

---

# 摺出無理數(一)--(I)

李政憲

新北市林口國民中學

## 壹、前言

林福來（1997）統整國內外有關數學教學的研究，認為「培養數學感」與「診斷教學」是培育數學師資的兩個主軸。其中數學感的目的著眼於數學思維的培養，要發展學生數學化及適當使用數學工具的能力，也就是建立對數學物件的感覺（Shoenfeld，1992）。而數學教學研究也顯示，欲藉由數學活動來發展教學思維，可能需要在素材和解題活動的難度上作適當的調整（鄭英豪，2000）。當今的數學教育，強調從做中學，培養學生帶的走的能力。人類天性好玩，教師如果能善用此種天性，把教學和遊戲加以結合，必能使學生更喜愛上學（饒見維，1996）。數學家已經證明尺規作圖和平面幾何問題，可以透過摺紙、剪紙來學習；而郭慶章、彭良禎老師也曾於師大辦理的「摺紙學數學」工作坊分享摺紙如何應用於生活與考題中，獲得在場數學老師的廣大迴響。可見摺紙運用於數學教學，是可行且重要的。

筆者近年來申請教育部所辦理之科教專案計畫，進行摺紙與數學相關教材的推動，獲得現場教師與受教學生的高度肯定與廣大迴響；而 2012 年更以「摺出無理數--談勾股定理構造無理數」課程參與中華民國教材發展協會所辦理的「數位創意教學設計徵稿」競賽獲得優等的殊榮，並且搭配教育部所拍攝的「活化教學列車」（註 1）進行發表，進一步於本校（林口國中）、與新北市、桃園縣與金門縣等各學校學生進行完整或部份課程的實施，讓學生從動手中得到無理數、勾股定理的數學知識與應用，也能理解構造根號  $n$  方式，以及尺規作圖的基本概念，在現今強調活化教學與多元評量的大環境下，可供現場老師們參考使用，故撰本文以茲共享；然因篇幅受限，此次文章將先行分享此課程緣起與授課內容，其餘內容則待下次再行分享。

## 貳、「摺紙中學數學」課程發展與發表

筆者鑽研摺紙課程逾五年的時間，從 2010 年起陸續申請教育部的科教專案計畫，並針對這幾年所發展的教材，陸續於各地中小學，挑選部份課程進行教師研習或是學生課堂及營隊實作；（註 2）此外並陸續成立了「摺紙中學數學」、「雙北區跨校資優數學」教師社群研討並實施相關課程，並於今年度獲得新北市教育局的支持與補助。

而為求摺紙融入數學的議題更加普及廣為人知，筆者也將近年進行摺紙數學的經驗與教材陸續投稿參賽，先後於科教月刊發表了數篇與摺紙相關的文章，(註 3)並且將相關教學經驗投稿於 HPM 通訊與新北市教育電子報中。此外並與出版社陸續合作研發了「財源滾滾包」、「摺其所好」以及「紅包花花」等教具包；也因著新北市輔導團員的身份，先後編寫了《「摺紙融入數學」促進學生思考的實驗心得》、《「摺紙中學數學」社群經營與專業成長》、《「摺紙中學數學」教學心得--從「勾股定理」證明談起》等文章，(註 4)並與校內老師以「摺紙學勾股定理」教案合作參與新北市 100 學年度國中數學學習領域新教案甄選第二名，更於 2012 年與校內外社群老師以「摺出無理數--談勾股定理構造無理數」課程參與中華民國教材發展協會辦理的「數位創意教學設計徵稿」活動獲得優等殊榮。承蒙陳昭地教授引薦，近三年參與了教育部國中原型教材的編撰，(註 5)有幸將「摺出勾股定理」與「摺出畢氏數」等課程內容編寫入內，也讓摺紙數學在教育界的能見度更隨之提昇。底下將詳細說明「摺出無理數」課程，以利想要以此課程作為教學參考的老師們使用。

### 參、「摺出無理數」課程說明

此次所投稿的「摺出無理數」課程，主要是由本校葉麗珠老師、桃園縣山腳國中謝熹鈞老師與筆者共同研發設計，參考了永無止境的數學故事（堀江千代子，2002）以及 *Spiral : Origami | Art | Design*（布施知子，2012）兩本書籍，加上前年於本校成立的跨校數學社群老師們共同討論而得。其主要內容區分為「色紙摺出根號  $n$ 」、「發票摺出根號  $n$ 」以及「摺出根號  $n$  螺線」三階段課程，每階段分別進行 1~2 節課，而授課時機可於八年級上學期學完無理數與勾股定理後，作兩個數學概念的整合與應用；或是切割為非連續的三階段課程，於輔導課、學生營隊中作為補充使用；亦可作九年級進行相關單元複習時的活動。

第一階段課程「色紙摺出根號  $n$ 」主要透過邊長為 3 的三等份色紙，討論從色紙中可以摺出的無理數( $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、... $\sqrt{18}$ )有哪些及其摺法，進一步推得 $\sqrt{n}$ 可由 $\sqrt{n-1}$ 組成的結論，並應用於第二節課程。而第二階段「發票摺出根號  $n$ 」的課程，則是藉由日常生活中常見的長型發票(如圖 1)，探討若假設其寬度為 1，如何在長邊依序摺出 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 與 $\sqrt{5}$ 等數值，藉由摺紙進行根式化簡的驗證與應用，估算發票紙張的長寬比，並且經由數位化呈現得到根號  $n$  螺線圖形(如圖 2)的結果。以上每階段課程經實際操作，均可進行各一節課(45 分鐘)的時間。

至於第三階段「摺出根號  $n$  螺線」課程，則是在第二節呈現根號  $n$  螺線圖形後，讓學生親自操作試摺長型紙捲，得到正反面不同類型的根號  $n$  螺線，並探討每一步驟操作

時所產生的數學問題。此階段課程經於普通班與資優班實際操作後，若要完整摺出作品，並且討論相關的數學問題，約需進行兩節課（共 90 分鐘）的時間。下文接著將從「色紙三等份」摺紙課程談起，依序說明三階段課程的細部操作。

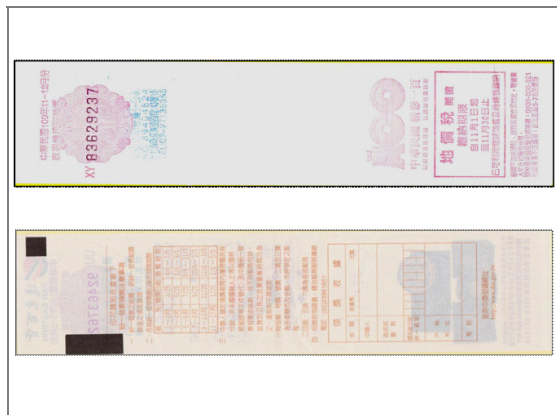


圖 1

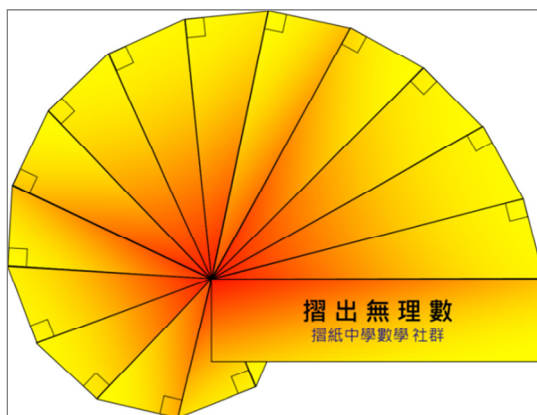


圖 2

### 一、「色紙三等份」摺紙課程

在進行「色紙摺出根號  $n$ 」之前，為了使學生們屆時操作較方便，一般我們會建議先行在色紙上畫出（或摺出）邊長三等份共九宮格線條（如圖 3），以利屆時學生的操作。然而筆者喜歡在課程進行前或是整個課程進行完畢後詢問學生：「除了利用直尺測量繪製，是否也可以透過摺紙的方式，把色紙邊長三等份呢？」

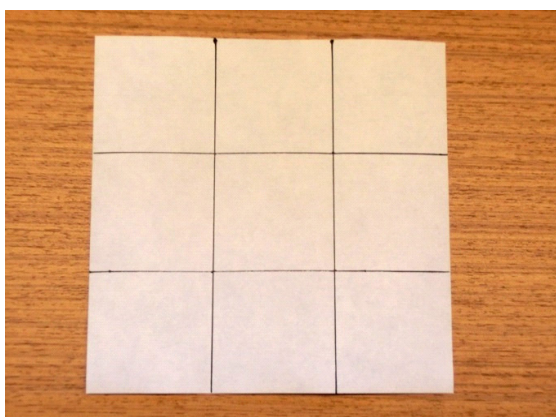


圖 3



圖 4

此時一般學生的反應會是用「喬」（台語，意指調整）的方式，將紙張由側面彎曲成 S 形（如圖 4），以求三等份線的近似值。然而筆者多半會引導學生以此方式摺出的結果，容易產生誤差且不夠數學味，而改以下列方式進行，恰巧與八年級學生上學期剛學過的乘法公式與勾股定理作結合。

1. 取一張正方形色紙並取上方中點，摺出左下方直角與上方中點連線(如圖 5)；
2. 固定左下方直角，將色紙下方邊長摺至與左方摺過來的邊長對齊(如圖 6)；
3. 若假設原來的色紙邊長為 1，試計算下方邊長上摺的長度為多少(即圖 6 中  $\overline{BC}$  的長度)？

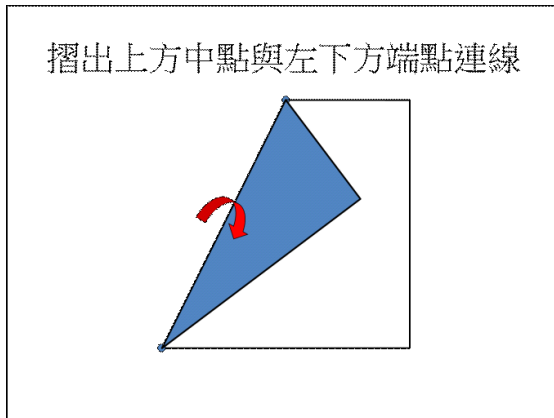


圖 5

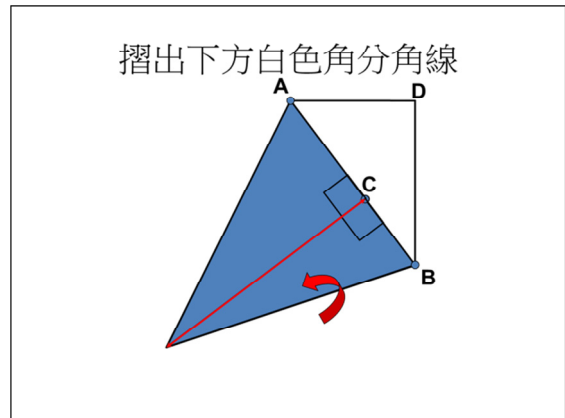


圖 6

欲解決此一問題，首先要討論的是 A、C、B 是否共線（才能形成直角三角形 ABD）的問題；在教師引導學生觀察出兩個直角形成一直線後，此問題即可應刃而解。接下來教師可再引導學生假設  $\overline{BC} = x$ ，則可得知  $\overline{BD} = 1 - x$ （因假設原來色紙的邊長為 1），此時若學生無法理解，建議可發給學生每人一張色紙操作以利了解；又  $\overline{AC} = \overline{AD} = \frac{1}{2}$  在直角  $\triangle ABD$  中，因  $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ ，故列式可得： $(\frac{1}{2} + x)^2 = (1 - x)^2 + (\frac{1}{2})^2$ ；接下來是要解出  $x$  的過程。

乍看之下此題為一元二次方程式，然而利用八年級上學期學過的乘法公式展開後，會發現等號兩邊的  $x^2$  恰好可以消去，可以得到  $\frac{1}{4} + x = 1 - 2x + \frac{1}{4}$ ，並解得  $x = \frac{1}{3}$ ，即右方的 B 點恰好位於正方形邊長的  $\frac{1}{3}$  處。

此時教師可讓學生透過直尺測量，確定每位學生摺紙是否有產生誤差，以及學生是否了解教師所謂較為「數學味」的摺紙方式。

除了上述透過勾股定理與乘法公式的摺法，若為九年級學生已經學過相似形的概念，教師可介紹底下的另外一種方式讓學生操作：

1. 取一張正方形色紙摺出對角線，並摺出左邊中點（如圖 7）；
2. 摺出左邊中點與右下方直角連線後還原（如圖 8）。

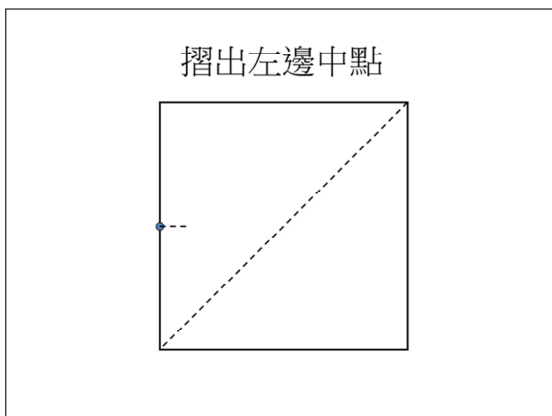


圖 7

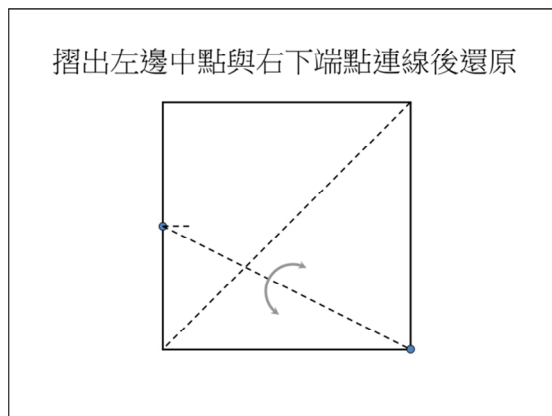


圖 8

此時不妨可問學生：「請問你看出三等份點在哪裏了嗎？」讓學生猜測思考其正解為何。在學生看出左右兩三角形為相似三角形（AA 相似），且邊長比為 1:2，即可了解對角線被分為三等份的概念；再透過相似三角形的邊長比與對應高的比相同的概念，從兩摺痕交點摺至邊長即可得到三等份點。

比較上述兩種摺法的差異性，第一種摺法結合了乘法公式與勾股定理，可於八年級上學期學生剛學完這兩個課程後，作一個簡單的綜合應用。第二種摺法則僅需使用九年級相似三角形的概念與基本應用，都是蠻值得教師在課堂上實作應用的方式。事實上，筆者除了以上兩種摺法，尚還整理研發了其餘摺出三等份的簡報與相關討論，只是礙於篇幅，在本文中不再介紹，有興趣研究的老師們不妨逕行至新北市林口國中數學科「林中生命藝數殿堂」網站中下載參考，並可於學生學習相關數學知識後，作為其應用練習。

## 二、「色紙摺出根號 $n$ 」課程

接下來談到「摺出無理數」的第一階段「色紙摺出根號  $n$ 」課程，在教師發放給學生每人一張三等份的色紙後，接下來可接著詢問學生：「請問若此色紙的單位為 3，你可以在此色紙上畫出（或摺出）哪些無理數？」

一般而言，若學生無法馬上理解教師的問題，筆者多半會配合簡報或大型教具（如圖 9），舉 1 至 2 個例子說明：「例如若兩股分別為 1 的直角三角形，則斜邊為  $\sqrt{2}$ ；請問兩股各為 1 與 2 的直角三角形呢？」引導學生發表出其結果為  $\sqrt{5}$  後，再行討論或是請同學發表其他的結果。約莫 5 分鐘學生即可討論出所有的結果（如圖 10）。接著教師不妨可再接著討論根式的化簡與答案完備性的問題，即  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  與  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  在紙上可以看到的結果以及  $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，其中  $a$ 、 $b$  均為正整數時，所有  $n$  的 6 個結果。

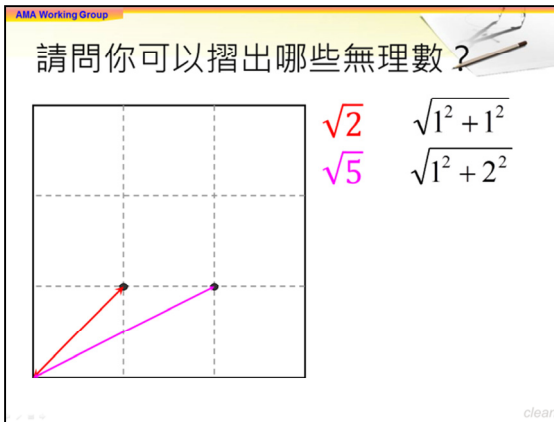


圖 9

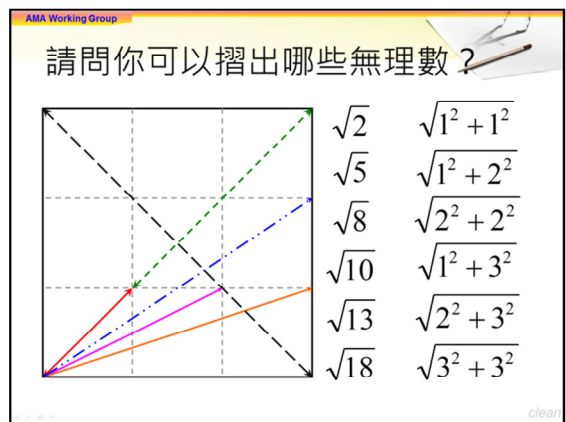


圖 10

在得到上述的六個結果後，教師接著再追問：「除了這些根號，這張色紙上還可以摺出其他的根號嗎？例如  $\sqrt{3}$  是否可以摺得出來呢？」

接下來不妨讓學生先行討論或舉手發表意見，若學生一下子想不出來，教師不妨可提示：「想想我們目前已經完成的根號可不可以派上用場？如果已經知道  $\sqrt{2}$ ，要怎麼透過  $\sqrt{2}$  來摺出  $\sqrt{3}$  呢？」配合在黑板繪製其直角三角形，便可引導學生將  $\sqrt{2}$  摺至底邊後，再過底邊摺出短股為 1 的直角三角形，其斜邊即為  $\sqrt{3}$ （如圖 11）。

若時間允許，建議教師可再引導學生摺出  $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$ （即透過斜邊為 2，一股為 1 的直角三角形，所摺出的另一股即為  $\sqrt{3}$  的方法（如圖 12），期待學生可透過平方和與平方差兩種方式，得到相同的根號，一方面可以對畢氏定理的應用較為熟悉，另一方面也可以比較不同構造方式的差異性。

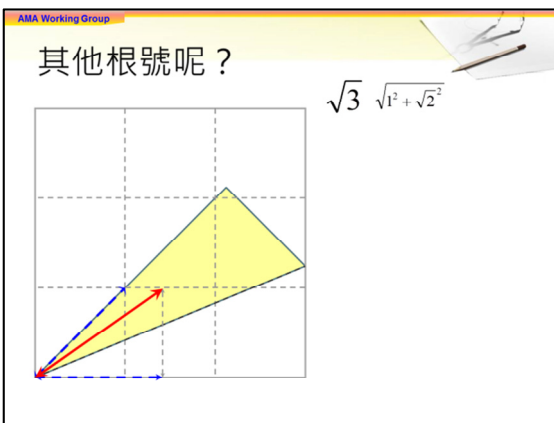


圖 11

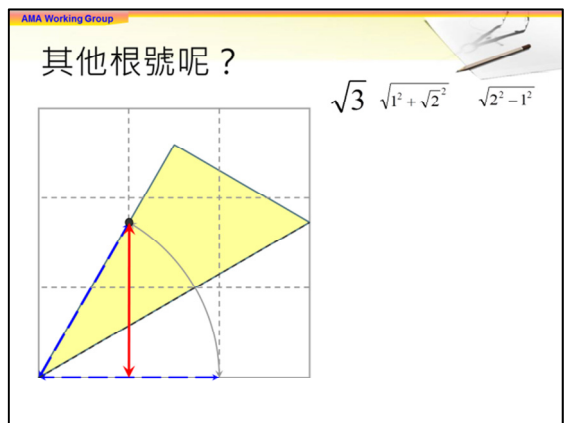


圖 12

由於  $\sqrt{4} = 2$ ， $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$  無需特別討論，故我們接著介紹  $\sqrt{6}$ 。而如果前面的引導學生大致上可理解，便不難發表出  $\sqrt{6} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}$  以及  $\sqrt{6} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2}$  等不同摺法(如圖 13)，(註 6)教師此時可再加強根式與勾股定理的運算，並且討論  $\sqrt{6}$  不同構造方式差異性的問題。

值得特別再提的是若學生已經學過尺規作圖的概念(如九年級複習時)，教師不妨可強調這些摺法與尺規作圖的關聯性。等  $\sqrt{6}$  的組成方式學生大致了解後，接下來的其他根號亦可如法泡製，教師不妨可再視剩下時間決定要進行哪幾個練習，也可與學生討論如何在紙上說明  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  的結果；大約整節課剩下 5 分鐘時，教師再行歸納「 $\sqrt{n}$  可由  $\sqrt{n-1}$  組成」的結論(如圖 14)，並說明此結論將會應用於第二階段課程。

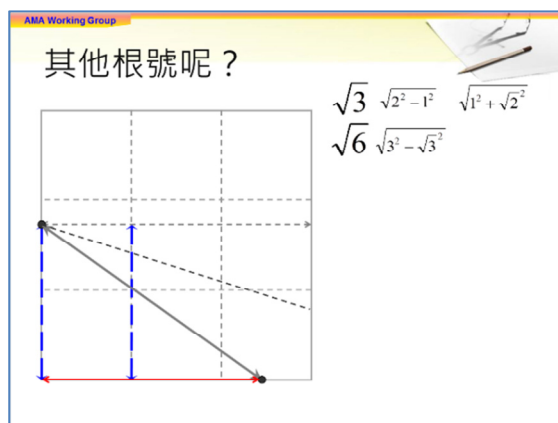


圖 13

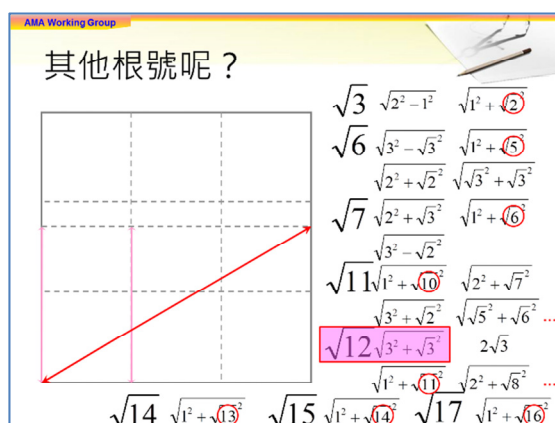


圖 14

### 三、「發票摺出根號 $n$ 」課程

接下來將介紹「發票摺出根號  $n$ 」的課程，此課程應配合過期長型發票(如圖 1)作為教學操作之用。在課堂一開始進行時，教師可說明若短邊的長度為 1，將於本節課陸續製作  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ……等無理數呈現於發票的長邊上(如圖 15，可配合大型教具或實物投影機展示以引發學生動機)，並討論發票長寬比為多少的問題；另外為了讓學生方便跟著教師學習，建議除了成品外，教師亦應準備未完成的教具帶領學生同步操作。

接著與學生討論若發票的短邊為 1，要如何構造  $\sqrt{2}$  的長度；引導學生提出「等腰直角三角形的斜邊與一股比為  $\sqrt{2}:1$ 」的結論後，接著詢問如何摺出這個三角形？在學生發表其摺法(如圖 16)後，繼續追問：「那要怎麼把斜邊  $\sqrt{2}$  的長度摺至長邊上呢？」

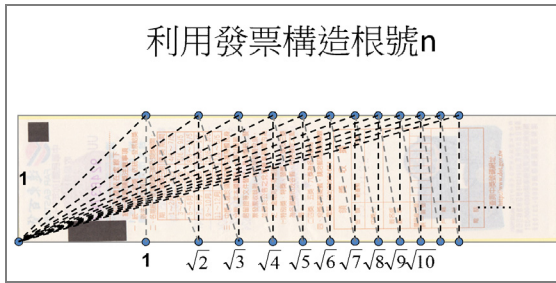


圖 15

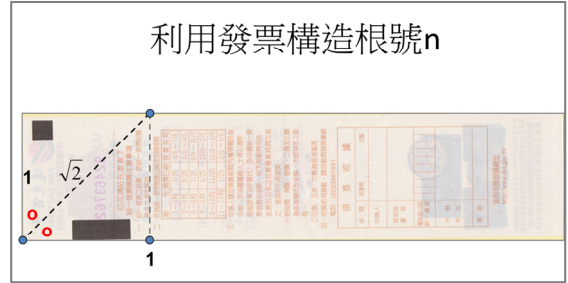


圖 16

一般說來，學生會提出將斜邊摺至長邊（如圖 17）並且加以標記的方法，經教師與所有學生討論其正確性後，接著可再詢問學生：「這樣的摺法無法直接將  $\sqrt{2}$  摺至長邊上（亦即需加上標記的步驟），請問是否有更好的摺法，可以直接將  $\sqrt{2}$  摺至長邊上呢？」再行引導學生發表或由教師說明可摺出上方 45 度角的外角平分線，則此外角平分線與長邊的交點即為  $\sqrt{2}$  的位置（如圖 18）。（註 7）

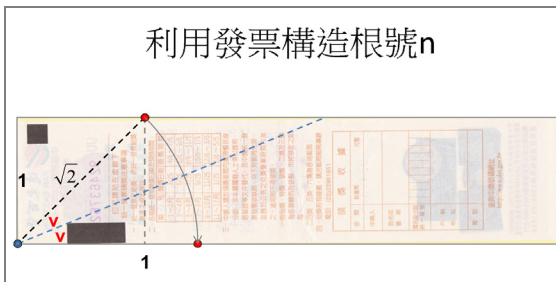


圖 17

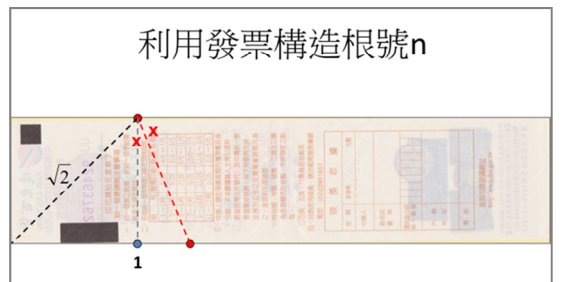


圖 18

至於如何解釋此交點即為  $\sqrt{2}$  的位置，一般而言有兩種解法，若學生已學過平行線的性質（多為九年級學生），不妨可利用內錯角相等的概念進行說明（如圖 19）。

然而在八年級上學期還沒學過此數學概念的前提下，教師可採用底下方式進行說明（或由學生發表）：

1. 如圖 20，因  $\overline{BC}$  為  $\angle ABD$  的角平分線，故可假設  $\angle ABC = \angle CBD = x^\circ$ ；

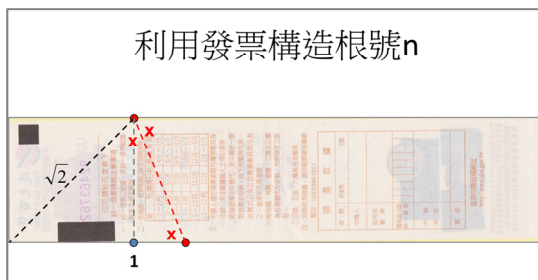


圖 19

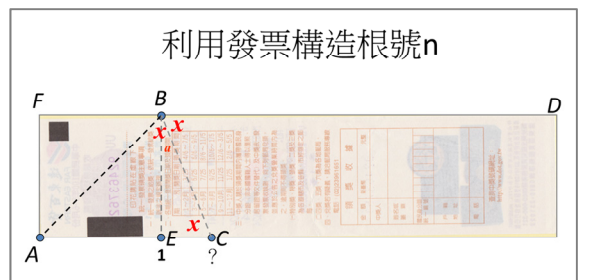


圖 20



2. 又因  $\angle DBE=90^\circ$ ，設  $\angle CBE=a^\circ$ ，則  $x+a=90$ ；
3. 另因  $\triangle CBE$  為直角三角形， $\angle BCE+\angle CBE=90^\circ$ ，故可推得  $\angle BCE=x^\circ$ ；
4. 故  $\angle BCE=\angle ABC$ ，即  $\triangle ABC$  為等腰三角形，可得  $\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{2}$ 。

在此要另外說明的是若學生對於符號的運算尚不熟悉，建議可讓學生先行計算出  $x=67.5$  與  $a=22.5$  的結果後再行討論，並於第二次摺出外角平分線時再引入符號以求其一般化。

在引導學生理解「發票上直角三角形的外角平分線可產生等腰三角形」的結果後，接著教師可如法泡製，繼續進行底下動作：

1. 以  $\sqrt{2}$  為長股，將短股 1 與斜邊  $\sqrt{3}$  分別畫出或摺出（如圖 21）；
2. 將斜邊為  $\sqrt{3}$  的直角三角形外角平分線摺出，可於長邊產生  $\sqrt{3}$ （如圖 22，說明方式同上）；

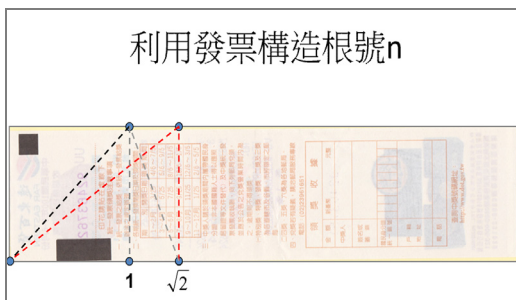


圖 21

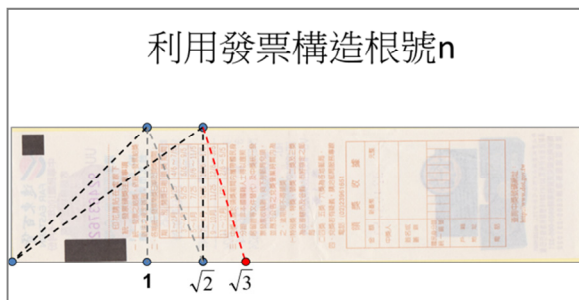


圖 22

3. 接著再以  $\sqrt{3}$  為長股，將短股 1 與斜邊  $\sqrt{4}$  分別畫出或摺出（如圖 23）；
4. 將斜邊為  $\sqrt{4}$  的直角三角形外角平分線摺出，可於長邊產生  $\sqrt{4}$ （如圖 24，說明方式同上）。

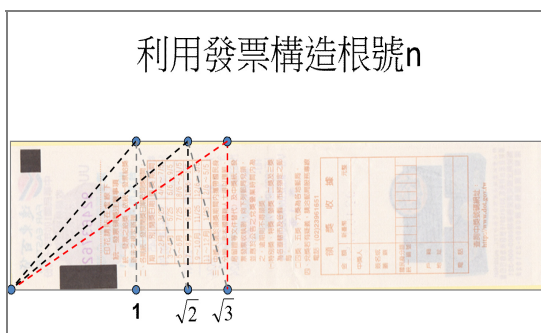


圖 23

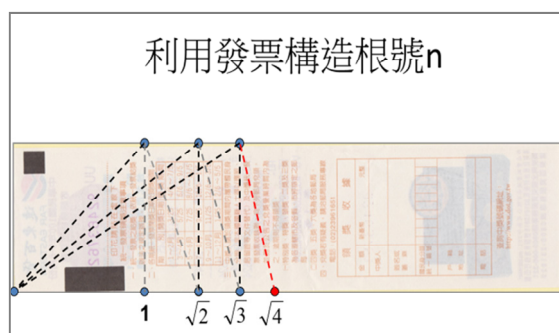


圖 24

上述步驟教師應要求學生將相關線條畫出，並註記相關位置及相等的角度以利了解。到此教師可先詢問學生：「 $\sqrt{4}$  等於多少？我們如何得知摺的時候沒有產生誤差呢？」

由學生發表  $\sqrt{4}=2$ ，並可將單位長為 1 的結果向右對摺（如圖 25），對照比較  $\sqrt{4}$  的位置是否恰為單位長兩倍的結果。

礙於教學時間的關係，一般而言建議教師可引導學生按照上述方式繼續摺至  $\sqrt{5}$  即可（如圖 26，本堂課一般進行約 1 節課，教師可視學生程度與所討論的問題逕行加至 1.5 至 2 節課），並且鼓勵有興趣的同學們回家自行完成剩餘部份，或指定為回家作業自行貼至學習單上即可。

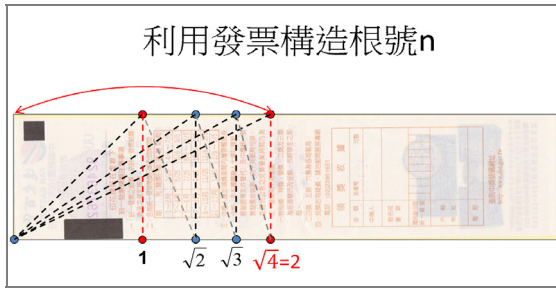


圖 25

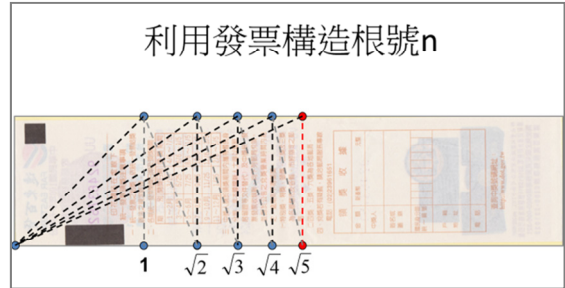


圖 26

在了解如何在發票上透過  $\sqrt{n-1}$  構造  $\sqrt{n-1}$  的方法後，教師應接著跟學生確認本節課的另一目的為估計發票的長寬比為多少，並且是否可以透過目前已完成的  $\sqrt{2}$  至  $\sqrt{5}$  等數值進行估算；在學生發現發票的長度會比  $\sqrt{5}$  的兩倍略短後，再引導學生發現其長度會比  $\sqrt{2}$  的三倍略長(如圖 27)，(註 8)故可得到  $2\sqrt{5} > \text{發票長度} > 3\sqrt{2}$  的結果，又  $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ ， $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ ，故發票的長度約為寬度的  $\sqrt{18}$  至  $\sqrt{20}$  倍之間。(註 9)

若時間允許，教師可針對八年級學生說明此作圖結果會在尺規作圖課程學習完畢後再與尺規作圖方式作比較（九年級學生則可直接引導學生討論此摺法結果與尺規作圖的差異性，比較摺紙在產生角平分線與線上一點作垂線較尺規作圖便利的特性），約莫剩餘 5 分鐘時，再以動畫展示以此摺法所產生的直角三角形，逐步構造「根號 n 螺線」的結果（如圖 28），並且預告將於下一節課進行此作品的實作與問題討論。

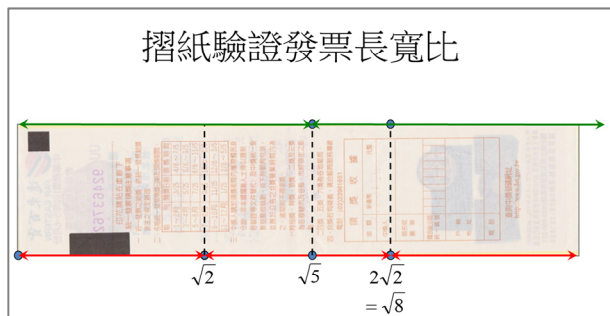


圖 27

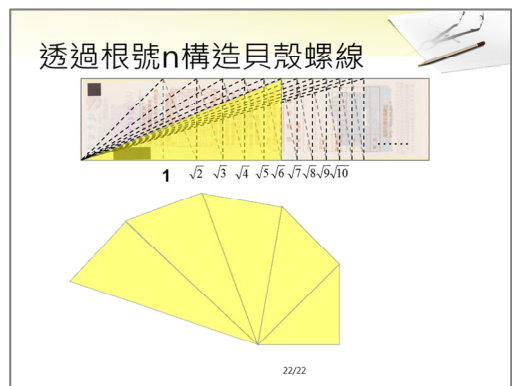


圖 28

## 註解

- 註 1 教育部活化教學列車第 32 部：「從動手開啟思考的學習摺紙中學數學」播放網址：  
<http://stv.moe.edu.tw/?p=263522/>
- 註 2 相關課程分享檔案（含本文相關簡報、教案暨學習單）放置於本校數學科「林中生命藝數殿堂」網站：<http://163.20.9.7/dyna/menu/index.php?account=math>
- 註 3 科教月刊網址：<http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/SECMonthly.htm>
- 註 4 相關文章下載網址「國北教大機構典藏 NTUER」：<http://ntuer.lib.ntue.edu.tw/handle/392430000/2448>
- 註 5 教育部國中原型教材完整電子檔下載網址：<http://www.naer.edu.tw/files/11-1000-154.php?Lang=zh-tw>
- 註 6 教師可引導針對平方和與平方差方式，請學生分別發表 1 至 2 種摺法，其餘摺法僅需列式以利活動進行。
- 註 7 此方法學生不易討論而得，若時間不足，一般建議可由教師直接說明，並請學生討論發表原因即可。
- 註 8 實際操作時發票長度可能因取得時廠商拉扯而略有出入，教師僅需說明其為估計值即可。
- 註 9 關於紙張長寬比的討論，讀者可至「林中生命藝數殿堂」網站下載「摺出有理數」課程簡報或參閱科學研習月刊筆者所撰寫「摺紙中學數學－從有理數到畢氏數」文章（已接受）實作與討論。

(待續)