр**ен** вектор**у** бэ.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Вектором называется **направленный**[43] **отрезок**, т.е. отрезок прямой, ограниченный[44] двумя точками, одна из которых называется **начальной**, а другая – **конечной**.

Если A – начальная точка вектора, а B – конечная точка вектора, то вектор обозначают двумя большими латинскими буквами $\overrightarrow{AB}$ (рис. 16).

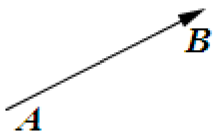


Рис. 16. Вектор $\overrightarrow{AB}$

Модуль вектора – это положительное число, равное[45] длине вектора.

Длина вектора равна расстоянию между его начальной и конечной точками.

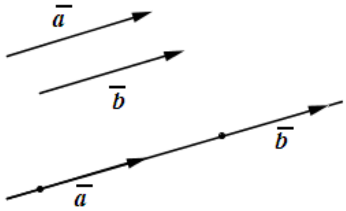
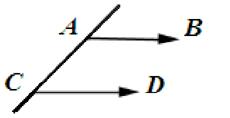
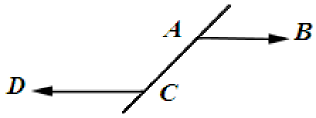
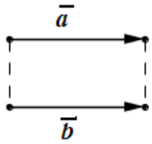
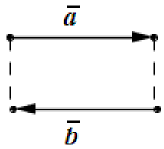
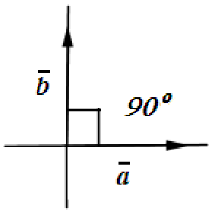
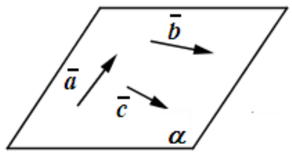
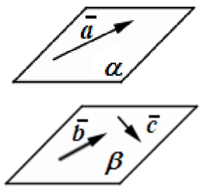
Модуль вектора обозначают так: $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$.

Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной, называется **нулевым** и обозначается $\bar{0}$. Направление нулевого вектора не определено.

[43] Напара́вленный = который напра́вили.
[44] Ограни́ченный = который ограни́чили.
[45] Ра́вное = которое равно́.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором.

Ниже представлены термины, изображение векторов и их обозначения.

Термин	Изображение	Обозначение
1) коллинеа́рные ве́кторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \parallel \overline{b}$
2) сонапра́вленные ве́кторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$		$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$
3) противополо́жно напра́вленные ве́кторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$		$\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$
4) ра́вные ве́кторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$
5) противополо́жные ве́кторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}, \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert \Rightarrow \overline{a} = -\overline{b}$
6) перпендикуля́рные ве́кторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$		$\overline{a} \perp \overline{b}$
7) компла́нарные ве́кторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$	 векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости α;  векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в параллельных плоскостях α и β	

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что такое вектор?

2. Как обозначают вектор, если A – начальная точка вектора, а B – конечная точка вектора?

3. Что такое модуль вектора $\bar{a}$? Как обозначают модуль вектора $\bar{a}$?

4. Какой вектор называется нулевым? Как он обозначается?

5. Чему равна длина единичного вектора?

6. Где лежат компланарные векторы?

7. Запишите символами: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены.

8. Запишите символами: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены.

9. Запишите символами: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны.

10. Запишите символами: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – перпендикулярные векторы.

2.3. Проекция вектора

Словарь к теме

прое́кция *чего? на что?* проеци́рование	перпендикуля́р перпендикуля́рен, -на, -но, -ны *чему?* паралле́лен, паралле́льна-, -о, -ы *чему?*

Обозначения и записи **читают**:

$(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \varphi$ – угол между вектор**ами** а и бэ рав**ен** фи;

$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ ($= \mathrm{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}$) – проекция вектор**а** *а* **на** вектор бэ;

$\text{пр}_{OX}\bar{a}$ – прое́кция вектор**а** *а* **на** ось о икс;

$\bar{a} \perp \bar{b}$ – вектор а перпендикуля́р**ен** вектор**у** бэ;

$\bar{a} \parallel \bar{b}$ – вектор а параллел**ен** вектор**у** бэ.

Задание 3. А) Прочитайте конструкции. Обратите внимание на падежи существительных.

Угол между чем?
Угол равен чему?

Б) Прочитайте записи, используйте конструкции «угол между чем?» и «угол рав**ен** чему?».

1) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$; 2) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \pi$; 3) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{2\pi}{3}$;

4) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120^0$; 5) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 10^0$; 6) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 21^0$;

7) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{5\pi}{6}$; 8) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 2\pi$; 9) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{3\pi}{2}$.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла между векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Проекцию $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обозначают так: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ (или $\text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}$).

Запись «**пр**» – это сокращение от слова «**про**е́кция».

Запись «**Proj**» – это сокращение от слова **proj**ection (проеци́рование).

Проекцию $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (рис. 17) находят по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi, \text{ где } \varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}}).$$

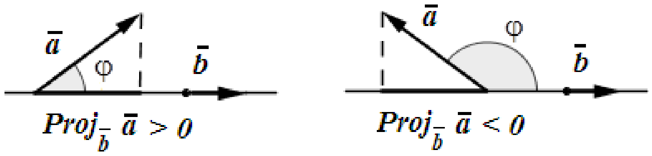


Рис. 17. Проекция $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$

Если $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны друг другу.

Записывают: $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Перпендикуляр (лат. perpendicularis – отвесный) **к прямой** – это отрезок прямой, который пересекает данную прямую и образует с ней угол 90 градусов (прямой угол).

Опустить перпендикуляр – значит провести через точку прямую, перпендикулярную другой прямой.

Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то проекция $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ – это точка.

Если $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0^0$ или $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 180^0$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – параллельные векторы.

Записывают: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$?
2. Как обозначают проекцию $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$?
3. Прочитайте запись $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.
4. Прочитайте запись $\text{пр}_{OY}\bar{a}$.
5. Запишите формулу проекции вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$.
6. Что такое перпендикуляр к прямой?
7. Когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны друг другу?
8. Запишите символами: вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$.
9. Для каких векторов проекция $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ есть точка?
10. Что значит опустить перпендикуляр?
11. Когда вектор $\bar{a}$ параллелен вектору $\bar{b}$?
12. Запишите символами: вектор $\bar{a}$ параллелен вектору $\bar{b}$.
13. Чему равен угол между двумя параллельными векторами?

2.4. Геометрическая интерпретация векторов

Словарь к теме

жи́рный шрифт простра́нство упоря́доченная тро́йка	произво́льный сопоставля́ть - сопоста́вить

Задание 5. Образуйте прилагательные от существительных, используйте суффиксы в скобках. Проверьте слова по словарю.

1) вектор (-н-) _______________
2) вертикаль (-н-) _______________
3) горизонталь (-н-) _______________
4) наклон (-н-) _______________
5) скаляр (-н-) _______________

Задание 6. Прочитайте знаки и записи.

— – черта (горизонта́льная черта);
| – вертика́льная черта;
→ – черта **со** стрелк**ой**;
/ – накло́нная черта;
$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ – вектор **а с** координат**ами** а икс, а игрек, а зэт.

Задание 7. А) Прочитайте конструкции и примеры их использования в предложениях. Определите падеж существительных.

Что? представляет собой что?
Вектор представляет собой направленный отрезок.
Что? относи́тся / отно́сят к чему?
Температура относится к скалярным величинам. / Температуру относят к скалярным величинам.

Б) Составьте предложения с конструкциями из таблицы.

Задание 8. А) Прочитайте текст.

Если в пространстве за́дана некоторая система координат, то вектору сопоставляется упорядоченная тройка чисел. Эти числа называют **координатами вектора**. Вектор обозначают маленькими латинскими буквами, которые сверху имеют **черту** или **черту со стрелкой** (рис. 18).

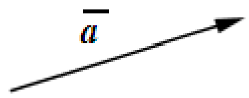


Рис. 18

Координаты вектора записывают в фигурных (или в круглых) скобках. Вектор также можно обозначать жирным шрифтом.

Обозначение вектора

$\bar{a} = \{ a_x, a_y, a_z \}$

$\vec{a} = \{ a_x, a_y, a_z \}$

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\boldsymbol{a} = \{ a_x, a_y, a_z \}$

К **линейным операциям** над векторами относятся умножение вектора на число и сложение (вычитание) векторов. Операция вычитания векторов – операция, обратная сложению. Векторы можно складывать по правилу треугольника или параллелограмма (рис. 19).

Правило треугольника Правило параллелограмма

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$

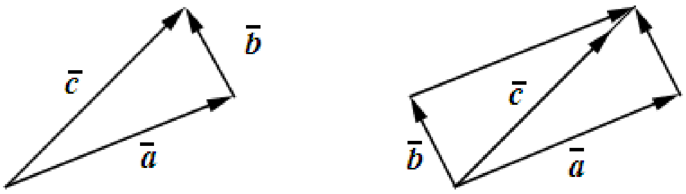


Рис. 19. Сложение векторов по правилу треугольника и параллелограмма

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Когда вектору сопоставляется упорядоченная тройка чисел?
2. Что называют координатами вектора?
3. Сколько координат имеет вектор в трёхмерном пространстве?
4. Как обозначают вектор?
5. Как записывают координаты вектора?
6. Прочитайте записи:

1) $\bar{a} = \{1, -1, 2\}$; 2) $\bar{b} = \{0, 2, -4\}$; 3) $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$;

4) $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$; 5) $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$; 6) $\bar{e} = \{1, 5, 0\}$.

7. Назовите первую координату вектора $\bar{a} = \{1, -1, 2\}$.
8. Какие операции над векторами относятся к линейным?
9. Назовите правила сложения векторов.
10. Расскажите, как складывают два вектора по правилу треугольника.
11. Объясните, как найти сумму двух векторов по правилу параллелограмма.
12. Чем является вектор $\bar{c}$ в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 19)?
13. Постройте вектор $3\bar{a}$, если $\bar{a}$ – произвольный вектор.
14. Изобразите произвольные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Постройте

1) разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) вектор $2\bar{a} + \bar{b}$;

3) вектор $\bar{a} - 3\bar{b}$.

2.5. Прямоугольная система координат. Радиус-вектор

Словарь к теме

аппликáта ось аппликáт = ось OZ плóскость рáдиус-вéктор	трёхмéрное прострáнство взаи́мно представи́ть в виде *чего?* совпадáть - совпáсть *с чем?*

Запись **читают**:

$a_x = \text{пр}_{OX}\,\overline{a}$ – а икс это проекция вектора а на ось о икс.

Задание 9. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим прямоугольную систему координат в трёхмерном пространстве, образованную[46] тремя́ взаимно перпендикулярными ося́ми с общим началом в точке O (рис. 20). Одну из осе́й называют **о́сью абсцисс** и обозначают OX, вторую – **о́сью ординат** и обозначают OY, третью – **о́сью аппликат** и обозначают OZ. Точку O называют **началом отсчёта** или **началом координат**.

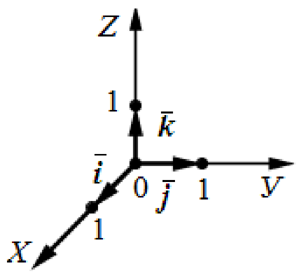


Рис. 20

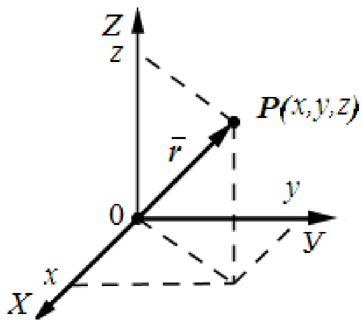


Рис. 21

В трёхмерном пространстве (в пространстве) любой вектор $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ можно записать в виде

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},$$

где $\overline{i} \in OX$, $\overline{j} \in OY$, $\overline{k} \in OZ$, $a_x = \text{пр}_{OX}\overline{a}$, $a_y = \text{пр}_{OY}\overline{a}$, $a_z = \text{пр}_{OZ}\overline{a}$.

Векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ – единичные векторы, т.е. $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$. Векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ часто записывают без черты, т.е. i, j и k.

На плоскости любой вектор $\overline{a} = \{a_x, a_y\}$ можно записать в виде

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j},$$

где $\overline{i} \in OX$, $\overline{j} \in OY$, $a_x = \text{пр}_{OX}\overline{a}$, $a_y = \text{пр}_{OY}\overline{a}$.

[46] Образо́ванный = который образова́ли.

Пусть координаты точки P за́даны в прямоугольной системе координат: $P(x,\ y,\ z)$. Соединим точку P с началом координат. Вектор $\overline{OP}$ называется **радиус-вектором** точки P и обозначается $\bar{r}$ (рис. 21).

Координаты радиус-вектора $\bar{r}$ совпадают с координатами его конечной точки P.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Постройте прямоугольную систему координат в трёхмерном пространстве.
2. Как называют о́си OX, OY и OZ?
3. Как называют точку O?
4. Запишите координаты вектора $\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k$.
5. Запишите координаты вектора $\bar{b} = b_x i + b_y j$.
6. Запишите проекции вектора $\bar{a} = \{1,\ -1,\ 2\}$ на ось OX, на ось OY и на ось OZ.
7. Чему равна длина вектора i?
8. Чему равен модуль вектора j?
9. Чему равна абсолютная величина вектора k?
10. Назовите координаты вектора $\bar{a} = 3i + j - k$.
11. Что называется радиус-вектором точки P?
12. С чем совпадают координаты радиус-вектора любой точки?
13. Запишите координаты радиус-вектора точки $A(1;\ 2;\ -1)$.

Задание 10. Поставьте слово «вектор» в нужную форму или образуйте от него прилагательное.

Направленный отрезок называют (вектор) _____________.

Если $\overline{AB}$ – это (вектор) _________, то точка A – это начальная точка (вектор) _____________, точка B – это конечная точка (вектор) _____________.

Если угол между (вектор) _____________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 0^0, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это параллельные (вектор) _____________.

Если угол между (вектор) _____________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 180^0, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – это противоположно направленные (вектор) _____________.

Если угол между (вектор) _____________ $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 90^0, то (вектор) _____________ $\bar{a}$ перпендикулярен (вектор) _____________ $\bar{b}$.

Раздел математики, который изучает (вектор) _____________, называется (вектор) _____________ алгеброй.

Можно найти скалярное произведение (вектор) _____________ , (вектор) ________________ произведение (вектор) _____________________ и смешанное произведение (вектор) _____________ .

В физике встречаются скалярные величины и (вектор) _______________ величины.

Сила, скорость и ускорение являются (вектор) ____________________ величинами. (Вектор) ____________________ величина имеет не только длину, но и направление.

2.6. Нелинейные операции над векторами

Словарь к теме

ве́кторное произведе́ние скаля́рное произведе́ние сме́шанное произведе́ние смысл	пра́вая тро́йка векторо́в чи́сленно ра́вен полага́ть удовлетворя́ющий

Обозначения и за́писи **читают:**

$(\bar{a},\bar{b})$

$\bar{a}\cdot\bar{b}$ – скаля́рное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$\bar{a}\bar{b}$

$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ – скалярное произведени**е** векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равн**о** произведени**ю** модулей этих векторов **на** косинус угла между ними;

$[\bar{a},\bar{b}]$ – ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$\bar{a}\times\bar{b}$

$|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ – модуль вектора $\bar{c}$ рав**ен** произведени**ю** модулей векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **на** синус угла между ними;

$\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ – модуль ве́кторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$S_{\text{параллелограмма}}=\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ – площадь параллелограмма равн**а** модул**ю** векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$ – площадь треугольника а бэ цэ равн**а** одн**ой** втор**ой** модул**я** векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ – сме́шанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ – смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равн**о** определител**ю** третьего порядка, составленного[47] из координат этих векторов;

$V_{\text{параллелепипеда}}=\left|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\right|$ – объём параллелепипеда рав**ен** модул**ю** сме́шанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

[47] Соста́вленный = который составили.

Задание 11. Прочитайте текст.

К нелинейным операциям над векторами относятся скаля́рное, ве́кторное и сме́шанное произведения векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ нулевой, то их скалярное произведение полагают равным нулю.

Для обозначения скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ используют следующие записи: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $\bar{a}\bar{b}$.

Определение скалярного произведения двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно записать с помощью формулы

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b}).$$

Пусть даны векторы $\bar{a}=\left\{a_x,\,a_y,\,a_z\right\}$ и $\bar{b}=\left\{b_x,\,b_y,\,b_z\right\}$. Тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

Ве́кторным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий[48] условиям:

- вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 22);
- тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ правая;
- модуль вектора $\bar{c}$ равен произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними: $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin(\bar{a}\,\widehat{,}\,\bar{b})$.

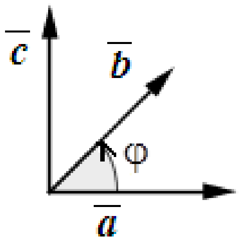


Рис. 22

Ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается так:

$$\bar{a}\times\bar{b} \text{ или } [\bar{a},\bar{b}].$$

Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ за́даны в прямоугольной системе координат $\bar{a}=a_x i+a_y j+a_z k$, $\bar{b}=b_x i+b_y j+b_z k$, то ве́кторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ представляет собой вектор, определяемый[49] формулой

[48] Удовлетворяющий = который удовлетворяет.
[49] Определяемый = который определяют.

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}.$$

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.

Сме́шанным произведением трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на третий вектор $\bar{c}$.

Для обозначения сме́шанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ используют следующие записи

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right),\text{ или } \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\text{, или } \bar{a}\bar{b}\bar{c}\,.$$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ за́даны в прямоугольной системе координат $\bar{a}=a_x i+a_y j+a_z k,$ $\bar{b}=b_x i+b_y j+b_z k$ и $\bar{c}=c_x i+c_y j+c_z k,$ то сме́шанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ можно найти с помощью определителя третьего порядка по формуле

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Задание 12. Образуйте существительные от прилагательных с помощью суффикса «ость». Проверьте слова по словарю.

Образец: последовательн**ый** (-ость-) – последовательность.

1) доста́точн**ый** (-ость-) ____________________
2) коллинеа́рн**ый** (-ость-) ____________________
3) компланáрн**ый** (-ость-) ____________________
4) материа́льн**ый** (-ость-) ____________________
5) необходи́м**ый** (-ость-) ____________________
6) паралле́льн**ый** (-ость-) ____________________
7) перпендикуля́рн**ый** (-ость-) ____________________
8) совоку́пн**ый** (-ость-) ____________________
9) фундамента́льн**ый** (-ость-) ____________________

Задание 13. Прочитайте условия коллинеа́рности, перпендикуля́рности и компланáрности ненулевых векторов.

Условие	**Символьная запись**
Условие коллинеарности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.	$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\left[\bar{a},\bar{b}\right]=0$
Условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.	$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\left(\bar{a},\bar{b}\right)=0$
Условие компланарности ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.	$\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0$

Задание 14. Прочитайте словесную формулировку механического и геометрического смыслов скаля́рного, ве́кторного и сме́шанного произведений.

Словесная формулировка	Формула
Механический смысл скалярного произведения. Работа A постоянной силы $\overline{F}$ по перемещению тела из точки M в точку N численно равна скалярному произведению векторов $\overline{F}$ и $\overline{MN}$.	$A=\left(\overline{F},\overline{MN}\right)$
Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен площади параллелограмма, построенного[50] на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.	$S_{\text{параллелограмма}}=\left\|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right\|$
Механический смысл векторного произведения. Если в точке A приложена сила $\overline{F}$, то момент этой силы относительно точки O равен векторному произведению векторов $\overline{OA}$ и $\overline{F}$.	$\overline{m}=\left[\overline{OA},\overline{F}\right]$
Геометрический смысл смешанного произведения. Модуль смешанного произведения трёх некомпланарных векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах.	$V_{\text{параллелепипеда}}=\left\|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right\|$

Задание 15. Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
2. Как обозначают скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
3. Когда скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю?
4. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
5. Что называется векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
6. Как обозначают векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
7. Запишите условие коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
8. Что называется смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$?
9. Как обозначают смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$?
10. Запишите условие компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

[50] Постро́енный = который построили.

Задания и упражнения

Задание 1. Выполните задание по модели. Образуйте причастия или прилагательные.

А) Который / которая / которое / которые + глагол = активное причастие.

Модель:

студент, **который изучает** векторную алгебру = студент, **изучающий** векторную алгебру

Б) Который / которую / которое / которые + глагол = пассивное причастие.

Модель:

отрезок, **который ограничили** двумя точками = отрезок, **ограниченный** двумя точками

В) Который + краткое прилагательное = полное прилагательное.

Модель:

число, **которое равно** длине вектора = число, **равное** длине вектора

1. Число, которое не равно нулю = Число, ____________________нулю.
2. Число, которое отлично от нуля = Число,______________ от нуля.
3. Система координат, которую образовали тремя взаимно перпендикулярными осями = Система координат, ________________________ тремя взаимно перпендикулярными осями.
4. Вектор, который удовлетворяет условиям = Вектор, _____________ условиям.
5. Вектор, который задали в пространстве = Вектор, ________________ в пространстве.
6. Вектор, который определяют формулой = Вектор, ________________ формулой.
7. Вектор, который перпендикулярен прямой = Вектор, ______________ прямой.
8. Линия, которая пересекает плоскость = Линия, ___________________ плоскость.
9. Прямая, которая лежит в плоскости = Прямая, ___________________ в плоскости.
10. Координаты вектора, которые заключили в скобки = Координаты вектора, ________ в скобки.
11. Параллелограмм, который построили на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ = Параллелограмм, ____________________ на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Задание 2. Раскройте скобки, образуйте причастия или прилагательные, поставьте их в нужную форму.

1. Вектор, (который задали) ________________________ в пространстве в некоторой системе координат, представляет собой упорядоченную тройку чисел.

2. Площадь треугольника, (который построили) ___________________ на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, находится по формуле $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|$.

3. Векторным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, (который удовлетворяет) ____________________ трём условиям.

4. Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, (которое равно) ______________________ произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5. Векторы, (которые лежат) ____________________ в одной плоскости, называются компланарными.

6. Объём пирамиды, (которую построили) _______________________ на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, равен шестой части объёма параллелепипеда.

Упражнение 1. Прочитайте записи.

1) $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=0$; 2) $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

3) $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$; 4) $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\left(a_x\right)^2+\left(a_y\right)^2+\left(a_z\right)^2}$;

5) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{b}\right|}$; 6) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi$;

7) $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\left(\bar{a},\,\bar{a}\right)}$; 8) $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0 \Leftrightarrow \bar{a},\ \bar{b}$ и $\bar{c}$ – компланарны;

9) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\bar{a},\,\bar{b}\right]\right|$; 10) $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

11) $\bar{a}\ \|\ \bar{b} \Leftrightarrow \left[\bar{a},\,\bar{b}\right]=0$; 12) $\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$;

13) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=0 \Rightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$; 14) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=2 \Rightarrow 0^0<(\widehat{\bar{a},\bar{b}})<90^0$;

15) $(\widehat{\bar{i},\bar{j}})=90^0$; 16) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=-2 \Rightarrow 90^0<(\widehat{\bar{a},\bar{b}})<180^0$.

Задание 3. Запишите символами.

1. Вектор $\bar{k}$ параллелен вектору $3\bar{k}$.
2. Вектор $\bar{k}$ перпендикулярен вектору $\bar{i}$.
3. Угол между векторами $\bar{k}$ и $\bar{j}$ прямой.
4. Угол между векторами $\bar{j}$ и $\left(-\bar{j}\right)$ равен ста восьмидесяти градусам.
5. Проекция вектора $\bar{j}$ на $\bar{i}$ равна нулю.

Тема 3. Дифференцирование функции одной переменной

3.1. Приращение функции и приращение аргумента

Словарь к теме

приращéние приращéние аргумéнта	приращéние фу́нкции соотвéтствующий[51]

Обозначения и записи **читают**:

Δx – дельта икс;

$\Delta x = x_1 - x$ – дельта икс равн**о** икс один минус икс;

Δy – дельта игрек;

$\Delta f(x)$ – дельта эф **от** икс;

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – дельта игрек равн**о** эф **от** икс плюс дельта икс минус эф **от** икс.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x – некоторое значение аргумента, $f(x)$ – соответствующее значение функции. От значения аргумента x перейдём к другому значению аргумента x_1 (рис. 23).

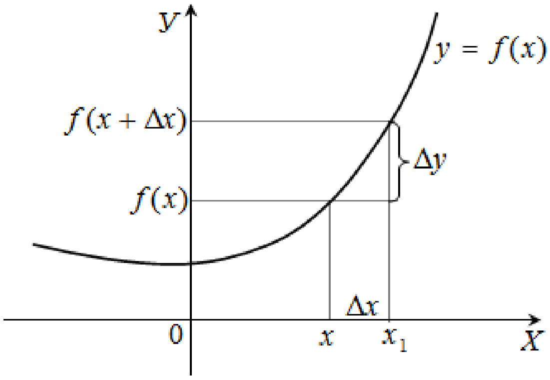


Рис. 23

Разность $x_1 - x$ называется **приращением аргумента**.

Приращение аргумента обозначают через Δx и записывают: $\Delta x = x_1 - x$.

Если $\Delta x = x_1 - x$, то $x_1 = x + \Delta x$.

Значению аргумента x_1 соответствует значение функции $f(x_1)$, где $f(x_1) = f(x + \Delta x)$.

Разность $f(x + \Delta x) - f(x)$ называется **приращением функции *f*(*x*) в точке *x***, соответствующим приращению аргумента Δx.

Приращение функции обозначают через Δy или $\Delta f(x)$ и записывают: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Приращение функции и приращение аргумента могут быть отрицательными, положительными и равными нулю.

[51] Соотвéтствующий = который соответствует.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.
1. Что называется приращением аргумента x?
2. Как обозначают приращение аргумента?
3. Запишите формулу приращения аргумента.
4. Что называется приращением функции $y = f(x)$?
5. Как обозначают приращение функции?
6. Запишите формулу приращения функции.

3.2. Производная и дифференциал функции

Словарь к теме

грани́ца дифференциа́л дифференци́рование преде́л	произво́дная штрих аналоги́чно стреми́ться *к чему?* стремя́щийся[52]

Обозначения и записи **читают**:

lim – предел;

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – предел эф **от** икс **при** икс, стремящ**емся к** икс нулев**о́му**;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – предел отношени**я** дельта игрек **к** дельта икс **при** дельта икс, стремящ**емся к** нул**ю**;

y' – игрек штрих;

$f'(x)$ – эф штрих **от** икс;

dx – дэ икс;

dy – дэ игрек;

$df(x)$ – дэ эф **от** икс;

$\dfrac{dy}{dx}$ – дэ игрек **по** дэ икс;

$\dfrac{df(x)}{dx}$ – дэ эф **от** икс **по** дэ икс;

$y'(x_0)$ – игрек штрих **от** икс нулев**о́е**;

$f'(x_0)$ – эф штрих **от** икс нулев**о́е**;

$y'\big|_{x=x_0}$ – игрек штрих, вычисленн**ое**[53] **при** икс, равн**ом** икс нулев**о́му**;

$\dfrac{df(x_0)}{dx}$ – дэ эф **от** икс нулев**о́е по** дэ икс;

$dy = f'(x)dx$ – дэ игрек рав**ен** эф штрих **от** икс дэ икс.

---

[52] Стремя́щийся = который стремится.
[53] Вычисленный = который вычислили.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Слово «лимит» происходит от латинского слова «limes», которое означает «предел».

С английского языка слово «limit» переводится как «предел», «граница». В математике для обозначения предела функции используют следующее сокращение от слова «**lim**it»: lim.

Если переменная x стремится к значению x_0, то предел функции $y = f(x)$ записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x используют следующие записи:

$$y', \; f'(x), \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{df(x)}{dx}.$$

Запишем символами определение производной функции $y = f(x)$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производную y' называют **производной первого порядка** функции $y = f(x)$.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используют следующие записи:

$$y'(x_0), \; y'\big|_{x=x_0}, \; f'(x_0), \; \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием этой функции**. Функция, которая имеет производную, называется **дифференцируемой**[54] **функцией**.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначают символом dy или $df(x)$. Дифференциал независимой переменной x обозначают символом dx.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен производной этой функции, умноженной[55] на дифференциал независимой переменной, т.е.

$$dy = f'(x)dx.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как обозначают производную функции $y = f(x)$?
2. Запишите символами определение производной функции $y = f(x)$.
3. Как обозначают производную функции $y = f(x)$ в точке x_0?
4. Какая функция называется дифференцируемой?
5. Как обозначают дифференциал функции?
6. Запишите формулу дифференциала функции $y = f(x)$.

---

[54] Дифференци́руемая = которую дифференцируют.

[55] Умно́женный = который умножили.

3.3. Основные правила дифференцирования. Таблица производных

Задание 3. Прочитайте основные правила дифференцирования и производные элементарных функций.

Пусть даны дифференцируемые функции $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Вспомним основные правила дифференцирования и их запись с помощью формул.

Правило	**Формула**
1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. Производная произведения функций равна сумме произведений производной первого множителя на второй и производной второго множителя на первый.	$(u \cdot v)' = u'v + v'u$
3. Производная частного равна дроби: в числителе – производная числителя умножить на знаменатель минус производная знаменателя умножить на числитель, в знаменателе – квадрат знаменателя.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
4. Постоянную величину можно выносить за знак производной.	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c = const

В таблице записаны производные элементарных функций.

1	$c' = 0$, где c = const	**2**	$x' = 1$
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	**4**	$(x^2)' = 2x$
5	$(e^x)' = e^x$	**6**	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0,\ a \neq 1$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	**8**	$(\sin x)' = \cos x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	**10**	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x > 0$	**12**	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**14**	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	**16**	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Обозначения **читают**:

y'' – игрек два штрих**а́**;

$f''(x)$ – эф два штрих**а́ от** икс;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – дэ два игрек **по** дэ икс два́**жды**[56];

y''' – игрек три штрих**а́**;

$f'''(x)$ – эф три штрих**а́ от** икс;

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ – дэ три игрек **по** дэ икс три́**жды**[57];

$y^{(n-1)}$ – производная эн минус перв**ого** порядка функции y;

$y^{(n)}$ – производная э́нн**ого** порядка функции y;

$f^{(n)}(x)$ – производная э́нн**ого** порядка функции эф **от** икс;

$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ – дэ эн игрек **по** дэ икс **эн раз**;

d^2y – дэ два игрек;

d^3y – дэ три игрек;

$d^{(n)}y$ – дэ эн игрек;

(n-1)-го порядка – эн минус пе́рв**ого** порядка.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную на некотором интервале $(a;b)$. Производная от производной функции $y=f(x)$ называется **производной второго порядка** (или **второй производной**) этой функции. Для производной второго порядка функции $y=f(x)$ используют следующие обозначения:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично, производную от производной второго порядка функции $y=f(x)$ называют **производной третьего порядка** (или **третьей производной**) функции $y=f(x)$. Для производной третьего порядка функции $y=f(x)$ используют следующие обозначения:

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3}.$$

[56] Два́жды = два раза.

[57] Три́жды = три раза.

Производной *n*-го порядка (или ***n*-ой производной**) функции $y = f(x)$ называют производную от производной (n-1)-го порядка, т.е.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производную n-го порядка функции $y = f(x)$ обозначают так:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются аналогично соответствующим производным.

Например, $d^2 y = y'' dx^2$ – это дифференциал второго порядка.

Заметим, что обозначения дифференциалов переменной $dx^2, dx^3, \dots,$ dx^n означают степень дифференциала, т.е.

$$dx^2 = (dx)^2,\ dx^3 = (dx)^3,\ \dots,\ dx^n = (dx)^n.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется производной второго порядка функции $y = f(x)$?
2. Как обозначают производную второго порядка функции $y = f(x)$?
3. Как обозначают дифференциал второго порядка функции $y = f(x)$?
4. Что означает dx^2?
5. Запишите формулу дифференциала третьего порядка функции $y = f(x)$.
6. Найдите производную третьего порядка функции $y = e^x$.

Задания и упражнения

Упражнение 1. Прочитайте записи.

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^2$; 2) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{tg} x} = 1$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Задание 1. Прочитайте записи. Назовите дифференцируемую функцию. Назовите производную функции. Какие правила дифференцирования применили при вычислении производной?

1) $(\sin x + x)' = \cos x + 1;$

2) $\left(x^2 \cdot \cos x\right)' = 2x\cos x - \sin x \cdot x^2;$

3) $\left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{x' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x};$

4) $\left(5e^x\right)' = 5e^x.$

Упражнение 2. Прочитайте обозначения и записи.

1) y''; 2) $\dfrac{d^3y}{dx^3}$; 3) $d^3y = f'''(x)dx^3$; 4) $f^{(V)}(x)$;

5) $y^{(k)}$; 6) $y'' = f''(x)$; 7) $d^2y = f''(x)dx^2$; 8) $d^n y$;

9) $y''(x)$; 10) $f^{(n)}(x)$; 11) $d^k y = f^{(k)}(x)dx^k$; 12) $y^{(n)}$.

Задание 2. Установите соответствие между правой и левой частями равенства.

Левая часть равенства	Правая часть равенства
1. dy	$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$
2. Δy	$= (y')'$
3. $(\sin x)'$	$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
4. y''	$= y''dx^2$
5. $f'(x_0)$	$= y^{(n)}dx^n$
6. Δx	$= f(x + \Delta x) - f(x)$
7. $d^n y$	$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
8. y'	$= f'(x)dx$
9. $d^2 y$	$= \cos x$
10. $(e^x)'$	$= x_1 - x$

Задание 3. Установите соответствие между обозначениями и их названиями.

Обозначение	Название
1. dy	производная функции
2. Δy	значение производной функции в точке x_0
3. y'	приращение аргумента
4. y''	дифференциал функции
5. $f'(x_0)$	производная третьего порядка функции
6. Δx	приращение функции
7. $d^2 y$	производная второго порядка функции
8. y'''	дифференциал второго порядка
9. $y^{(k)}$	производная катого порядка функции

Тема 4. Функции нескольких переменных

4.1. Основные понятия и геометрическое изображение функции двух переменных

Словарь к теме

геометри́ческое изображе́ние	физи́ческое состоя́ние
парабол́оид	фу́нкция двух переме́нных
пл́отность	фу́нкция не́скольких переме́нных
прое́кция *чего?*	добавля́ть - доба́вить
не́сколько	наблюда́ть

Записи **читают**:

$z(x, y)$ – зэт **от** икс, игрек;

$f(x, y, z)$ – эф **от** икс, игрек, зэт;

$z = f(x, y)$ – зэт **есть** функция **от** икс, игрек (зэт равн**о** эф **от** икс, игрек);

$V = V(x, y)$ – вэ **есть** функция **от** икс, игрек (вэ равн**о** вэ **от** икс, игрек).

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Ранее мы рассматривали функции только одной переменной, т.е. функции вида $y = f(x)$. Но бывают случаи, когда независимых переменных может быть несколько.

Например, объём кругового цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 H$, где R и H – независимые переменные. Тогда функцию V можно рассматривать как функцию двух переменных x и y, т.е. $V = \pi x^2 y$.

При изучении физического состояния тела часто наблюдают изменение его свойств от точки к точке. Например, плотность, температура – это функции точки и зависят они от координат точки x, y и z. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным добавляют переменную t.

Переменная z называется **функцией независимых переменных *x* и *y*** на множестве D, если каждой точке $(x_1; y_1)$ из множества D по некоторому правилу ставится в соответствие одно определённое значение z_1 из множества Z.

В этом случае функция z есть функция двух переменных x и y.

Записывают: $z = f(x, y)$.

Множество D называют **областью определения** функции $z = f(x, y)$.

Множество Z называют **областью значений** функции $z = f(x, y)$.

Множество точек $(x; y; z)$, где $z = f(x, y)$, является геометрическим изображением функции двух переменных и называется её **графиком**.

Геометрическое изображение функции $z = f(x, y)$ есть поверхность в трёхмерном пространстве (рис. 24). Область D – это проекция поверхности $z = f(x, y)$ на плоскость XOY.

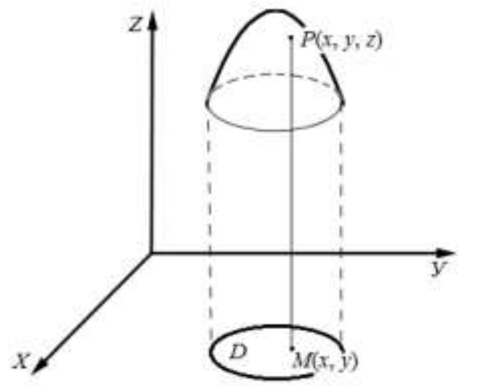


Рис. 24

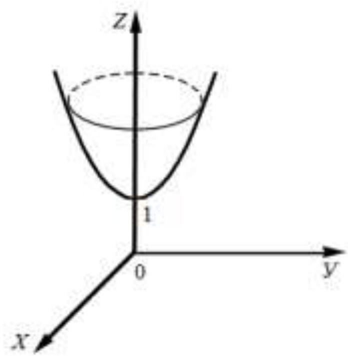


Рис. 25

Например, геометрическое изображение функции $z = x^2 + y^2 + 1$ представляет собой параболо́ид, вершина которого находится в точке $C(0;0;1)$ (рис. 25).

Областью определения функции $z = x^2 + y^2 + 1$ является вся плоскость XOY.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется функцией двух переменных x и y?
2. Как записывают функцию двух переменных x и y?
3. Что называется областью определения функции двух переменных?
4. Что называется областью значений функции двух переменных?
5. Что является геометрическим изображением функции двух переменных?
6. Приведите примеры функций двух переменных из математики.
7. Приведите примеры функции трёх переменных из физики.

Задание 2. Прочитайте функции и назовите переменные. Сколько переменных содержит каждая функция?

1) $u = \dfrac{y}{xz^2}$; 2) $v = xyz$;

3) $V = V(x, y, z)$; 4) $z = vu^2t^3$;

5) $z = \sqrt{xy}$; 6) $z = u + vt^3$;

7) $S = \dfrac{1}{2}(x + y) \cdot z$; 8) $V = \pi R^3$;

9) $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$; 10) $u = 4\ln(3 + t^2) - 8xyz$;

11) $z = u\sqrt{v} + v\sqrt{u}$; 12) $z = \dfrac{1 + tm}{x^2 + y^2}$;

13) $z = x^2 + 3y^2$; 14) $v = x + y \operatorname{arctg} z$.

4.2. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных

Словарь к теме

предположе́ние постоя́нное значе́ние ча́стная произво́дная фу́нкции *по чему́?*	изменя́ться - измени́ться приня́ть - принима́ть сохраня́ть - сохрани́ть

Обозначения и записи **читают**:

$y = \text{const}$ – игрек константа;

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – дэ зэт **по** дэ икс;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – дэ зэт **по** дэ игрек;

z'_x – зэт штрих **по** икс;

z'_y – зэт штрих **по** игрек;

$f'_x(x, y)$ – эф штрих **по** икс **от** икс, игрек.

Задание 3. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Если переме́нная *y* сохраняет постоянное значение, а меняется только переме́нная *x*, то функция *z* будет функцией одной переме́нной *x*, т.е. $z(x) = f(x, y)$, где $y = \text{const}$.

Производная от функции $z(x) = f(x, y)$ по переме́нной *x*, вычисленная[58] в предположе́нии, что *y* – постоянная величина, называется **частной производной функции z по переме́нной *x***.

Встречаются следующие обозначения частной производной функции $z = f(x, y)$ по переме́нной *x*:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\ f'_x(x, y).$$

Если переме́нная *x* сохраняет постоянное значение, а меняется только переме́нная *y*, то функция *z* будет функцией одной переме́нной *y*, т.е. $z(y) = f(x, y)$, где $x = \text{const}$.

Производная от функции $z(y) = f(x, y)$ по переме́нной *y*, вычисленная в предположе́нии, что *x* – постоянная величина, называется **частной производной функции z по переме́нной *y***.

Приняты следующие обозначения частной производной функции $z = f(x, y)$ по переме́нной *y*:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},\ f'_y(x, y).$$

[58] Вы́численный = который вычислили.

Производные z'_x и z'_y функции $z = f(x, y)$ называют **частными производными первого порядка**.

Дифференциал первого порядка функции двух переме́нных называется **полным дифференциалом** и находится по формуле

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Запись $\frac{\partial z}{\partial x}$ – это не дробь, а обозначение частной производной первого порядка функции $z = f(x, y)$ по переме́нной x.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что называется частной производной функции z по переменной x?
2. Что называется частной производной функции z по переменной y?
3. Что называют частными производными первого порядка функции $z = f(x, y)$?
4. Какими символами обозначают частные производные первого порядка функции двух переменных?
5. Запишите обозначения частных производных первого порядка для функции $u = f(x, y, z)$.
6. Запишите формулу для нахождения полного дифференциала первого порядка для функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$.

4.3. Производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Словарь к теме

продифференци́ровать сме́шанная произво́дная	причём

Обозначения **читают**:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – дэ два зэт **по** дэ икс два́**жды**;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – дэ два зэт **по** дэ игрек два́**жды**;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – дэ два зэт **по** дэ икс, дэ игрек;

z''_{xx} – зэт два штрих**а́** **по** икс два́**жды**;

z''_{yy} – зэт два штрих**а́** **по** игрек два́**жды**;

z''_{xy} – зэт два штрих**а́** **по** икс, игрек.

Задание 4. А) Прочитайте текст.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y).$$

Продифференцируем частные производные первого порядка по переменным x и y. Получим частные производные функции $z = f(x,y)$ **второго порядка**. Запишем все частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (= z''_{xx}) – это обозначение частной производной второго порядка по икс два́жды функции $z = f(x,y)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (=z''_{yy}) – это обозначение частной производной второго порядка по игрек два́жды функции $z = f(x,y)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (=z''_{xy}) – это обозначение частной производной второго порядка по икс, игрек функции $z = f(x,y)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (=z''_{yx}) – это обозначение частной производной второго порядка по игрек, икс функции $z = f(x,y)$.

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называют **смешанными производными**. Если z''_{xy} и z''_{yx} непрерывные функции двух переменных, то имеет место равенство

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Напомним, что дифференциал первого порядка функции $z = f(x,y)$ находят по формуле

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Дифференциал второго порядка функции $z = f(x,y)$ находят по формуле

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2.$$

Дифференциал второго порядка функции нескольких переменных содержит все частные производные второго порядка этой функции.

Аналогично можно записать формулу дифференциала третьего порядка функции $z = f(x,y)$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Объясните, как находят частные производные второго порядка функции $z = f(x,\ y)$.

2. Сколько смешанных частных производных второго порядка имеет функция двух переменных? Запишите их символьное обозначение.

3. Сколько смешанных частных производных второго порядка имеет функция трёх переменных? Запишите их символьное обозначение.

4. Какое равенство имеет место для непрерывных смешанных производных второго порядка функции $z = f(x,\, y)$?

5. Запишите формулу дифференциала первого порядка функции $z = f(x,\, y)$.

6. Найдите дифференциал первого порядка функции $z = 2x + 3xy$.

7. По какой формуле можно найти дифференциал второго порядка функции $z = f(x,\, y)$?

Задания и упражнения

Упражнение 1. Прочитайте обозначения. Что они означают?

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; 3) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; 4) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$; 5) z'_x ; 6) z'_y ; 7) $df(x,y)$; 8) dz ;

9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; 10) $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; 11) $\dfrac{\partial u}{\partial z}$; 12) u'_x; 13) u'_y; 14) u'_z; 15) du;

16) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 17) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; 18) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; 19) z''_{xx}; 20) z''_{yy}; 21) z''_{yx}; 22) $d^2 z$.

Задание 1. Запишите обозначения всех различных производных третьего порядка функции $z = f(x,\, y)$. Запишите формулу для дифференциала третьего порядка функции $z = f(x,\, y)$.

Задание 2. Вставьте пропущенные слова.

Если каждой точке $(x_1,\, y_1)$ из области D по некоторому правилу ставится в соответствие одно значение z_1 из области Z, то $z = f(x,\, y)$ – это ____________ ________________ __________________ x и y. Множество D называют ___________ ______________ функции $z = f(x, y)$. Множество Z называют _____________________ ___________________ функции $z = f(x, y)$. Геометрическим изображением функции двух переменных является ______________ в трёхмерном пространстве, а область D является _________ этой _________________ .

Задание 3. Установите соответствие между обозначениями и их названиями.

Обозначение	Название
$\dfrac{\partial z}{\partial x}$	дифференциал функции z
z'_y	смешанная производная
dz	частная производная функции по переменной x
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$	частная производная функции по переменной y

Тема 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

5.1. Неопределённый интеграл

Словарь к теме

интегра́л	непосре́дственное интегри́рование
неопределённый интегра́л	ме́тод интегри́рования
определённый интегра́л	интегри́руемая фу́нкция
кра́тный интегра́л	подынтегра́льная фу́нкция
двойно́й интегра́л	подынтегра́льное выраже́ние
тройно́й интегра́л	первообра́зная фу́нкции
криволине́йный интегра́л	подстано́вка (= заме́на)
пове́рхностный интегра́л	предложи́ть (= ввести́)
интегри́рование	осно́ван,-а,-о,-ы *на чём?*

Обозначения и записи **читают:**

$\int$ – интеграл;

$\int f(x)dx$ – интеграл эф **от** икс дэ икс;

$\int f(x)dx = F(x) + c$ – интеграл эф **от** икс дэ икс рав**ен** эф больш**ое от** икс плюс цэ.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Интеграл – одно из важных понятий в высшей математике. В переводе с латинского языка интеграл означает «целый». Термин «интеграл» ввёл Иога́нн Берну́лли. Обозначение неопределённого интеграла предложил Го́тфрид Вильге́льм Ле́йбниц.

Интегралы бывают неопределённые, определённые, кратные (двойные, тройные), криволинейные и поверхностные.

Понятие неопределённого интеграла связано с понятием первообразной функции.

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ в области D, если для любого $x \in D$ (икс, принадлежа́щ**его** дэ) выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$ называется **неопределённым интегралом**.

Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

Таким образом, определение неопределённого интеграла можно записать символами:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, причём $F'(x) = f(x)$;

x – переменная интегрирования;

c – постоянная (константа) интегрирования.

Операция нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется **интегрированием**. Интегралы, записанные в таблице неопределённых интегралов, называют **табличными интегралами**.

Таблица неопределённых интегралов

1	$\int dx = x + c$, $c = \text{const}$	**2**	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$, $x \neq 0$	**4**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $a > 0$, $a \neq 1$	**6**	$\int e^x dx = e^x + c$
7	$\int \cos x dx = \sin x + c$	**8**	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + c$	**10**	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + c$
11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$	**12**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + c$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$	**14**	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + c$
15	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + c$	**16**	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{a} \text{arcctg} \frac{x}{a} + c$

Запишем некоторые свойства неопределённого интеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + c$, где $c = \text{const}$;

4) $\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$, где $k = \text{const}$;

5) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

К основным методам интегрирования относят следующие методы: непосредственное интегрирование, метод интегрирования по частям и метод замены переменной.

Непосредственное интегрирование – это простейший метод интегрирования. Непосредственное интегрирование состоит в преобразовании интеграла к табличному интегралу с помощью основных алгебраических действий, математических формул и свойств неопределённого интеграла.

Методом интегрирования по частям называется интегрирование с помощью формулы

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (2)$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Формулу (2) называют **формулой интегрирования по частям**.

Метод замены переменной или **метод подстановки** состоит в том, что интеграл приводится к табличному с помощью формулы

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как переводится слово «интеграл» с латинского языка?
2. Кто ввёл термин «интеграл»?
3. С каким понятием связано понятие неопределённого интеграла?
4. Что называется первообразной функции?
5. Что называется неопределённым интегралом?
6. Какие интегралы называют табличными?
7. Кто предложил обозначение неопределённого интеграла?
8. Как обозначается неопределённый интеграл функции $f(x)$?
9. Как называется операция нахождения первообразной функции?
10. Прочитайте обозначения и записи:

1) $\int$; 2) $\int f(x)dx$; 3) $\int f(x)dx = F(x) + c$; 4) $\int udv = uv - \int vdu$.

11. Запишите символами определение неопределённого интеграла. Объясните значение символов.
12. Прочитайте записи. Назовите подынтегральную функцию и первообразную.

1) $\int x^2 dx$; 2) $\int e^{3x} dx$; 3) $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c$; 4) $\int 2x dx = x^2 + c$;

5) $\int x^3 dx$; 6) $\int 5^x dx$; 7) $\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + c$; 8) $\int 3x^2 dx = x^3 + c$.

13. Что такое интегрирование?
14. Чему равна производная от неопределённого интеграла?
15. Чему равен дифференциал от неопределённого интеграла?
16. Чему равен неопределённый интеграл от дифференциала функции?
17. Чему равен неопределённый интеграл от разности двух функций?
18. Какие основные методы интегрирования Вы знаете?
19. Как называется самый простой метод интегрирования? В чём он состоит?
20. Запишите формулу интегрирования по частям.
21. Запишите формулу, которую используют при замене переменной в неопределённом интеграле.
22. В чём состоит метод подстановки?
23. Чему равен неопределённый интеграл от функции $y = \sin x$?
24. Чему равен неопределённый интеграл от единицы?

Задания и упражнения

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

Функция $F(x)$ называется _________________ для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Выражение $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ – это _________________ ______ интеграл, где $f(x)$ – это ____________________ ______________. Процесс нахождения первообразной для функции $f(x)$ – это _____________________. Интеграл $\int e^x\,dx = e^x + c$ – это _______________________ интеграл. Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ называется формулой ________ _____________ ____ ___________.

Задание 2. Запишите математическими символами свойства неопределённого интеграла:

1) производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции;

2) дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению;

3) неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная;

4) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

5) неопределённый интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

Упражнение 1. Прочитайте интегралы. Назовите подынтегральную функцию, подынтегральное выражение и переменную интегрирования.

1) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{1+4\sin 2x}}$; 2) $\int \frac{e^{\mathrm{tg}2y}\,dy}{\cos^2 2y}$; 3) $\int \frac{\arccos t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

4) $\int \frac{(1-2x)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$; 5) $\int \frac{dx}{3\cos x+5}$; 6) $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+5x+6)}$;

7) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$; 8) $\int \arcsin x\,dx$; 9) $\int e^x \sin 5x\,dx$.

Упражнение 2. Прочитайте примеры. Назовите первообразную функции.

1) $\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}+c$; 2) $\int \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5}\mathrm{arctg}(5x)+c$;

3) $\int \frac{dx}{6x-1} = \frac{1}{6}\ln|6x-1|+c$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = -\sqrt{1-2x}+c$;

5) $\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}+c$; 6) $\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}+c$.

5.2. Определённый интеграл

Словарь к теме

крива́я дуга́ криво́й криволине́йная трапе́ция нали́чие теоре́ма справедли́в,-а, -о, -ы	непреры́вная фу́нкция преде́лы интегри́рования ни́жний преде́л интегри́рования ве́рхний преде́л интегри́рования Фра́нция францу́зский

Обозначения и записи **читают:**

$\int_a^b$ – интеграл **от** а **до** бэ;

$\int_a^b f(x)dx$ – интеграл **от** а **до** бэ эф **от** икс дэ икс;

$F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$ – эф больш**ое** от икс, где x изменяется **от** а **до** бэ, равн**о** эф большое **от** бэ минус эф большое **от** а.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Задачи математики о нахождении площади криволинейной трапеции и длины дуги кривой привели к понятию определённого интеграла. Также к понятию определённого интеграла привели задачи физики о нахождении пути по известной скорости при неравномерном движении и о нахождении работы нескольких сил за определённый промежуток времени.

Обозначение определённого интеграла отличается от неопределённого наличием в записи пределов интегрирования. Обозначение определённого интеграла в виде знака $\int_a^b$ ввёл францу́зский математик Жан Бати́ст Жозе́ф Фурье́ (Фурье́).

Определённый интеграл обозначается так:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования.

Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формула (3) называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Таким образом, определённый интеграл – это число, которое можно найти с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Запишем некоторые свойства определённого интеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b k\,f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k = \text{const}$;

4) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $c \in [a; b]$;

6) если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in [-a; a]$, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$;

7) если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in [-a; a]$, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

При вычислении определённого интеграла используют следующие методы:

1) непосредственное интегрирование;

2) метод интегрирования по частям;

3) метод замены переменной (метод подстановки).

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла имеет вид:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

При замене переменных в определённом интеграле нужно изменить пределы интегрирования. Сделаем замену переменной $x = \varphi(t)$, где t_1, t_2 – значения аргумента этой функции, такие, что $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$. Тогда определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно найти по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите задачи математики, которые привели к понятию определённого интеграла.

2. Назовите задачи физики, которые привели к понятию определённого интеграла.

3. Кто ввёл обозначение для определённого интеграла в виде знака $\int\limits_a^b$?

4. Чем отличаются записи определённого и неопределённого интегралов?

5. Кто предложил термин «интеграл»?

6. Как называется число a в записи $\int\limits_a^b f(x)dx$?

7. Как называется число b в записи $\int\limits_a^b f(x)dx$?

8. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

9. Чему равен определённый интеграл от нечётной функции на отрезке $[-a;\, a]$?

10. Чему равен определённый интеграл от чётной функции на отрезке $[-a;\, a]$?

11. Запишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла.

12. Запишите формулу замены переменных для определённого интеграла.

13. Что надо изменить в определённом интеграле при замене переменной?

14. Чему равен определённый интеграл, если верхний и нижний пределы интегрирования совпадают?

15. Для решения каких задач используется определённый интеграл?

16. Чему равен интеграл $\int\limits_{-2}^{-2} x^3 dx$?

17. Верно ли равенство $\int\limits_{-2}^{0}(1-x)dx = \int\limits_{0}^{-2}(x-1)dx$?

Задание 2. А) Прочитайте пример и его решение.

$$\int\limits_0^2 \left(3x^2+3\right)dx = \left(x^3+3x\right)\Big|_0^2 = 2^3+3\cdot 2 = 14.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите подынтегральную функцию.
2. Назовите первообразную функции.
3. Чему равен верхний предел интегрирования?
4. Чему равен нижний предел интегрирования?
5. Чему равен определённый интеграл?
6. Какие свойства определённого интеграла применили?

Задания и упражнения

Задание 1. Запишите свойства определённого интеграла символами:

1) постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла;

2) определённый интеграл от суммы двух функций равен сумме определённых интегралов от этих функций;

3) определённый интеграл от нечётной функции по отрезку $\left[-a;a\right]$ равен нулю;

4) определённый интеграл от разности двух функций равен разности определённых интегралов от этих функций.

Упражнение 1. Прочитайте определённые интегралы. Назовите переменную интегрирования, подынтегральную функцию, нижний и верхний пределы интегрирования.

1) $\int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2+1}$; 3) $\int\limits_1^e \ln xdx$; 4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} x\cos xdx$;

5) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; 6) $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{x^4+4}$; 7) $\int\limits_0^1 e^{-2x}dx$; 8) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\sin x^2}$.

Задание 2. С помощью определённого интеграла можно найти многие геометрические и физические величины. Некоторые из них приведены в таблице.

Геометрические и физические величины	**Формула**
Площадь плоской области, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, $a<b$.	$S=\int\limits_a^b f(x)dx$
Длина дуги кривой AB, заданной уравнением $y=y(x)$, где $a\le x\le b$.	$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$
Объём тела, полученного[59] при вращении вокруг оси *OX* плоской области, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, $a<b$.	$V_{ox}=\pi\int\limits_a^b\left[f(x)\right]^2dx$
Масса m материальной кривой AB, заданной уравнением $y=y(x)$, $a\le x\le b$, с плотностью $\rho(x)$.	$m=\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$
Работа переменной силы $F(x)$, совершённая[60] при перемещении тела из точки $x=a$ в точку $x=b$ по оси́ *OX*.	$A=\int\limits_a^b F(x)dx$

[59] Полу́ченный = который получи́ли.
[60] Совершённый = который соверши́ли.

Упражнение 2. Запишите определённый интеграл для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x}{2}$ (рис. 26);

2) $x^2+y^2=4$, $x+y=2$ (рис. 27);

3) $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=\sqrt{4-y^2}$ (рис. 28).

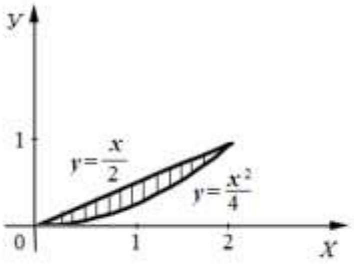


Рис. 26

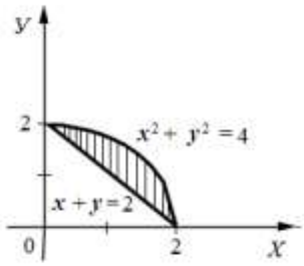


Рис.27

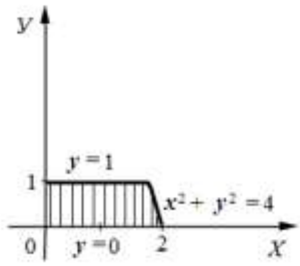


Рис. 28

Упражнение 3. Запишите определённый интеграл для вычисления длины дуги кривой:

1) $y=2+\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$;

2) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $x_1\le x\le x_2$;

3) $y=1-\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Упражнение 4. Запишите определённый интеграл для вычисления объёма тела, полученного при вращении вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=2+x^2$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ (рис. 29);

2) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ (рис. 30);

3) $y=\arccos\frac{x}{3}$, $x=0$, $y=0$ (рис. 31).

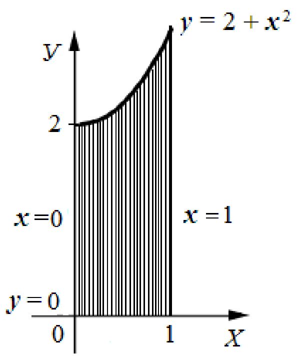


Рис. 29

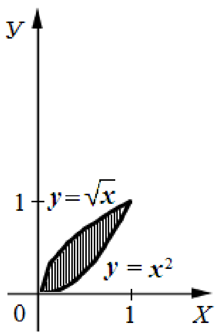


Рис. 30

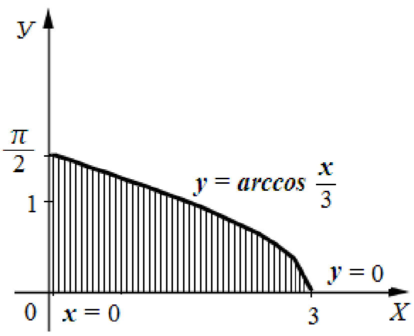


Рис. 31

Тема 6. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

6.1. Двойной интеграл

Словарь к теме

вне́шний интегра́л вну́тренний интегра́л повто́рный интегра́л о́бласть интегри́рования за́мкнутая о́бласть пло́ская о́бласть	криволине́йная систе́ма координа́т поля́рная систе́ма координа́т цилиндри́ческое те́ло интегри́ровать своди́ть - свести́ *что? к чему?* полу́ченный[61]

Обозначения и записи **читают:**

γ – га́мма;

$\iint\limits_D$ – двойно́й интеграл **по области** дэ;

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ – двойно́й интеграл **по области дэ**, эф **от** икс, игрек дэ икс, дэ игрек;

$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ – интеграл **от** а **до** бэ дэ икс, интеграл **от** фи один **от** икс **до** фи два **от** икс эф **от** икс, игрек дэ игрек;

$S = \iint\limits_D dxdy$ – площадь равн**а** двойно́**му** интеграл**у по области дэ**, дэ икс, дэ игрек.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Задача о вычислении объёма цилиндрического тела привела к понятию двойно́го интеграла. Вычисление двойно́го интеграла сво́дится к вычислению определённых интегралов.

С помощью двойны́х интегралов можно вычислять некоторые геометрические и физические величины.

Двойно́й интеграл по области *D* обозначают так:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

где *D* – область интегрирования;

x и *y* – переменные интегрирования;

f(*x*, *y*) – подынтегральная функция.

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области *D*, где область *D* ограничена линиями $x = a,\ x = b,\ \ y = \varphi_1(x),\ \ y = \varphi_2(x)$.

---

[61] Полу́ченный = который получи́ли.

Пусть $a<b,\quad \varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, причём $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a;b]$ (рис. 32).

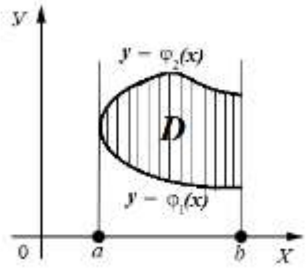


Рис. 32

Вычисление двойно́го интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ сво́дится к вычислению **повто́рного** интеграла по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,.$$

Интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ называют **внутренним** интегралом и его вычисляют первым, при этом считают, что y – переменная, а x – константа. Затем полученную функцию интегрируют по переменной x в пределах от a до b. Интеграл $\int\limits_a^b dx$ называют **внешним** интегралом.

Двойно́й интеграл можно вычислить в декартовой системе координат и в криволинейной системе координат, в частности, в полярной системе координат.

Геометрический смысл двойно́го интеграла. Если функция $f(x,y)=1$, то двойно́й интеграл по области D численно равен площади области D:

$$S=\iint\limits_D dxdy\,.$$

Физический смысл двойно́го интеграла. Массу плоской области D с плотностью распределения массы $\gamma(x,y)>0$ находят с помощью двойно́го интеграла по формуле

$$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy\,.$$

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какая задача привела к понятию двойного интеграла?
2. Как обозначают двойной интеграл?
3. Какой из интегралов в записи $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ называют внутренним интегралом, а какой – внешним?
4. Каков геометрический смысл двойного интеграла?
5. Каков физический смысл двойного интеграла?

6.2. Тройной интеграл

Словарь к теме

прое́кция *чего?* те́ла ограни́чен, -а, -о, -ы *чем?*	неоднoро́дное те́ло сфери́ческая систе́ма координа́т цилиндри́ческая систе́ма координа́т

Обозначения и записи **читают:**

$\iiint\limits_T$ – тройно́й интеграл **по области тэ**;

$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ – тройно́й интеграл **по области тэ**, эф **от** икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ игрек, дэ зэт;

$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ – (читают последовательно – слева направо): интеграл **от** а **до** бэ дэ икс, интеграл **от** фи один **от** икс **до** фи два **от** икс дэ игрек, интеграл **от** зэт один **от** икс, игрек **до** зэт два **от** икс, игрек эф **от** икс, игрек, зэт дэ зэт.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Задача о вычислении массы неоднородного тела с плотностью $f(x,y,z)$ привела́ к понятию тройно́го интеграла. Вычисление тройно́го интеграла сво́дится к вычислению определённых интегралов.

С помощью тройны́х интегралов можно находить геометрические и физические величины.

Тройно́й интеграл по области T обозначают так:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz,$$

где T – область интегрирования;

x, y и z – переменные интегрирования;

$f(x, y, z)$ – подынтегральная функция.

Пусть область T ограничена снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, причём $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ (рис. 33).

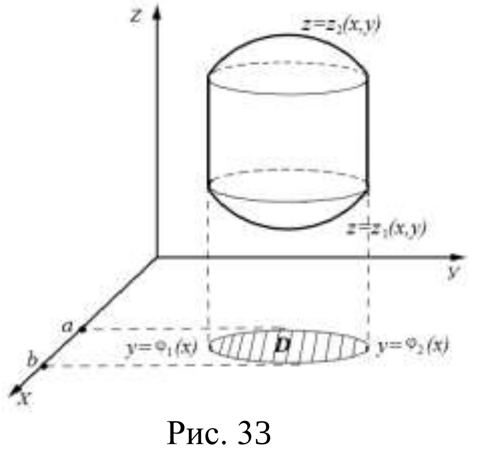


Рис. 33

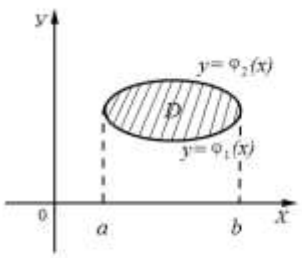


Рис. 34

Область D – это проекция области T на плоскость XOY (рис. 34), ограниченная линиями $x=a$, $y=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причём $a<b$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$.

Тогда вычисление тройно́го интеграла сво́дится к вычислению повто́рного интеграла по формуле

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\,.$$

Таким образом, вычисление тройно́го интеграла сво́дится к последовательному вычислению трёх определённых интегралов.

Тройные интегралы можно вычислять в декартовой и в криволинейной системах координат, в частности, в цилиндрической и сферической системах координат.

Геометрический смысл тройно́го интеграла. Если функция $f(x,\ y,\ z)=1$, то тройной интеграл по замкнутой области T численно равен объёму тела, ограниченного областью T:

$$V=\iiint\limits_T dxdydz\,.$$

Физический смысл тройно́го интеграла. Массу неоднородного тела T с плотностью $\gamma(x,y,z)>0$ находят с помощью тройно́го интеграла по формуле

$$m=\iiint\limits_T \gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. При решении какой задачи возникло понятие тройного интеграла?

2. В каких системах координат можно вычислять тройной интеграл?

3. Назовите системы координат, которые являются частным случаем криволинейной системы координат.

3. Прочитайте интеграл $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$.

4. Каков геометрический смысл тройного интеграла?

5. Каков физический смысл тройного интеграла?

6. Чем снизу ограничена область T?

7. Чем сверху ограничена область T?

8. Что является проекцией области T на плоскость XOY?

9. Какими линиями ограничена проекция области T на плоскость XOY?

10. Как изменяется переменная x для проекции D (рис. 34)?

11. Запишите повторный интеграл для вычисления объёма тела, изображённого на рисунке 33.

12. Прочитайте запись $V=\iiint\limits_G dxdydz$. Каков геометрический смысл этого тройного интеграла?

Задания и упражнения

Упражнение 1. Прочитайте интегралы. Как называется интеграл? Назовите подынтегральную функцию. Назовите переменные интегрирования.

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 x(15x-y)dy$;

2) $\iint\limits_D \rho\sin\varphi\rho d\rho d\varphi$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} d\rho \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\varphi$;

4) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{3-x} (1-x^2)dy$;

5) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\left(\dfrac{9}{4}-\rho^2\cos^2\varphi\right)d\rho$;

6) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^{3-y} z\,dz$;

7) $\iiint\limits_T (y^2+z^2)dxdydz$;

8) $\iint\limits_D x(15x-y)dxdy$;

9) $\iiint\limits_T 5z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$;

10) $\iiint\limits_T \rho^4\cos\theta\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$;

11) $\iiint\limits_G x^2y^2dxdydz$;

12) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz$;

13) $\iint\limits_D \left(3+arcctg\dfrac{x}{y}\right)dxdy$;

14) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^y f(x,y)dx$;

15) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{x+y} (y^2+z^2)dz$;

16) $\iiint\limits_G \rho^2 z d\rho d\varphi dz$.

Упражнение 2. Запишите повторный интеграл для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=2+x^2,\ x=0,\ x=1,\ y=0$ (рис. 29);

2) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$ (рис. 30);

3) $y=\arccos\dfrac{x}{3},\ x=0,\ y=0$ (рис. 31).

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

Интеграл $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$ называется ______________ _____________.

Здесь функция $f(x,y,z)$ называется _________________ функцией, область T называется ____________ _______________. Задача о вычислении массы неоднородного тела с плотностью $f(x, y, z)$ привела к понятию ______________ ______________. Тройные интегралы можно вычислять в ___________________ системе координат и в ____________________________ системе координат. Из криволинейных систем координат часто используют ____________________ и ____________________ системы координат.

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению __________________ _______________.

6.3. Криволинейные интегралы первого и второго рода

Словарь к теме

ве́ктор-фу́нкция за́мкнутая крива́я за́мкнутый ко́нтур	криволине́йный интегра́л обхо́д криво́й приводи́ть - привести́ *к чему?*

Обозначения и записи **читают:**

$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl$ – криволинейный интеграл первого рода **по кривой *AB*** эф **от** икс, игрек, зэт, дэ эль;

$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ – криволинейный интеграл второго рода **по кривой *AB***, пэ **от** икс, игрек, зэт дэ икс плюс ку **от** икс, игрек, зэт дэ игрек плюс эр **от** икс, игрек, зэт дэ зэт.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Криволинейный интеграл первого рода часто называют **криволинейным интегралом по длине дуги**. К понятию криволинейного интеграла первого рода привела задача о нахождении массы материальной кривой. С помощью криволинейного интеграла первого рода можно найти длину дуги кривой.

Криволинейный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по длине дуги AB (рис. 35) обозначают так:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl.$$

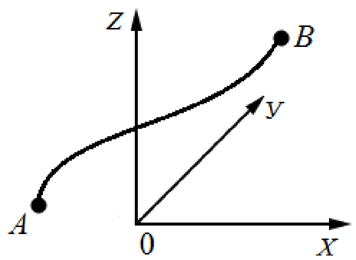


Рис. 35

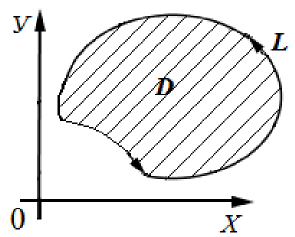


Рис. 36

Если кривая AB лежит на плоскости XOY, то криволинейный интеграл от функции $f(x,y)$ по длине дуги AB имеет вид:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сво́дится к вычислению определённого интеграла.

Криволинейный интеграл второго рода часто называют **криволинейным интегралом по координатам**. К понятию криволинейного интеграла второго рода привела задача о вычислении работы силы вдоль некоторой кривой.

Криволинейный интеграл по координатам от непрерывной вектор-функции $\overline{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),\, Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ по кривой AB (рис. 35) записывают так:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Если кривая AB лежит на плоскости XOY, то криволинейный интеграл от вектор-функции $\overline{F}(x,y)=\{P(x,y),\, Q(x,y)\}$ по координатам имеет вид:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сво́дится к вычислению определённого интеграла.

Криволинейный интеграл второго рода (в отличие от криволинейного интеграла первого рода) зависит от направления движения по кривой, т.е.

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}.$$

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой L (рис. 36) не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой L обозначают символом $\oint\limits_{L}$. Кружок на знаке интеграла означает, что контур L замкнутый.

Положительным направлением обхода контура L считается направление, при котором область, ограниченная контуром кривой, остаётся слева относительно движущейся точки. В частности, если контур лежит на плоскости XOY, то положительное направление – направление против часовой стрелки, отрицательное направление – направление по часовой стрелке.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что привело к понятию криволинейного интеграла первого рода?
2. Запишите общий вид криволинейного интеграла первого рода в пространстве.
3. Какую геометрическую величину можно найти с помощью криволинейного интеграла первого рода?
4. Какой криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования?
5. Какая задача привела к понятию криволинейного интеграла второго рода?
6. К вычислению каких интегралов сводятся вычисления криволинейных интегралов первого и второго рода?
7. Каким знаком обозначают криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой L?

6.4. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Словарь к теме

ве́кторное по́ле вы́бор вне́шняя сторона́ вну́тренняя сторона́ материа́льная пове́рхность моме́нт ине́рции	пове́рхностный интегра́л пото́к стати́ческий моме́нт центр тя́жести стоя́ть пе́ред *чем?* (перед знаком) учи́тывать *что?*

Обозначения и записи **читают:**

$\iint\limits_S F(x,y,z)dS$ – поверхностный интеграл первого рода **по эс** эф большо**е от** икс, игрек, зэт, дэ эс;

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$ – поверхностный интеграл второго рода **по эс**, пэ **от** икс, игрек, зэт, дэ игрек, дэ зэт плюс ку **от** икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ зэт плюс эр **от** икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ игрек.

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Поверхностный интеграл первого рода часто называют **поверхностным интегралом по площади поверхности**.

Поверхностный интеграл первого рода от функции $F(x,y,z)$ по поверхности S обозначают так:

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS.$$

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x,y)$, то вычисление поверхностного интеграла первого рода сво́дится к вычислению двойно́го интеграла по проекции поверхности S на плоскость XOY по формуле

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{XOY}} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy.$$

С помощью поверхностных интегралов первого рода можно вычислять массу тела, координаты центра тяжести, моменты инерции, статические моменты для материальных поверхностей с известной плотностью и т.д.

Поверхностный интеграл второго рода часто называют **поверхностным интегралом по координатам**. К понятию поверхностного интеграла второго рода привела задача о вычислении потока векторного поля.

Поверхностный интеграл второго рода имеет вид:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сво́дится к вычислению некоторого двойного интеграла. При сведении поверхностного интеграла второго рода к двойно́му интегралу надо учитывать, по какой стороне поверхности (внутренней или внешней) ведётся интегрирование. От выбора стороны поверхности будет зависеть знак (плюс или минус), который будет стоять перед двойным интегралом.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Как ещё называют поверхностный интеграл первого рода?
2. Какая задача привела к понятию поверхностного интеграла второго рода?
3. Запишите общий вид поверхностного интеграла по площади поверхности.
4. Как ещё называют поверхностный интеграл второго рода?
5. Запишите общий вид поверхностного интеграла по координатам.
6. Что можно вычислить с помощью поверхностного интеграла по площади поверхности?
7. Что можно вычислить с помощью поверхностного интеграла второго рода?
8. К вычислению каких интегралов сво́дится вычисление поверхностных интегралов?
9. При вычислении какого поверхностного интеграла учитывают сторону поверхности интегрирования?

Задания и упражнения

Упражнение 1. Прочитайте криволинейные интегралы. Назовите подынтегральную функцию. Укажите криволинейные интегралы первого и второго рода.

1) $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$; 2) $\int\limits_L (x+y+z)\,dl$;

3) $\oint\limits_L (x^2-2y)\,dx+(3x+y)\,dy$; 4) $\int\limits_L x^2 dl$;

5) $\int\limits_{AB} (x+y)dx+(x-y)dy+zdz$; 6) $\int\limits_L ydl$;

7) $\int\limits_{BC} \frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x+2}{y^2}dy$; 8) $\int\limits_L x\cdot\gamma(x,y)\,dl$;

9) $\oint\limits_L xdy-ydx$; 10) $\int\limits_{AB}\frac{dl}{x+y}$;

11) $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$; 12) $\int\limits_L xydl$.

Задание 1. А) Прочитайте пример и его решение.

Пример. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L xydl$, где L – отрезок AB, соединяющий точки $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид: $y=1-x$.

Для отрезка *AB* переменная *x* изменяется от 0 до 1, т.е. $0 \le x \le 1$.

Сведём криволинейный интеграл первого рода к определённому интегралу по формуле $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x, y(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx$ и вычислим его:

$$y'_x = -1;\ dl = \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2}dx = \sqrt{1+(-1)^2}dx = \sqrt{2}dx;$$

$$\int\limits_L xydl = \int\limits_0^1 x(1-x)\sqrt{2}dx = \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Таким образом, криволинейный интеграл по отрезку *AB* равен $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Б) Ответьте на вопросы.

1. Какого рода криволинейный интеграл надо найти?
2. Зависит ли данный интеграл от направления движения по кривой?
3. Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *B*?
4. Как изменяется переменная *x*?
5. Чему равна производная функции $y = 1 - x$?
6. Чему равно значение интеграла?

Задание 2. А) Прочитайте пример и его решение.

Пример. Вычислите интеграл $\oint\limits_L (x^2 - 2y)\,dx + (3x + y)\,dy$, где *L* – контур треугольника *OAB* с вершинами в точках *O*(0, 0), *A*(2, 0), *B*(0, 2).

Решение. Кривая *L* – замкнутая кривая. Следовательно, для вычисления интеграла можно применить **формулу Грина**

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где область *D* – треугольник *OAB* (рис 37).

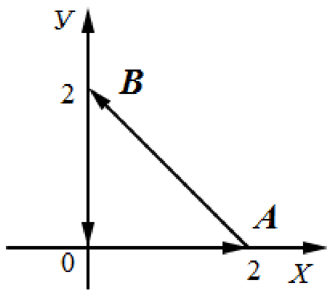


Рис. 37

Найдём частные производные функций *P*(*x*, *y*), и *Q*(*x*, *y*):

$$P(x,y) = x^2 - 2y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2;\ Q(x,y) = 3x + y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3.$$

Тогда по формуле Грина получим

$$\oint\limits_L (x^2 - 2y)\,dx + (3x + y)\,dy = 5\iint\limits_D dxdy = 5\cdot S_{\Delta OAB} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 10.$$

Б) Ответьте на вопросы.

1. Что означает символ $\oint\limits_L$?

2. Что означает буква L в записи $\oint\limits_L$?

3. Почему при решении примера можно применить формулу Грина?

4. Как называется интеграл, который записан в правой части формулы Грина?

5. Как называется интеграл, который записан в левой части формулы Грина?

6. По какой области ведётся интегрирование в двойном интеграле?

7. Чему равна частная производная функции $P(x,y)$ по игрек?

8. Чему равна частная производная Q'_x?

9. Какую формулу применили при вычислении двойного интеграла?

10. Чему равна площадь треугольника OAB?

11. Во сколько раз значение интеграла больше, чем площадь треугольника OAB?

Упражнение 2. Прочитайте интегралы. Укажите поверхностные интегралы первого и второго рода.

1) $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$; 2) $\iint\limits_S -x^2dydz+2ydxdz$;

3) $\iint\limits_S x^2\cdot f(x,y,z)dS$; 4) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+2zdxdy$;

5) $\iint\limits_S xdydz+(z-y^2)dxdy$; 6) $\iint\limits_S y\cdot f(x,y,z)dS$;

7) $\iint\limits_S (x+7z)dxdy$; 8) $\iint\limits_S (6x+15y+3z)dS$;

9) $\iint\limits_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$; 10) $\iint\limits_S Pdydz+Q\,dxdz+R\,dxdy$.

Задание 3. Установите соответствие между интегралом и его названием.

Интеграл	**Название**
$\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$	криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой
$\oint\limits_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$	поверхностный интеграл второго рода
$\int\limits_L f(x,y,z)dl$	криволинейный интеграл по координатам
$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$	поверхностный интеграл первого рода
$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$	криволинейный интеграл по длине дуги кривой

Тема 7. Элементы теории поля

Словарь к теме

градие́нт диверге́нция опера́тор Га́мильтона ро́тор циркуля́ция ориенти́рованный ориенти́рованная пове́рхность	безвихрево́е по́ле скаля́рное по́ле соленоида́льное по́ле потенциа́л потенциа́льное по́ле теоре́ма вы́бранный

Обозначения и записи **читают:**

M_0 – эм нулев**о́е**;

$\overline{F} = \{P, Q, R\}$ – вектор эф **с** координат**ами** пэ, ку, эр;

$\bar{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – вектор эль нулев**ое** **с** координат**ами** косинус а́льфа, косинус бэ́тта, косинус га́мма;

grad – градиент;

$\text{grad}\, u(M_0)$ – градиент у **в** точк**е** эм нулев**о́е**;

$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$ – дэ у **по** дэ икс **в** точк**е** эм нулев**о́е**;

$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0)$ – дэ у **по** дэ эль **в** точк**е** эм нулев**о́е**;

rot – ротор;

$\text{rot}\overline{F}$ – ротор вектор**а** эф;

∇ – набла;

$\overline{\nabla}$ – вектор набла;

$\overline{\nabla} \times \overline{F}$ (или $[\overline{\nabla}, \overline{F}]$) – векторное произведение векторов набла и эф;

$\text{rot}\overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F}$ – ротор вектора эф рав**ен** векторн**ому** произведени**ю** векторов набла и эф;

Ц – циркуляция векторного поля;

П – поток векторного поля;

div – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_S$ – поверхностный интеграл второго рода **по замкнутой поверхности эс**.

Задание 1. А) Прочитайте текст.

Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$, вычисленный в точке M_0 этого поля, находится по формуле

$$\text{grad}\, u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\bar{k} .$$

Производная скалярного поля $u(x,y,z)$ по направлению вектора $\bar{l}$, вычисленная в точке M_0, находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma,$$

где $\bar{l}_0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор направления вектора $\bar{l}$.

Ротор векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ находится по формуле

$$\mathrm{rot}\overline{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}. \qquad (4)$$

Формулу (4) можно записать символически с по́мощью **оператора Га́мильтона**. Оператор Га́мильтона также называют **оператором набла** и обозначают символом ∇. Тогда формула (4) для векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ имеет вид:

$$\mathrm{rot}\overline{F}=\overline{\nabla}\times\overline{F}.$$

Векторное произведение векторов $\overline{\nabla}$ и $\overline{F}$ находится по формуле

$$\overline{\nabla}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

где $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$.

Циркуляция векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ по замкнутому ориентированному контуру L находится с по́мощью криволинейного интеграла второго рода по формуле

$$\text{Ц}=\oint_L P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz.$$

Поток векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ через ориентированную поверхность S можно найти с помощью поверхностного интеграла второго рода по формуле

$$\Pi=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy.$$

Дивергенция векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ находится по формуле

$$\mathrm{div}\overline{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса позволяет найти пото́к векторного поля $\overline{F}=\{P, Q, R\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S с по́мощью тройно́го интеграла по трёхмерной области T, ограниченной поверхностью S:

$$\Pi=\iiint_T \mathrm{div}\overline{F}dxdydz,$$

где функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области T.

Если ротор векторного поля $\overline{F} = \{P, Q, R\}$ равен нулевому вектору, то векторное поле называется **безвихревы́м** или **потенциа́льным**. Тогда существует функция $u(x, y, z)$, такая, что $\mathrm{grad}\,u = \overline{F}$. Если $\mathrm{grad}\,u = \overline{F}$, то функцию $u(x, y, z)$ называют **потенциа́лом** векторного поля.

Векторное поле $\overline{F} = \{P, Q, R\}$ является **соленоида́льным**, если его дивергенция равна нулю, т.е. $\mathrm{div}\overline{F} = 0$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Каким символом обозначают оператор набла?

2. Как обозначают дивергенцию вектора $\overline{F} = \{P, Q, R\}$?

3. Запишите, чему равен ротор вектора $\overline{F} = \{P, Q, R\}$ через векторное произведение векторов.

4. Запишите ротор вектора $\overline{F} = \{xy, xz, yz\}$ через определитель третьего порядка.

5. Какие бывают векторные поля?

6. Чему равна дивергенция соленоида́льного векторного поля $\overline{F} = \{P, Q, R\}$?

7. Какому вектору равен ротор потенциального векторного поля $\overline{F} = \{P, Q, R\}$?

8. Как обозначают градиент скалярного поля $u(x, y, z)$?

9. Какая теорема позволяет найти поток векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности?

10. Как называется криволинейный интеграл, который позволяет вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F} = \{P, Q, R\}$ по замкнутому ориентированному контуру?

11. С помощью какого оператора можно символически записать ротор вектора $\overline{F} = \{P, Q, R\}$?

12. Как по-другому называют оператор Гамильтона?

13. Прочитайте записи:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}(A(1;-2))$; 2) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$;

3) $\text{Ц} = \oint\limits_L xdx - xydy + zdz$; 4) $\Pi = \iint\limits_S ydydz + z^2dxdz$;

5) $\mathrm{div}\overline{F} = xy - z^3 + x^2$; 6) $\mathrm{rot}\overline{F} = \{2x; -y; 3\}$;

7) $\mathrm{grad}\,u = \overline{F}$; 8) $\mathrm{div}\overline{F} = \mathrm{const}$;

9) $\text{Ц} = \oint\limits_L x^2dy - ydx$; 10) $\mathrm{rot}\overline{F} = \{-5xz; 4; yz^2\}$;

11) $\mathrm{grad}\,u(1, 2) = \{-3; 5\}$; 12) $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M(1;-2;0))$.

Задания и упражнения

Упражнение 1. Прочитайте записи:

1) $\operatorname{div}\overline{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$, где $\overline{F} = \{P, Q, R\}$;

2) $Ц = \oint\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$;

3) $П = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$;

4) $\operatorname{rot}\overline{F} = \left[\overline{\nabla}, \overline{F}\right]$;

5) $\operatorname{grad}u(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0)\overline{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)\overline{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0)\overline{k}$;

6) $П = \iiint\limits_T \operatorname{div}\overline{F}dxdydz$;

7) $\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$.

Задание 1. Вставьте пропущенные слова.

Циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому ориентированному контуру можно найти с помощью ______________________ _______________ _______________ ___________ .

Поток векторного поля $\overline{F}$ через ____________ ___________ ____________ поверхности можно найти с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

Если $\operatorname{rot}\overline{F} = \overline{0}$, то векторное $\overline{F}$ называется _________________ .

Если $\operatorname{div}\overline{F} = 0$, то векторное $\overline{F}$ называется __________________ .

Безвихревое поле $\overline{F}$ имеет _______________ $u(x, y, z)$, такой, что $\operatorname{grad}u =$ ___________.

Задание 2. Выполните задания.

1. Найдите дивергенцию векторного поля $\overline{F} = \{x^2; y^2; z\}$.

2. Найдите градиент скалярного поля $u(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

3. Запишите интеграл для вычисления циркуляции векторного поля $\overline{F} = (2x - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}$ по замкнутой кривой L.

Задание 3. Установите соответствие между понятием и его обозначением.

Понятие	Обозначение понятия
дивергенция векторного поля	$u(x, y, z)$
ротор векторного поля	$\overline{F} = \{P, Q, R\}$
градиент скалярного поля $u(x, y, z)$	$\operatorname{div}\overline{F}$
векторное поле	$\operatorname{grad}u$
скалярное поле	$\operatorname{rot}\overline{F}$

Тема 8. Элементы теории вероятностей

Словарь к теме

величина́	исхо́д
случа́йная величина́	бла́гоприя́тный исхо́д
дискре́тная случа́йная величина́	о́пыт
непреры́вная случа́йная величина́	исхо́д *чего?* о́пыта
вероя́тность	математи́ческое ожида́ние
тео́рия вероя́тностей	отклоне́ние
диспе́рсия	сре́днее квадрати́ческое отклоне́ние
собы́тие	возмо́жное значе́ние
достове́рное собы́тие	ино́е значе́ние (=друго́е значе́ние)
зави́симые собы́тия	сре́днее значе́ние
незави́симые собы́тия	отде́льное значе́ние
невозмо́жное собы́тие	пло́тность распределе́ния
несовме́стные собы́тия	числова́я характери́стика
про́тивополо́жное собы́тие	факт
совме́стные собы́тия	влия́ть *на что?*
случа́йное собы́тие	одновреме́нно
появле́ние *чего?* события	справедли́в,-а, -о, -ы

Обозначения и записи **читают:**

$P(A)$ – рэ **от** а (вероятность события A);

$P(A) = 1$ – рэ **от** а равн**о** одн**ому** (вероятность события а равн**а** одн**ому**);

$\overline{A}$ – а **с** черт**ой**;

$P(A)+P(\overline{A})=1$ – рэ **от** а плюс рэ **от** а **с** черт**ой** равн**о** одн**ому**;

$M(X)$ – эм **от** икс (математическое ожидание случайной величины икс);

$D(X)$ – дэ **от** икс (дисперсия случайной величины икс);

σ – сигма (среднее квадратическое отклонение);

$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ – сумма **по и от** одн**ого до эн** икс и́т**ое** умножить **на** пэ и́т**ое**.

Задание 1. Образуйте существительные от прилагательных с помощью суффикса «ость». Проверьте слова по словарю.

Образец: последовательн**ый** (-ость-) – последовательность.

1) вероя́тн**ый** (-ость-) – ____________________
2) возмо́жн**ый** (-ость-) – ____________________
3) достове́рн**ый** (-ость-) – ____________________
4) зави́сим**ый** (-ость-) – ____________________
5) незави́сим**ый** (-ость-) – ____________________
6) случа́йн**ый** (-ость-) – ____________________
7) противополо́жн**ый** (-ость-) – ____________________
8) совме́стн**ый** (-ость-) – ____________________
9) справедлив**ый** (-ость-) – ____________________

Задание 2. А) Прочитайте текст.

Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает случайные события, случайные величины и их числовые характеристики.

Событие в теории вероятностей – это любой факт, который может произойти или не произойти в результате опыта. События бывают случайными, невозможными или достоверными. **Достоверное событие** обязательно произойдёт в результате опыта. **Невозможное событие** никогда не произойдёт в результате опыта. **Случайное событие** может произойти или не произойти в результате опыта. События обозначают большими латинскими буквами A, B, C и т.д.

Вероятность является числовой характеристикой события.

Если A – это достоверное событие, то его вероятность равна единице. Записывают: $P(A) = 1$.

Если B – это невозможное событие, то его вероятность равна нулю. Записывают: $P(B) = 0$.

Если C – это случайное событие, то его вероятность – число от нуля до единицы. Записывают: $0 < P(C) < 1$.

Вероятность случайного события часто можно найти с помощью **классического определения вероятности**. Вероятность случайного события A равна отношению числа m – благоприятных исходов появления события A к общему числу исходов опыта n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

События A и B называются **несовместными событиями**, если они не могут произойти одновре́нно. Для несовместных событий справедлива теорема сложения вероятностей: вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Если A и $\overline{A}$ – противоположные события, то сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

События A и B называются **независимыми событиями**, если появление одного события не влияет на вероятность появления другого события. Для независимых событий справедлива теорема умножения вероятностей: если A и B – независимые события, то вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Что является событием в теории вероятностей?
3. Какие события бывают в теории вероятностей?
4. Какое событие называется достоверным?
5. Какое событие называется невозможным?

6. Какое событие называется случайным?

7. Чему равна вероятность случайного события?

8. Чему равна вероятность достоверного события?

9. Чему равна вероятность невозможного события?

10. Какие события называются независимыми?

11. Какие события называются несовместными?

12. Чему равна вероятность суммы несовместных событий?

13. Чему равна вероятность произведения независимых событий?

14. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

15. Запишите классическое определение вероятности.

16. Запишите теорему сложения вероятностей.

17. Запишите теорему умножения вероятностей.

18. Чему равна вероятность события A, если известна вероятность противоположного события $\overline{A}$?

19. Для каких событий применяют теорему умножения вероятностей?

20. Для каких событий применяют теорему сложения вероятностей?

Задание 3. А) Прочитайте текст.

Рассмотрим случайные величины и их числовые характеристики.

Случайной величиной *X* называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение x_i. Случайные величины обозначают большими латинскими буквами *A*, *B*, *X*, *У* и т.д.

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ. Часто математическое ожидание называют **средним значением случайной величины**.

Случайные величины бывают дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате опыта может принимать отдельные значения x_i с определённой вероятностью p_i. Дискретную случайную величину можно задать законом распределения в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тогда математическое ожидание дискретной случайной величины X находится по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины X определяется формулой

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i.$$

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой прямой. Непрерывную случайную величину обычно задают функцией $f(x)$, которую называют **плотностью распределения** вероятностей.

Если X – непрерывная случайная величина и $f(x)$ – её плотность распределения, то математическое ожидание случайной величины X находится по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется формулой

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx.$$

Для дисперсии непрерывной и дискретной случайной величины также справедлива формула

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Средним квадратическим отклонением σ **случайной величины** X называется положительный корень из дисперсии, т.е. $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Какая величина называется случайной?
2. Какие бывают случайные величины?
3. Назовите основные числовые характеристики случайных величин.
4. Какая случайная величина называется непрерывной?
5. Какая случайная величина называется дискретной?
6. Запишите формулу для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины.
7. Какую числовую характеристику случайной величины можно найти по формуле $M(X^2)-M^2(X)$?
8. По какой формуле находят математическое ожидание непрерывной случайной величины?
9. Какой формулой определяется дисперсия непрерывной случайной величины?
10. Что называют средним значением случайной величины?
11. Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины?
12. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

x_i	-1	2	5	10	20
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Задания и упражнения

Задание 1. А) Прочитайте текст.

В неделе семь дней: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота и воскресенье. Суббота и воскресенье – это выходные дни, а остальные дни – рабочие. Рассмотрим некоторые события. Событие C – сегодня рабочий день или выходной день – это достоверное событие. Вероятность достоверного события равна 1, т.е. $P(C)=1$. Событие D: среда – выходной день. Это невозможное событие, а вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(D)=0$.

Событие A – сегодня понедельник. Это случайное событие и его вероятность можно найти с помощью классического определения вероятности $P(A)=\dfrac{m}{n}$. Здесь n – число всех дней недели равно 7, m – число благоприятных исходов. Число $m=1$, потому что в неделе только один понедельник. Тогда $P(A)=\dfrac{1}{7}$.

Событие B – сегодня выходной. Это тоже случайное событие и его вероятность $P(B)=\dfrac{2}{7}$. Рассмотрим событие $\overline{B}$, противоположное событию B. $\overline{B}$ – сегодня рабочий день. Так как сумма вероятностей противоположных событий равна единице, то

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}.$$

Б) Ответьте на вопросы и выполните задания.

1. Назовите случайные события.
2. Сколько в неделе рабочих дней?
3. Назовите достоверное событие.
4. Чему равна вероятность достоверного события?
5. Назовите невозможное событие.
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. По какой формуле нашли вероятность события A? Запишите эту формулу.
8. Назовите противоположные события.
9. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
10. Почему вероятность события A равна $\dfrac{1}{7}$?
11. Почему вероятность события B равна $\dfrac{2}{7}$?
12. Найдите вероятность события F: сегодня вторник.
13. Найдите вероятность события E: вторник – выходной день.

Упражнение 1. Прочитайте записи:

1) $P(A)=\dfrac{m}{n}$; 2) $P(A)+P(\overline{A})=1$; 3) $P(A+B)=P(A)+P(B)$;

4) $P(B)=0$; 5) $0<P(C)<1$; 6) $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$;

7) $P(A)=1$; 8) $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$; 9) $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$;

10) $\sigma=\sqrt{D(X)}$; 11) $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i$.

Задание 2. Установите соответствие между формулой и её названием.

Формула	Название
$P(A)=\dfrac{m}{n}$	математическое ожидание дискретной случайной величины
$P(A)+P(\overline{A})=1$	вероятность достоверного события
$P(A)=1$	классическое определение вероятности
$P(B)=0$	теорема сложения вероятностей
$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx$	среднее квадратическое отклонение случайной величины
$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$	вероятность невозможного события
$P(A+B)=P(A)+P(B)$	теорема умножения вероятностей
$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$	дисперсия непрерывной случайной величины
$\sigma=\sqrt{D(X)}$	математическое ожидание непрерывной случайной величины
$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i$	сумма вероятностей противоположных событий
$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$	дисперсия дискретной случайной величины

Задание 3. Найдите вероятность события *A*, если:

1) событие *A* – сегодня среда; 2) событие *A* – сейчас май;
3) событие *A* – сейчас весна; 4) событие *A* – сейчас утро;
5) событие *A* – сегодня 7 мая; 6) событие *A* – сегодня 7 мая, осень.

Задание 4. Приведите примеры:

1) достоверного события; 2) случайного события;
3) невозможного события; 4) совместных событий;
5) независимых событий; 6) несовместных событий;
7) зависимых событий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазырина Е.Д. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие: рабочая тетрадь / Е.Д. Глазырина. – Томск, 2012.
2. Ефремова О.Н. Математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / О.Н. Ефремова, Г.П. Столярова, Е.Д. Глазырина. – Томск, 2014.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М., 1978.
4. Подберезина Е.И. Математика: учебное пособие / Е.И. Подберезина. – Томск, 2011.
5. Шипачёв В.С. Основы высшей математики / В.С. Шипачёв. – М., 2006.

Чтение основных математических обозначение, Записей, сокращений и букв

$\in$ – принадлежит;

$\notin$ – не принадлежит;

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда, когда;

$\Rightarrow$ – следовательно (тогда);

$\approx$ – приближённо равно;

$\bigcup$ – объединение;

$\bigcap$ – пересечение;

$\backslash$ – разность;

$\pm$ – плюс, минус;

$\mp$ – минус, плюс;

$(\ldots)$ – круглые скобки;

$[\ldots]$ – квадратные скобки;

$\{\ldots\}$ – фигурные скобки;

$\varnothing$ – пустое множество;

$|A|$ $(= \det A)$ – определитель матрицы A;

$(m \times n)$ – эм на эн;

a_{ij} – а, и, жи;

$i = 1, 2, \ldots, m$ – и равно один, два и так далее эм;

$i = \overline{1, m}$ – и изменяется от одного до эм;

$c = \text{const}$ – цэ константа;

$\frac{1}{a}$ – один разделить на а;

$2 \in N$ – два принадлежит эн;

$\{2n \mid n \in N\}$ – множество чисел два эн таких, что эн ма́ленькое принадлежит эн большо́му;

a^n – а в степени эн (а в э́нной степени);

$\sqrt[n]{a}$ – корень степени эн из а (корень э́нной степени из а);

$[a; b]$ – отрезок от а до бэ;

$(a; b)$ – интервал от а до бэ;

$(a; b]$ – полуинтервал от а до бэ включительно;

$[a; b)$ – полуинтервал от а включительно до бэ;

$\log_a x$ – логарифм икс по основанию а;

$\ln x$ – натуральный логарифм икс;

$\lg x$ – десятичный логарифм икс;

$\sin \alpha$ – си́нус а́льфа;

$\cos \alpha$ – ко́синус а́льфа;

$\text{tg}\, \alpha$ – та́нгенс альфа;

$\text{ctg}\, \alpha$ – кота́нгенс а́льфа;

$\sec \alpha$ – се́канс а́льфа;

$\operatorname{cosec} \alpha$ – косе́канс а́льфа;

$\arcsin x$ – аркси́нус икс;

$\arccos x$ – аркко́синус икс;

$\operatorname{arctg} x$ – аркта́нгенс икс;

$\operatorname{arcctg} x$ – арккота́нгенс икс;

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – альфа больше нуля и меньше пи на два;

ΔABC – треугольник а, бэ, цэ;

$\angle ABC$ – угол а, бэ, цэ;

$B\hat{A}C$ – угол бэ, а, цэ;

$M(x, y)$ – точка эм с координатами икс, игрек;

$M_0(x_0, y_0)$ – точка эм нулево́е с координатами икс нулево́е, игрек нулево́е;

$y = f(x)$ – игрек равен эф от икс;

$z(x, y)$ – зэт от икс, игрек;

$z = f(x, y)$ – зэт равно эф от икс, игрек;

$F(x, y, z) = 0$ – эф от икс, игрек, зэт равно нулю;

$\bar{a} = \{ a_x, a_y, a_z \}$ – вектор а с координатами а икс, а игрек, а зэт;

$\bar{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – вектор эль нулевое с координатами косинус а́льфа, косинус бэ́тта, косинус га́мма;

$|\bar{a}|$ – модуль вектора а (длина вектора а);

$|\overline{AB}|$ – модуль вектора а бэ (длина вектора а бэ);

$\bar{a} \parallel \bar{b}$ – вектор а параллелен вектору бэ;

$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ – векторы а бэ и цэ дэ сонапра́влены;

$\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ – векторы а бэ и цэ дэ противоположно напра́влены;

$\bar{a} \perp \bar{b}$ – вектор а перпендикулярен вектору бэ;

$(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) = \varphi$ – угол между векторами а и бэ равен фи;

$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$ – проекция вектора a на вектор бэ;

$\text{пр}_{OX}\bar{a}$ – проекция вектора a на ось о икс;

$(\bar{a}, \bar{b})$ (или $\bar{a}\bar{b}$) – скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$\bar{a} \times \bar{b}$ (или $[\bar{a}, \bar{b}]$) – векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ (или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$) – смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$;

Δx – дельта икс;

Δy – дельта игрек;

x_0 – икс нулево́е;

$\lim$ – предел;

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – предел эф от икс при икс, стремящемся к икс нулево́му;

y' – игрек штрих;
$f'(x)$ – эф штрих от икс;
dx – дэ икс;
dy – дэ игрек;
$df(x)$ – дэ эф от икс;
$\frac{dy}{dx}$ – дэ игрек по дэ икс;
$\frac{df(x)}{dx}$ – дэ эф от икс по дэ икс;
$y'(x_0)$ – игрек штрих от икс нулевóе;
$f'(x_0)$ – эф штрих от икс нулевóе;
$y'|_{x=x_0}$ – игрек штрих, вычисленное при икс, рáвном икс нулевóму;
$\frac{df(x_0)}{dx}$ – дэ эф от икс нулевóе по дэ икс;
y'' – игрек два штрихá;
$f''(x)$ – эф два штрихá от икс;
$\frac{d^2y}{dx^2}$ – дэ два игрек по дэ икс двáжды;
y''' – игрек три штрихá;
$f'''(x)$ – эф три штрихá от икс;
$\frac{d^3y}{dx^3}$ – дэ три игрек по дэ икс трúжды;
$y^{(n-1)}$ – производная эн минус первого порядка функции y;
$y^{(n)}$ – производная э́нного порядка функции y;
$f^{(n)}(x)$ – производная э́нного порядка функции эф от икс;
$\frac{d^ny}{dx^n}$ – дэ эн игрек по дэ икс эн раз;
d^2y – дэ два игрек;
d^3y – дэ три игрек;
$d^{(n)}y$ – дэ эн игрек;
$\frac{\partial z}{\partial x}$ – дэ зэт по дэ икс;
$\frac{\partial z}{\partial y}$ – дэ зэт по дэ игрек;
z'_x – зэт штрих по икс;
z'_y – зэт штрих по игрек;

$f'_x(x,y)$ – эф штрих по икс от икс, игрек;

$f'_y(x,y)$ – эф штрих по игрек от икс, игрек;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – дэ два зэт по дэ икс два́жды;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – дэ два зэт по дэ игрек два́жды;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – дэ два зэт по дэ икс, дэ игрек;

z''_{xx} – зэт два штриха́ по икс два́жды;

z''_{yy} – зэт два штриха́ по игрек два́жды;

z''_{xy} – зэт два штриха́ по икс, игрек;

$\int$ – интеграл;

$\int f(x)dx$ – интеграл эф от икс дэ икс;

$\int_a^b$ – интеграл от а до бэ;

$\int_a^b f(x)dx$ – интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс;

$\iint_D$ – двойно́й интеграл по области дэ;

$\iint_D f(x,y)dxdy$ – двойно́й интеграл по области дэ, эф от икс, игрек дэ икс, дэ игрек;

$\iiint_T$ – тройно́й интеграл по области тэ;

$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz$ – тройно́й интеграл по области тэ, эф от икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ игрек, дэ зэт;

$\int_{AB} f(x,y,z)dl$ – криволинейный интеграл первого рода по кривой AB эф от икс, игрек, зэт, дэ эль;

$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ – криволинейный интеграл второго рода по кривой AB пэ от икс, игрек, зэт дэ икс плюс ку от икс, игрек, зэт дэ игрек плюс эр от икс, игрек, зэт дэ зэт;

$\iint_S F(x,y,z)dS$ – поверхностный интеграл первого рода по эс эф большо́е от икс, игрек, зэт, дэ эс;

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$ – поверхностный интеграл второго рода по эс пэ от икс, игрек, зэт, дэ игрек, дэ зэт плюс ку от икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ зэт плюс эр от икс, игрек, зэт, дэ икс, дэ игрек;

$\oint\limits_L$ – криволинейный интеграл по замкнутой кривой эль;

$\oiint\limits_S$ – поверхностный интеграл по замкнутой поверхности эс;

grad – градиент;

$\mathrm{grad}\,u(M_0)$ – градиент у в точке эм нулево́е;

Ц – циркуляция векторного поля;

П – поток векторного поля;

div – дивергенция;

rot – ротор;

$\mathrm{rot}\bar{F}$ – ротор вектора эф;

∇ – набла;

$\bar{\nabla}$ – вектор набла;

$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$ – дэ у по дэ икс в точке эм нулево́е;

$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0)$ – дэ у по дэ эль в точке эм нулево́е;

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ – сумма по и от одного до эн икс и́тое умножить на пэ и́тое.

Латинский алфавит

Ср.р					М.р.
A(*a*) – а *B*(*b*) – бэ *C*(*c*) – цэ *D*(*d*) – дэ *E*(*e*) – е	*F*(*f*) – эф *G*(*g*) – жэ *H*(*h*) – аш *I* (*i*) – и *J*(*j*) – жи	*K*(*k*) – ка *L*(*l*) – эль *M*(*m*) – эм *N*(*n*) – эн *O*(*o*) – о	*P*(*p*) – пэ *Q*(*q*) – ку *R*(*r*) – эр *S*(*s*) – эс *T*(*t*) – тэ	*U*(*u*) – у *V*(*v*) – вэ *W*(*w*) – дубль-вэ	*X*(*x*) – икс *Y*(*y*) – и́грек *Z*(*z*) – зэт

Греческий алфавит

Α (α) – а́льфа	Η (η) – э́та	Ν (ν) – ню	Τ (τ) – та́у
Β (β) – бэ́тта	Θ (θ) – те́та	Ξ (ξ) – кси	Υ (υ) – ю́псилон
Γ (γ) – га́мма	Ι (ι) – ио́та	Ο (ο) – о́микрон	Φ (φ) – фи
Δ (δ) – де́льта	Κ (κ) – ка́ппа	Π (π) – пи	Χ (χ) – кси
Ε (ε) – э́псилон	Λ (λ) – ля́мбда	Ρ (ρ) – ро	Ψ (ψ) – пси
Ζ (ς) – дзе́та	Μ (μ) – мю	Σ (σ) – си́гма	Ω (ω) – оме́га

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При обучении в магистратуре иностранные граждане должны использовать на русском языке терминологию, лексику и конструкции, характерные для языка математики и знать основы школьного курса математики и высшей математики.

Учебное пособие предназначено для иностранных граждан, окончивших бакалавриат на иностранном языке, и желающих продолжить обучение в магистратуре на русском языке. В пособие представлены основные разделы школьной и высшей математики, необходимые иностранным гражданам для обучения в магистратуре на русском языке.

Следует отметить, что пособие (часть 1) является не единственным в своем роде, предназначенным для изучения основных разделов школьной математики. Но большая часть пособий по математике на русском языке как иностранном предназначена для будущих бакалавров, а не магистров.

Стоит заметить, что данное пособие (часть 2) в представленном объёме является практически единственным в своем роде, т.к. основная часть пособий по высшей математике содержит определённые её разделы, такие как линейная алгебра, аналитическая геометрия в широком объёме и предназначены для иностранных студентов, обучающихся в бакалавриате на русском языке.

Особенностью пособия является то, что на начальном этапе апробации в первоначальном варианте пособия вносились изменения, такие как проставление в словах ударения, чтение знаков и обозначений, разбивка длинных предложений на короткие и т.д.

Авторы надеются, что изучив материал пособия, иностранные граждане получат представления об основных понятиях, терминах, знаках и конструкций в математике на русском языке. В дальнейшем эти знания им будут необходимы при освоении профильных дисциплин в магистратуре.

Содержание

Предисловие …………………………………………………………….. 3
Введение ………………………………………………………………… 4
Часть 1. Элементарная математика ……………………………… 5
Тема 1. Натуральные числа. Арифметические операции ……………….. 5
1.1. Натуральные числа …………………………………………..... 5
1.2. Арифметические операции ………………………………….... 6
1.3. Компоненты арифметических операций …………………….. 7
1.4. Множество натуральных чисел. Чётные и нечётные числа ... 11
Задания и упражнения …………………..……………………………… 13
Тема 2. Порядок действий. Сравнение чисел …………………………….. 15
2.1. Порядок действий ………………………………………… 15
2.2. Сравнение чисел. Положительные и отрицательные числа 16
Задания и упражнения ……………………………………………………….. 19
Тема 3. Делимость чисел …………………………………………………... 20
3.1. Делитель и кратное …………………………………………… 20
3.2. Простые и составные числа ………………………………….... 21
Задания и упражнения ……………………………………………………... 22
Тема 4. Дроби …………………………………………………………........ 23
4.1. Обыкновенные дроби ………………………………………... 23
4.2. Правильные и неправильные дроби. Смешанные дроби …….. 26
4.3. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю ……………………………………………. 27
4.4. Сравнение дробей ……………………………………………… 30
4.5. Действия с обыкновенными и смешанными дробями ……….. 31
Задания и упражнения ……………………………………………….…...... 32
Тема 5. Десятичные дроби …………………………………………………… 34
5.1. Десятичные дроби ………………………………………….... 34
5.2. Обращение обыкновенной дроби в десятичную дробь ……... 36
Задания и упражнения ……………………………………………………... 38
Тема 6. Степень с натуральным показателем …………………………….. 40
6.1. Степень с натуральным показателем ……………………….… 40
6.2. Возведение в степень положительных и отрицательных чисел ……………………………………………………………… 43
Задания и упражнения ……………………………………………………... 44
Тема 7. Извлечение корня из натурального числа, обыкновенной и десятичной дробей …………………………………………………… 45
Задания и упражнения ……………………………………………………... 48
Тема 8. Отношения. Пропорции. Проценты ……………………………... 49
8.1. Отношения. Пропорции ……………………………………… 49
8.2. Проценты …………………………………………………………. 50
Задания и упражнения ……………………………………………………... 51
Тема 9. Элементы теории множеств ………………………………….... 52

9.1. Понятие множества ………………………………………………. 52
9.2. Числовые множества ………………………………………….. 54
9.3. Модуль числа …………………………………………………..... 56
9.4. Числовая ось …………………………………………………… 57
9.5. Числовые промежутки ………………………………………… 58
9.6. Операции над множествами …………………………………….. 60
Задания и упражнения …………………………………………………... 61
Тема 10. Действия над десятичными числами ……………………….... 62
10.1. Сложение и вычитание действительных чисел …………… 62
10.2. Умножение и деление действительных чисел …………..…... 63
10.3. Возведение в степень ………………………………………… 65
10.4. Формулы сокращенного умножения ……………………….... 67
10.5. Извлечение корня ……………………………………………… 68
Задания и упражнения …………………………………………………... 70
Тема 11. Некоторые формулы элементарной математики ……………… 72
11.1. Определение логарифма. Свойства логарифмов …………... 72
11.2. Формулы тригонометрии ……………………………………… 74
Задания и упражнения …………………………………………………... 77
Тема 12. Функция ………………………………………………………... 80
12.1. Координатная плоскость. Координаты точки ……………… 80
12.2. Числовая функция. Способы задания функций …………… 82
12.3. Графики некоторых функций ………………………………….. 84
Задания и упражнения ………………………………………………….... 89
Тема 13. Уравнения и неравенства ……………………………………... 92
13.1. Уравнения ……………………………………………………….. 92
13.2. Неравенства ……………………………………………………..... 95
Задания и упражнения …………………………………………………... 97
Тема 14. Геометрия ……………………………………………………… 100
14.1. Геометрия на плоскости ……………………………………...... 100
14.2. Геометрия в пространстве …………………………………… 104
Задания ………………………………………………………………….... 106
Часть 2. Элементы высшей математики ………………………… 109
Тема 1. Элементы линейной алгебры ……………………………….... 109
1.1. Матрицы ………………………………………………………….. 109
1.2. Виды матриц ……………………………………………………... 113
Задания и упражнения …………………………………………………... 115
1.3. Линейное уравнение с *n* неизвестными ……………………… 116
Задания и упражнения …………………………………………………... 118
1.4. Системы линейных уравнений ……………………………….... 119
Задания и упражнения …………………………………………………... 124
Тема 2. Векторная алгебра ……………………………………………… 125
2.1. Векторные и скалярные величины ……………………………… 125
2.2. Основные понятия ……………………………………………….. 126
2.3. Проекция вектора ……………………………………………… 128

2.4. Геометрическая интерпретация векторов ………………….... 130
2.5. Прямоугольная система координат. Радиус-вектор ………… 132
2.6. Нелинейные операции над векторами ………..…………… 134
Задания и упражнения ………………………………………………... 138
Тема 3. Дифференцирование функций одной переменной ……………... 140
3.1. Приращение функции и приращение аргумента ……………. 140
3.2. Производная и дифференциал функции ……………………... 141
3.3. Основные правила дифференцирования. Таблица производных ……………………………………………......... 143
3.4. Производные и дифференциалы высших порядков ……….... 144
Задания и упражнения………………………………………………… 145
Тема 4. Функции нескольких переменных ……………………………….. 147
4.1. Основные понятия и геометрическое изображение функции двух переменных ………………………………………………… 147
4.2. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных …….……….... 149
4.3. Производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных ………………………………………… 150
Задания и упражнения ………………………………………………... 152
Тема 5. Интегральное исчисление функции одной переменной ………... 153
5.1. Неопределённый интеграл ……………………………………. 153
Задания и упражнения ………………………………………………... 156
5.2. Определённый интеграл ………………………………………. 157
Задания и упражнения ……………………………………………....... 160
Тема 6. Интегральное исчисление функции нескольких переменных …. 162
6.1. Двойной интеграл ……………………………………………... 162
6.2. Тройной интеграл ……………………..……………………..... 164
Задания и упражнения ………………………………………………... 166
6.3. Криволинейные интегралы первого и второго рода ………... 167
6.4. Поверхностные интегралы первого и второго рода ……….... 169
Задания и упражнения ………………………………………………... 170
Тема 7. Элементы теории поля ……………………………………………. 173
Задания и упражнения ………………………………………………... 176
Тема 8. Элементы теории вероятностей ………………………………….. 177
Задания и упражнения ………………………………………………... 181
Список литературы ………………………………………………………. 183
Чтение основных математических обозначений, записей, сокращений и букв ……………………………………………………………………….. 184
Заключение ……………………………………………………………… 189

Учебное издание

ГЛАЗЫРИНА Елена Дмитриевна
ЕФРЕМОВА Оксана Николаевна

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРЕДМАГИСТРАНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Учебное пособие для иностранных граждан

Научный редактор
кандидат физико-математических наук,
доцент А.И. Шерстнева

Корректура *Н.С. Русинова*
Компьютерная верстка *О.Н. Ефремова*
Дизайн обложки *И.О. Фамилия*

Подписано к печати 00.00.2015. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 9,01. Уч.-изд. л. 8,16.
Заказ 000-14. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru