

淺談實作評量——從摺紙中學習數學

李政憲

新北市林口國民中學

壹、前言

筆者研究從摺紙學習數學概念已有近五年的時間，而近年來承蒙教育部肯定，連續執行了四年與摺紙有關的科教專案計畫，期間並實際施作於本校與他校學生身上，並藉由輔導團安排與他校的邀約，與現場老師得以互動推廣，自己的收穫也頗多。實作評量起於 1990 年代早期，興起的原因主要是因為對選擇式反應測驗（selected-response tests）的不滿、受認知心理學的影響及傳統測驗對教學的不良影響三個因素；期待實作評量能從選定學生的工作或任務，並根據其表現，評定其成績。然而因作實作評量所花費的時間較多、評分標準的客觀性、教師本身的評量能力與選定的工作或任務等差異，仍有其限制存在（吳清山、林天祐，1997）。而師大的陳昭地教授（2011）更為數學的實作評量，下了操作型的定義：「它是一種評量的方式。就適當的數學主題，針對形成該主題的主要數學概念，配合周遭的情境，使用適切的工具或描述，從事一系列的操作，以完成評量核心目標或相關目標。」綜上所述，實作評量實屬多元評量的一種方式；底下簡單舉出幾個例子，說明筆者於課程如何安排實作評量，實際與學生互

動，並達到評量與教學結合的效果。

貳、數學素養「涼亭問題」與多面體摺紙課程

筆者曾參與師大林福來教授所安排的「數學素養命題」研習，經由本校退休王樹文老師提供，期間產出了底下的「涼亭問題」：



圖片來源：林口國中添秀亭

這張照片是由三樓俯拍下來的涼亭，但看看它的屋頂這些三角形暗藏玄機，因為眼睛所見是有可能騙人的，請依序回答下列的問題：

- (1) 實際的屋頂由幾個三角形所構成？請說出你推論的理由。
- (2) 若這個涼亭的屋頂是由 6 個完全相等的等腰三角形所組成，請問這六個三角形，是否會是正三角形？請說明你的理由。

- (3) 若這六個三角形不是正三角形，你覺得它的頂角有可能是多少度？請說明你推論的理由。
- (4) 假設今天你要設計一個五角亭，上方要有 5 個全等的三角形組成突起的頂部，則上方的三角形，需要什麼樣的限制？

經施測後得到的結果，第 1 題的通過率為 50%，第 2 題的通過率為 14%，第 3、4 題則均沒有學生完整答對，其中第 3 題僅約 1/3 的學生部份得分。

分析學生無法完整答對的原因，主要是前兩題的通過率太低，無法形成基模作為後續需要用到的知識基礎。因此於本校數學資優營「立體摺學」課程時，設計了「摺出多面體氣球」活動（詳見參考資料 3.），針對不同的正三角形，討論所拼湊出來的多面體形狀與每一個頂點所接的正三角形個數，以致六個正三角形可形成一個平面，另並搭配了當時台北教育大學的李源順教授所提供的「撐傘」活動，果然使學生 1、2 題了解後，並能繼續 3、4 題的討論。

參、師大資優碩士學分班「太陽花摺紙」實作評量課程

之後因為個人生涯規劃進入本校資優班任教，並參與了師大特教所辦理的碩士學分班課程，經高師大鄒小蘭教授邀約，於「資優學生鑑定與評量」課程中分享了「太陽花摺紙」實作評量課程（詳見附件一，參考資料 4.），並於本校自自然科

學研究社社團課中進行實作（配合附件二、三學習單），並發現了底下學生於實作評量所產生的問題：

(一) 不同類型题目的答題差異性頗大：

敘述性的題目學生較易犯的錯誤為答案不完全；至於答案為計算性的題目，學生較易犯的錯誤則為計算錯誤或比的前後顛倒。而問答式的題目，因涉及解釋原因與敘述過程的難度，學生答題狀況則普遍較不理想。

(二) 前後關聯性的題目相互影響：

若答案有其關聯性，則前面的回答將影響後面的結果（也有部份同學因後面計算出正確結果，修正前面錯誤的答案）。

(三) 學生的施測結果差異度大：

此次的七年級施測後的答對題目約在 6-7 題間，八年級施測後的答對題目約在 5-6 題間，顯見對於這種實作型的題目，不少學生還不熟悉，另外是八年級的題目涉及較多勾股定理相關運算，由於學生才剛學習此概念，部份學生無法確實應用。

(四) 部份學生無法理解題目敘述意義：

造成會計算的題目卻無法答對的情形，這是下次教師在題目設計時需再描寫清楚或是施測時搭配口頭敘述時可以注意的；不過這也反應出在教學現場，多數學生理解程度不一致的現況。

(五) 學生的反應偏難：

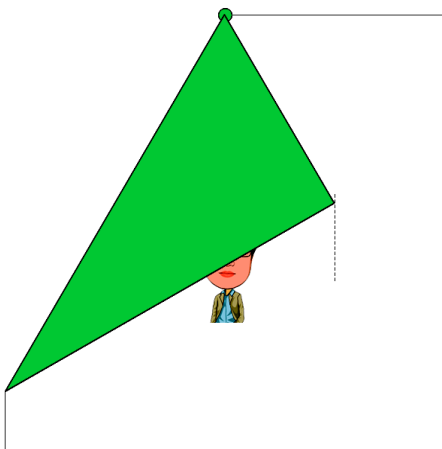
從學生的成績與最後一題的回饋中，

發現國小有超過六成，國中有超過八成的學生覺得整份題目均偏難，這與教師原先預期的結果差異頗大。細究其原因，主要可能是學生以前沒有接受過類似的評量方式，且因為實作時間有其限制（雖然學生均已先操作過再回答學習單相關問題，仍有人反應時間不夠快），無法如一般紙筆測驗，自行調整其答題時間。

肆、「六角芒星」摺紙課程

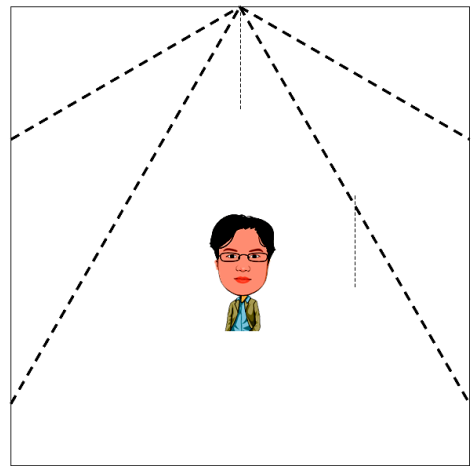
事實上，摺紙與數學的關係極其密切，筆者便曾設計了「六角芒星」摺紙互動簡報（詳如附件四，參考資料 5.），於本市輔導團、新竹縣全縣教師研習以及三峽國教院「認知與數位教學研討會」中的「摺紙數學工作坊」，並藉由桃園縣山腳國中謝熹鈞老師的推廣，透過實作與互動，引起現場老師的廣大迴響。茲舉出其中的幾個步驟與各位讀者進行互動：

(一)《步驟 3》固定邊上中點，將左上方直角摺至摺線處：



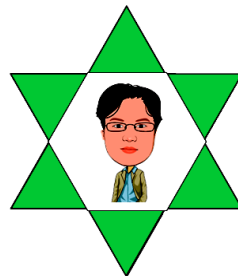
如圖，此時透過輔助線的使用，討論摺出的直角三角形邊長比與角度的關係，另外也能進一步討論是否有其他摺法，可以摺出 30-60-90 度的特殊三角形或正三角形，以及何種方式可摺出色紙內最大的三角形。

(二)《步驟 7》摺出相關摺痕後攤開還原



此時可討論所產出的直角三角形是否為相似關係，以及透過切割方式進一步討論面積與邊長比的關係為何。

(三)《步驟 24》翻面完成六角芒星作品



此時可討論如何以尺規作圖完成此圖形，並進一步從整個摺法討論尺規作圖與摺紙作圖的差異性與優缺點。

伍、結語

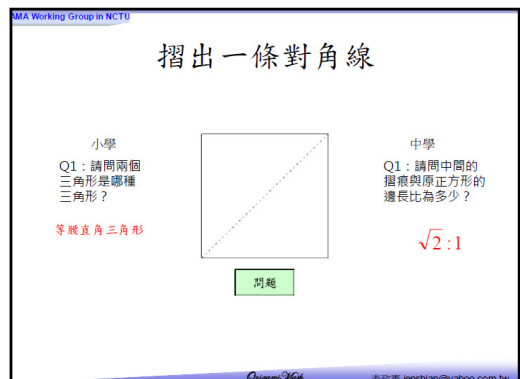
事實上，摺紙與數學的關聯性極大，筆者也曾嘗試透過摺紙，進行乘法公式、勾股定理、無理數與黃金白銀比等單元的教學，成效尚稱良好。綜而言之，摺紙活動只要設計得當，搭配適當的課程內容，應是不錯的實作評量教材；若能再搭配教學引導，則可成為動態評量，供教師教學精進，並進行多元評量的良好工具。期待藉此文章拋磚引玉，底下附上相關簡報與課程來源參考資料與網站，盼能引發有興趣的老師們共同投入，讓學生透過實作與老師所設計的評量課程與試題，同樣能達到教學的效果。

參考資料

- 吳柏萱、朱啟台、陳瑋伯、曾政清、李吉彬、陳昭地(2011)。探索數學規律實作評量舉例，科學教育月刊第343期，第30~49頁(2011年10月)。台北市，台灣師範大學科學教育中心出版。<http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/SECMonthly.htm>
- 涼亭問題原始問題與設計理念：林福來主編(2011)。臺灣2011數學素養評量樣本試題(上、下)。台南市，南一書局。
- 「多面體氣球」簡報摺法來源：銀林浩編著(2002)。用摺紙來學數學。新北市，益智工房。
- 「太陽花相框(頂部)」簡報摺法來源網站：<http://en.origami-club.com/index.html>
- 「六角芒星」簡報摺法來源：芳賀和夫(1999)。Origamics, オリガミクス(幾何図形折り紙)I。日本評論社。
- 上述相關互動簡報下載網址：《新北市林口國中「林中生命藝數殿堂」網站》<http://163.20.9.7/dyna/menu/index.php?account=math>

附件一：

「太陽花相框」互動摺紙簡報：



MA Working Group in NCTU

將四角向內摺產生摺痕

小學

Q3: 請問四個角落小三角形與中央虛線形成的正方形面積關係?
小三角形的面積和=中央正方形的面積



中學

Q3: 請問虛線總長與對角線總長的關係?
虛線總長度=對角線總長度

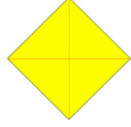
問題

MA Working Group in NCTU

翻面

小學

Q7: 請問此圖形與原色紙的面積比?
1:2



中學

Q7: 請問此圖形與原色紙的周長比?
 $\sqrt{2}:2$

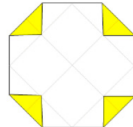
問題

MA Working Group in NCTU

將四角向內摺至交點處

小學

Q4: 請問圖中黃色小三角形的面積和與原紙正方形的面積比?
1:32



中學

Q4: 請問圖中是否為正八邊形?
否
請問如何摺出正八邊形?

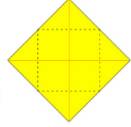
問題

MA Working Group in NCTU

將四角再向中心摺

小學

Q8: 請問虛線與此圖形對角線的關係?
虛線總長度=對角線總長度
彼此夾角90度



中學

Q8: 請問虛線與此圖形對角線的關係?
虛線總長度=對角線總長度
對角線垂直平分虛線

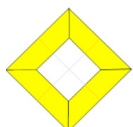
問題

MA Working Group in NCTU

再將角落四個三角形向中心摺

小學

Q5: 請問圖中白色正方形與整個圖形的周長比?
1:32



中學

Q5: 請問黃色梯形與整個圖形的面積關係?
3:16


問題

MA Working Group in NCTU

將四角再向中心摺

小學

Q9: 請問此圖形的面積與原色紙的面積比?
1:4



中學

Q9: 請問此圖形的邊長與原色紙的周長比?
1:16

問題

MA Working Group in NCTU

翻面

小學

Q6: 請問圖中黃色梯形的四個角度為多少度?
45, 135, 45, 135度



中學

Q6: 請問黃色梯形的四段邊長比?
 $1:\sqrt{2}:1:2\sqrt{2}$

問題

MA Working Group in NCTU

自中心向外翻開




MA Working Group in NCTU

自中心向外翻開

小學

Q10：請問兩正方形面積是否相同？

答



問題

中學

Q10：請問如何摺出面積相同的兩正方形？


MA Working Group in NCTU

翻面即為所求

小學

Q11：請問照片的邊長與正方形邊長有何關係？

1:2



問題

中學

Q11：若原正方形的邊長為15cm，不曉得裏面的框架可以放入哪些尺寸的相片？

最大邊長7.5cm以下

MA Working Group in NCTU

參考網站：

- <http://www.en.origami-club.com/>

附件二：

「太陽花相框摺紙」問與答（小學版）：

_____年_____班 姓名：_____

（以上題目若需圖形輔助說明，請直接繪製簡圖於右方並說明之）

Q1：請問兩個三角形是哪種三角形？

Q2：請問四個三角形形狀是否相同？為什麼呢？

Q3：請問四個角落小三角形與中央虛線形成的正方形面積關係？

Q4：請問圖中一個黃色小三角形的面積和與原始正方形的面積比？

Q5：請問圖中白色正方形與目前整個圖形的周長比？

Q6：請問圖中黃色梯形的四個角度各為多少度？

Q7：請問此圖形與原色紙的面積比？

Q8：請問虛線與此圖形對角線的長度關係？

Q9：請問此圖形的面積與原色紙的面積比？

Q10：請問圖中兩個大正方形的面積是否相同？

Q11：請問呈現照片的正方形面積與照片放置的正方形面積有何關係？

請問以上題目中，你覺得最難的是哪個題目？為什麼呢？

附件三：

「太陽花相框摺紙」問與答（中學版）：

_____年_____班 姓名：_____

（以上題目若需圖形輔助說明，請直接繪製簡圖於右方並說明之）

Q1：請問中間的摺痕與原正方形的邊長比為多少？

Q2：請問兩條對角線有何關係？

Q3：請問虛線總長與對角線總長的關係？

Q4：請問圖中是否為正八邊形？為什麼呢？

Q5：請問一個黃色梯形與目前整個圖形的面積關係？

Q6：請問黃色梯形的四段邊長比？

Q7：請問此圖形與原色紙的周長比？

Q8：請問虛線與此圖形對角線的長度關係？

Q9：請問此圖形的邊長與原色紙的周長比？

Q10：請問如何摺出面積相同的兩正方形？

Q11：若原正方形的邊長為 15cm，不曉得裏面的框架可以放入哪些尺寸的相片？

請問以上題目中，你覺得最難的是哪個題目？為什麼呢？

附件四：

「六角芒星」互動摺紙簡報：

六角芒星摺紙
(完整版含問題附解答)

新北市林口國中 李政憲
jenshian@yahoo.com.tw
林口國中校友柳凱宏
林口國中教師 王雪芬 協力製作

操作說明：

題目出現按鈕（按兩次則題目消失）

設其邊長為1，則面積為多少？

答案出現按鈕（需待文字出現方有作用，按兩次則答案消失）

$1 \times 1 = 1$

PS:若僅需操作摺法，請直接按Page Down按鍵或鍵盤↓按鍵即可

（再按待圖形消失後即重新動作）
圖形上方為說明按鈕，請按至畫面右下方圖形按鈕出現為止

正方形色紙

設其邊長為1

分別摺出邊上的中點與面上的1/4處

請注意摺出部份摺痕即可

固定邊上中點，將左上方直角摺至摺線處

請注意摺出部份摺痕即可

將兩摺線攤開

固定邊上中點，將左上方直角摺至摺線處

Q1: 請問摺出的三角形為何種三角形？上方的角度為幾度？

直角三角形
60度

將兩摺線攤開

Q3: 請問白色直角三角形與正方形的面積比為何？

$\frac{\sqrt{3}}{8} : 1$

將右上方直角沿三角形邊向左下方摺

將上方邊摺至兩摺痕

將右上方直角沿三角形邊向左下方摺

Q2: 請問摺出的三角形與上個步驟摺出的三角形是否全等？為什麼？

ASA全等性質

將上方邊摺至兩摺痕

Q4: 請問摺下來的直角是否位於摺線中點？為什麼？

是
藍色線段長為1
紅色線段長1/2

攤開還原

將左上、右上兩斜邊摺至原摺線處

攤開還原

Q5: 請問原來與後來摺出的直角三角形是否相似? 邊長的比例為何?

AA相似
 $\sqrt{3} : 1$

將左上、右上兩斜邊摺至原摺線處

Q7: 請問摺出的梯形周長、角度與面積各為多少?

周長 $\frac{7+\sqrt{3}}{6}$

角度為 $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$

面積 $\frac{\sqrt{3}}{24}$

分別將左上、右上短邊摺至新摺線處

將左上斜邊向原摺線翻摺

分別將左上、右上短邊摺至新摺線處

Q6: 請問摺出的直角三角形與未摺之前的直角三角形的關係為何? 面積比是多少?

AA相似
 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$
 $= 3 : 1$

將左上斜邊向原摺線翻摺

Q8: 請問左右兩梯形是否相似? 面積比為多少?

否(邊長不成比例)

面積比
 $=$ 上下底和比(高相同)
 $= 5 : 3$

再將右上斜邊向原摺線翻摺

將兩側直角向後摺塞入中間夾層

再將右上斜邊向原摺線翻摺

Q9: 請問左右兩梯形的面積比為多少?

面積比
= 上下底和比(高相同)
= 5:8

將兩側直角向後摺塞入中間夾層

Q11: 請問三個梯形的面積比約為多少 (請化為最簡整數比)?

7:9:11

將下方白邊往上摺

前後翻面

將下方白邊往上摺

Q10: 請問摺出的長方形寬度與之前摺出梯形高度是否相同?

不相同

前後翻面

Q12: 請問這是正三角形嗎? 為什麼?

是
∵ 為頂角 60° 之等腰三角形

將右下方端點向左邊中點摺

將左下方端點向右邊中點摺

將右下方端點向左邊中點摺

Q13:請問圖中共有幾種三角形?彼此是否相似?面積比約為多少?

僅有一種三角形彼此相似(均為正△)面積比約為1:4:9

將左下方端點向右邊中點摺

Q15:請問圖中的兩梯形面積比是多少?

3:5

將上層三角形沿中心點向外翻摺

將上層三角形沿中心點向外翻摺

將上層三角形沿中心點向外翻摺

Q14:請問最上層的三角形與最下層梯形的面積比是多少?

4:27

將上層三角形沿中心點向外翻摺

Q16:請計算整個圖形面積。

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 20 \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

將上方端點向下方摺

將最下層三角形(右下)上面頂點提至最上方

將上方端點向下方摺

Q17:請計算白色三角形與綠色部份的面積比。

1:10

將最下層三角形(右下)上面頂點提至最上方

Q19:請問圖中的大三角形與梯形的面積比?

3:1

將上層三角形沿中心點向外翻摺

摺出最上層三個三角形頂點與中心點連線

將上層三角形沿中心點向外翻摺

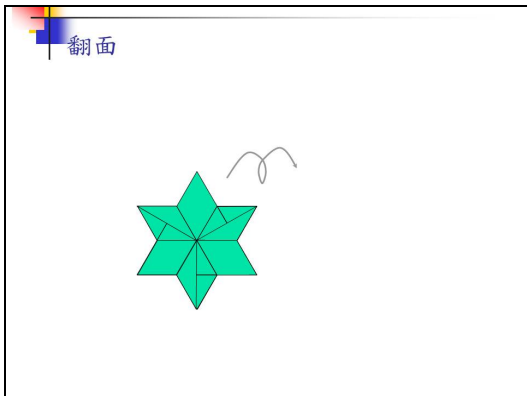
Q18:請問圖中所有多邊形的面積比?

1:2:3:4

摺出最上層三個三角形頂點與中心點連線

Q20:請問圖中的直角三角形與整個六角芒星的面積比?

1:24



資料來源:

- Origamics, オリガミクス(幾何図形折り紙) I, 芳賀和夫著, 日本評論社出版。