Решение задачи квадратичного программирования графическим методом

ЗАДАНИЕ.

Используя графический метод, решить следующие задачи:

$$f(x) = 9(x_1 - 9)^2 + 9(x_2 - 9)^2 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Решаем задачу графическим способом. Строим область допустимых решений – область в плоскости x_1Ox_2, удовлетворяющую системе неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Строим прямые:

(I) $x_1 + 2x_2 = 2$, точки (2, 0) и (0, 1)

(II) $x_1 + x_2 = 6$, точки (6, 0) и (0, 6)

(III) $2x_1 + x_2 = 11$, точки (5, 1) и (4, 3)

Получаем ограниченную область $ABCDE$ в первой четверти (так как $x_1, x_2 \geq 0$).

Рисунок 1. Общий вид области и линии уровня целевой функции

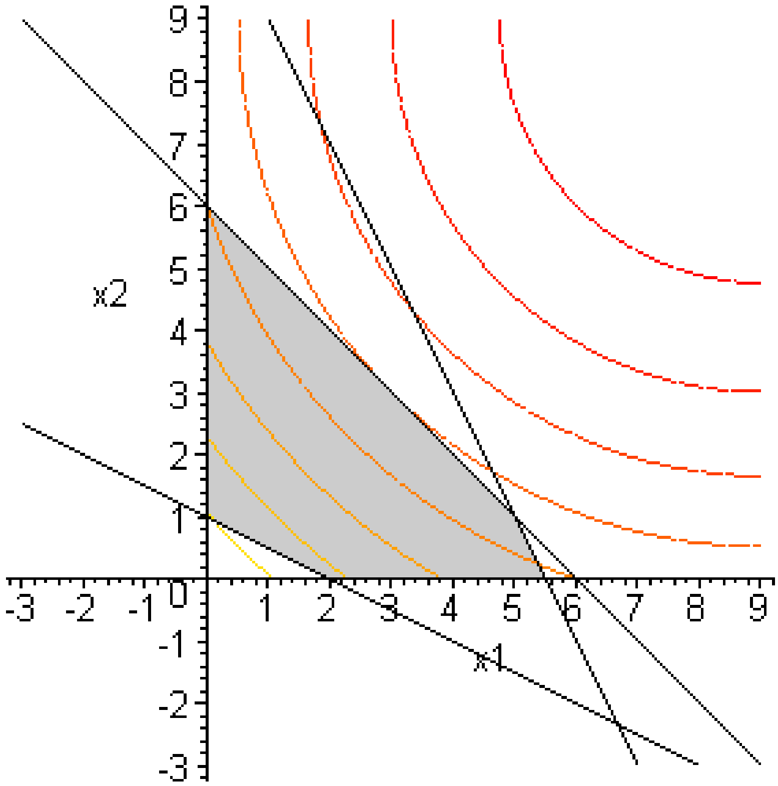
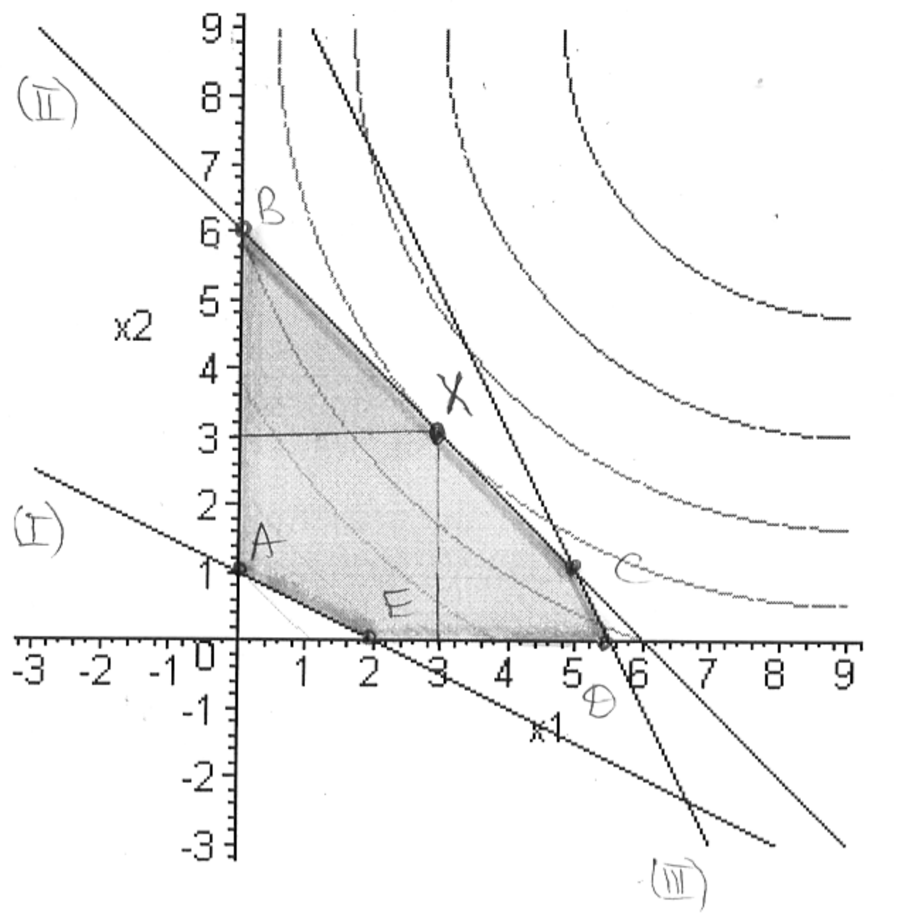


Рисунок 2. Графическое решение задачи (добавлены обозначения и точка минимума).



Строим линии уровня целевой функции:

$f = 9(x_1 - 9)^2 + 9(x_2 - 9)^2 = C,$

$(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 9)^2 = \dfrac{C}{9}.$

Это концентрические окружности с центром в точке $(9;9)$ радиуса $R = \sqrt{C}/3$. Чем больше радиус окружности, тем больше значение целевой функции.

Нужно найти такую точку касания окружности и области, чтобы радиус был наименьшим (так как ищем минимум). Видно, что эта точка X будет лежать на отрезке BC, более того, окружность касается отрезка BC в данной точке, поэтому производные в этой точке от целевой функции и прямой BC совпадут.

Производная от целевой функции:

$\left((x_1 - 9)^2 + (x_2 - 9)^2\right)' = (C/9)',$

$2(x_1 - 9) + 2(x_2 - 9)x_2' = 0,$

$x_2' = -\dfrac{x_1 - 9}{x_2 - 9}.$

Прямая BC имеет уравнение $x_1 + x_2 = 6$ или $x_2 = 6 - x_1$, ее производная $x_2{}' = -1$

Получаем:

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1 - 9}{x_2 - 9} = -1, \\ x_2 = 6 - x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Искомая точка минимума: $X(3;3)$, минимальное значение функции:

$$f_{\min} = f(3;3) = 9(3-9)^2 + 9(3-9)^2 = 2 \cdot 9 \cdot 36 = 648.$$