

# 教育部 103 學年度中小學科學教育專案期末報告

計畫名稱：數學與藝術課程之研發與實作

主持人：李政憲

E-mail：[jenshi an@yahoo. com. tw](mailto:jenshi an@yahoo. com. tw)

共同主持人：葉麗珠、謝熹鈴、賴韻竹

執行單位：新北市林口國中

## 一、計畫執行摘要

1. 是否為延續性計畫？  是  否

2. 執行重點項目：

- 環境科學教育推廣活動
- 科學課程教材、教法及評量之研究發展
- 科學資賦優異學生教育研究及輔導
- 鄉土性科學教材之研發及推廣
- 學生科學創意活動之辦理及題材研發

3. 辦理活動或研習會等名稱：

- (1) 新北市林口國中跨校「資優數學教師社群」工作坊
- (2) 「費氏數列一般式推導」、「曆法與數學思維」、「藝數多盒心紙盒」、「電腦 3D 繪圖軟體 (SketchUp) 於數學教學上的應用」、「數學與藝術互動的國際近況」、「GGB 進階研習」、「特殊化與一般化」等外聘講座分享與諮詢
- (3) 桃園縣山腳國中「立體摺學」課程分享
- (4) 新北市安溪國中、碧華國中「幾何葵花寶典」及「GGB 初階研習」分享
- (5) 「摺出無理數—兼談摺紙數學與其他領域的結合」論文於「第二屆師資培育國際學術研討會-各科教材教法」發表；親子天下翻轉教師社群北部小聚、中原大學師資培育國際學術研討會「酸鹼指示/根號  $n$  螺線」暨「貝殼鑲嵌螺線」摺紙模型推廣；東莞台商子弟學校「摺紙與多元評量」、新北市錦和高中「從摺紙遊藝到數學藝術」、新北市永和國中「藝數摺學—從摺紙學平行與相似」課程分享；台北市華江高中「藝數摺學—從貝殼螺線、摺紙一刀剪到藝數翻摺多角盒」課程實作；中央大學假日科學廣場、林口區國小科學營「翻滾吧！摺紙」、「巧拼連方塊」課程；台南市德光女中「摺紙中的藝數」課程實作；桃園縣石門國中「翻滾吧！摺紙」、「摺出無理數」、「摺出黃金/白銀比」、「乘法立方體」、「對稱摺紙」暨「立體摺學」等課程實作；桃園縣南崁國中「摺出黃金/白銀比」課程實作；台北科學日「藝數翻摺多邊形暨藝數鑲嵌正多面體」實作；新北市麗林國小「乘法立方體」、「藝數翻摺六邊

形」、「平行摺紙」課程實作；林口國中「數理學報」發行。

- 4.辦理活動或研習會對象：國教暨新北市數學輔導團與台北市、新北市、桃園縣、台南市、澎湖縣、台中市暨東莞國中小教師與學生
- 5.參加活動或研習會人數：每次工作坊暨講座約 6 至 100 人，共舉辦七場研習，並對校內外教學、發表與分享逾十場。
- 6.參加執行計畫人數：8~10 人（含計畫暨協同主持人、研究助理暨社群團隊）
- 7.辦理/執行成效：本計畫辦理跨校「資優數學社群」工作坊，並於新北市林口、安溪與碧華國中與桃園縣山腳國中等校進行逾十五次的課程交流（圖 1 至圖 4），並陸續於研討會與各縣市國中小進行發表與課程分享（圖 5 至圖 8），其間也以「藝數摺學—從摺紙學平行與相似」教案投稿教育部「國中教師有效教學深耕推廣計畫」榮獲特優（圖 9）；另外「摺出無理數（一）」與「摺紙中學數學—從有理數到畢氏數」等文章，已陸續投稿科教月刊與科學研習月刊獲得刊登（圖 10）。目前所完成的「鑲嵌圖形（藝數摺學）」與「立體幾何（立體摺學）」課程，多數已於新北市、桃園縣等縣市資優及普通班課程或營隊活動進行實作（圖 11 至圖 16）。透過今年度眾多教授的諮詢與多方面的專家互動，使得所呈現的教材更多樣化（圖 17 至圖 20）。藉由本計畫的規劃整理，可使數學與藝術的結合更為密切，也將使更多有意延伸補充的老師便利與受益，學生多些不一樣的收穫與感動。

## 二、計畫目的

當今的數學教育，強調從做中學，培養學生帶的走的能力，有些老師更是具有讓學生「動手玩數學」的教學理念（曾志華，1995）。如今教數學不一定只教會學生算出正確的答案，更重要的是幫助學生理解如何思考及解決數學問題（黃敏晃，1996）。人類天性好玩，教師如果能善用此種天性，把教學和遊戲加以結合，必能使學生更喜愛上學（饒見維，1996）。近年來數學與藝術的結合比比皆是，今年度荷蘭藝術家 Escher 作品至台灣故宮展出，引起廣大的迴響，並且使得許多研究數學與藝術的教學者，有了共同對話的機會；另外交通大學的陳明璋教授，發展 AMA 外掛程式集結合於一般人常用的 PowerPoint 軟體中，可以迅速繪製包絡線、碎形與山水等圖形，使數學以藝術呈現的門檻得以降低，並且讓學生們更加理解其數學結構，在十二年國教因應數位時代並且鼓勵學生動

手做的前提下，不啻是個極佳的演示與操作工具。

然而數學教學研究也顯示，欲藉由數學活動來發展教學思維，可能需要在素材和解題活動的難度上作適當的調整（鄭英豪，2000）；為避免學生在學習上的負荷過重，適當的工具、教材與呈現方式是必要且需慎重考慮的。筆者於交通大學在職專班跟隨陳明璋教授學習 AMA (Activate Mind Attention) 軟體，一直持續產出數位教材融入數學課堂中，並與現場教師及班級學生有著密切的互動，頗得師生好評；由於 AMA 軟體將傳統的 PowerPoint 可以轉化程式邏輯為操作程序的環境，並具備模糊操作、準確定位與掌握大量訊息的特性，因此除了在教學上讓學生可程序式學習，也可讓學生在呈現歷程中充滿驚喜，感受特別而無法預測之美，使其作品同時具備美學質感與數學結構；進一步希望能培養學生將看到美的感覺寫出，以開啟數學與藝術的另一扇窗。

本校美術教師今年度課堂中進行「艾雪的鑲嵌藝術」教學與作品設計（如圖 21、22），而山腳國中的「藝數社群」教師，也將數學課與美術課結合，發展「畢氏樹的數學原理與作品設計」（如圖 23、24），讓學生獲益良多。以數學為基礎，與他校社群及藝術領域的教師結合，透過摺紙作品為媒介，可發展更多可應用於課堂上的「藝數」課程，期盼激盪更多創意，使學生在數學鑑賞及藝術設計上的能力得以提昇。

### 三、研究方法

為使學生研究與學習時更方便討論，進一步延伸學習，本計畫特別選定一般常用的 PowerPoint 簡報軟體結合 AMA 外掛程式集進行教學設計與示範演練，作為教師教學呈現與學生作業研究工具，並透過學習單回饋與作品製作等方式，讓學生從中學習預定達到之教學目標。

本計畫預計於新北市林口國中、安溪國中與碧華國中，桃園縣石門國中與山腳國中等學校，分別針對普通班及資優班學生，每次各約 20 至 40 位學生分別進行課程教學，透過專家諮詢與社群討論，本年度先針對「圖形鑲嵌」與「立體圖形」兩類課程，設計學習單與摺紙模型，以利相關數學知識的理解，而針對主要內容分別於不同時段進行 2~6 節後將

再進行評量，視學生反應與社群互動後作課程調整，視情況再進行部份延伸課程，以下針對課程內容、延伸課程暨評量方式分別進行說明：

課程	課程主題	主要上課內容	延伸課程內容	評量方式	備註
1	圖形鑲嵌	Escher 的作品介紹 (2 節) 仿 Escher 作品實作 (6 節) 磁磚密鋪的數學結構 (2 節)	十七種數學對稱結構 (2 節) Escher 作品電腦實作 (4 節)	手繪 Escher 作品 課間學習單 電腦自製 Escher 作品	(普通班) 美術課 數學課 社團課 輔導課 (資優班) 數學課 專題課 個別指導
2	立體圖形	柏拉圖正多面體介紹與實作 (3 節) 正多面體數學結構與尤拉公式介紹 (2 節) 正多面體模型實作與數學問題討論 (4 節)	阿基米德多面體數學概念介紹 (2 節) Zometool 模型實作與數學問題討論 (6 節) 串珠實作多面體模型 (4 節)	多面體摺紙作品 課間學習單 Zometool 多面體 串珠多面體	(普通班) 美術課 數學課 輔導課 (資優班) 數學課 專題課 個別指導

至於選擇這兩類課程進行施作分析的原因，除了因這兩個單元配合前四年筆者的科教專案計畫已蒐集了部份資料，且部份課程並已設計相關教材，今年度對其不完整處進行補強，即可針對普通班或資優班學生，進行教學或討論，並依實施後的結果，進行教材修正與調整，以確定其可行性；而這些單元恰是教師與學生們，透過藝術來認識數學的最佳入門方式，透過筆者的教材與相關學習單設計，以及延伸思考題、摺紙作品設計等，將使得有意使用的教師更方便上手，學生們更容易理解。

此外，相關課程並將透過下列研究步驟進行設計與修正：

(一) 課前討論：

1. 教材學習單模型製作：蒐集相關資料，製作完整教學簡報與學習單、課程相關模型或進階思考題設計；
2. 專家諮詢討論與修正：藉由相關領域專家與社群互動諮詢，討

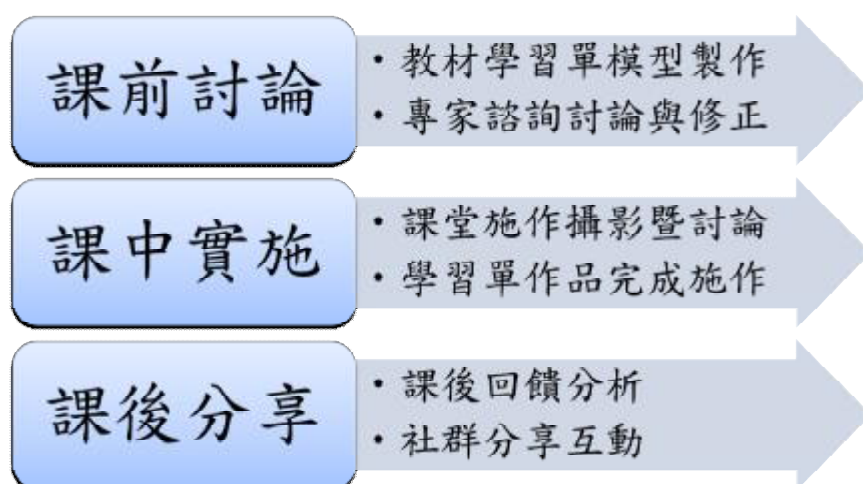
論修正後實施。

(二) 課中實施：

1. 課堂施作攝影暨討論：協助引導學生理解，並藉由研究助理協助拍攝上課實施過程相片與攝影，彙集成光碟或上傳至網路；
2. 學習單作品完成施作：藉由學生完成的學習單回饋或所完成的作品，確認學生的接受與理解程度。

(三) 課後分享：

1. 課後回饋分析：整理學生的學習單、回饋與作品，並根據學生的回饋再行修正教材定稿；
2. 社群分享互動：蒐集學生的回饋結果，連同教材集結成冊或數位光碟，於社群分享或投稿相關期刊暨研討會發表施作後心得。



至於其授課方式多利用原授課時間（普通班美術課、第八節、寒暑假輔導課、社團活動或資優班數學課、個別指導及專題課）時間，或是原訂完成的活動（國中小科學營、校慶或科學園遊會等）的部份課程，並提供相關模型材料以利施作討論。而透過新北市與桃園縣輔導團到校訪視或分區座談等活動，也能適度作教材推廣以及模型發放製作課程；並透過研習的舉辦或研討會參與，讓教材與現場老師的互動更深入，了解相關設計理念、實施細節與進階應用；而透過網頁分享、整理與交流，也將使有意使用於教學的老師或再行複習或練習的學生們更加方便。

#### 四、研究成果

針對此次計畫，筆者已完成的工作與達到的成果有六：

1. 研發並製作「數學藝術」相關模型，並藉由與數學老師及藝術老師分享施作狀況、心得：目前已經陸續完成「酸鹼指示/根號 $n$ 螺線」、「鑲嵌貝殼螺線」、「藝數翻摺多邊形」、「藝數翻摺多角盒」、「正四面體鑲嵌」與「正八面體鑲嵌」等模型，並將相關模型陸續於本校藝術領域、自然領域、數學領域分享，並藉由數學輔導團到校訪視、分區輔導與研討會參與等方式作推廣。
2. 將「數學藝術」數位教材與相關模型，於課堂、輔導課、社團、營隊或資優班施作：目前已陸續將「圖形鑲嵌」與「立體圖形」等課程，於本校資優班、普通班與社團，桃園縣石門國中、台中市大業國中、新北市中平國中、新北市麗林國小等班級或營隊，以及新北市「小實驗大學問」課程分別進行完整或部份課程的實作。
3. 建置一個資源分享的線上空間，整合相關成果：上述針對學生教學或教師所分享的課程內容，已放置於本校數學科「林中生命藝數殿堂」網站；並接受親子天下邀約，陸續於「翻轉教育」網站發表分享相關課程施作心得（備註1）。
4. 聘請專家學者到校、社群或輔導團，針對老師研討諮詢：本學期配合新北市專業教師社群申請，已陸續邀請了江翠國中陳彩鳳老師分享「費氏數列一般式推導」與「特殊化與一般化」課程；台北醫學大學英家銘教授分享「曆法與數學思維」主題；台北科技大學李家祥教授「藝數多盒心紙盒」實作；新北市錦和高中陳禾凱老師於輔導團針對全市教師分享「電腦3D繪圖軟體(SketchUp)於數學教學上的應用」；中央研究院李國偉教授分享「數學與藝術互動的國際近況」，以及臺北高中藍邦偉老師分享「GGB進階研習」主題課程。
5. 透過學生回饋單與作品實作，檢驗教材設計的適切性並了解學生學習狀況：目前「圖形鑲嵌」與「立體圖形」課程均已配合課程設計學生

學習單、回饋單與摺紙作品，陸續針對學生施作並進行內容的修正。

6. 指導學生研究並發表教案，投稿心得與作品：今年除了將前兩年研發與持續推廣的課程，書寫「從摺紙學數學－從有理數到畢氏數」以及「摺出無理數（一）」文章，分別投稿科學研習與科教月刊獲得發表（詳見備註 2），亦於「第二屆師資培育國際學術研討會-各科教材教法」研討會發表「摺出無理數－兼談摺紙數學與其他領域的結合」，更與社群教師針對去年度的「平行摺紙」課程進行修正，於普通班進行實作與教案甄選投稿榮獲全國特優。

至於本計畫目前相關工作已配合時程表完成如下，整體完成約 97%；申請的經費十三萬元，經費核銷已近九成，與執行進度相去不大。

數學與藝術課程之研發與實作	103年8月	103年9月	103年10月	103年11月	103年12月	104年1月	104年2月	104年3月	104年4月	104年5月	104年6月	104年7月
(一) 相關資料蒐集												
(二) 互動簡報製作												
(三) 專家諮詢、舉辦相關講座或研習												
(四) 摺紙教材學習單設計												
(五) 摺紙模型設計製作印刷												
(六) 互動教材施作												
(七) 輔導團團內或到校分享												
(八) 網頁交流互動												

## 五、討論及建議（含遭遇之困難與解決方法）

本計畫目前遭遇困難與預定的解決之道分別如下：

1. 資料取得與整合不易：由於目前國內對於數學與藝術研究的教材並不普遍且缺乏整合，故相關資訊無法有效整理，茲以底下方式進行調整：
  - (1) 藉由專家諮詢提供意見，協助教材整合，並確認其正確性與實用性；
  - (2) 藉由社群教師分工合作，整理教材或團隊參與競賽以進行推廣，如目前已陸續整理完成江翠國中陳彩鳳老師「幾花的葵花寶典」、「數

學魔術」等教材並進行實作；

2. 實作課程施行對象不夠全面，部份課程無法配合計畫實施：雖開學已於期初預排定相關課程於各校普通班與資優班課內或外加課程實施，仍因學生實作進度與學校行事略作調整，且「立體圖形」課程因安排於九年級下學期，受升學考試與課程進度無法實施，故擬定相關配套措施如下：
  - (1) 普通班安排於美術課、輔導課施作，資優班除原本預定進行的專題課程，部份延伸內容改於個別指導深入討論，一方面不會耽擱原本進度，另一方面也可於討論完畢後進行發表；
  - (2) 利用社團課或營隊方式實施，如「翻滾吧！方塊」課程即利用本校國小科學營進行課程設計、討論與施作；
  - (3) 切割實作與討論課程分別實施，如「藝數翻摺多邊形」僅針對普通班進行實作課程，資優班進行完整實作與討論課程；
  - (4) 藉由今年度校內所發行的「數理學報」，將相關課程教材藉由平面文字的敘述，得以讓更多學生理解；
  - (5) 「立體圖形」課程挑選部份內容，安排於九年級會考結束後辦理「畢業週」與「數學週」活動，讓學生透過實作學習數學；
3. 部份學生無法同步操作與學習，對於數學與藝術的結合性理解度不足：由於部份課程的難度較高、操作不易，調整相關施作方式如下：
  - (1) 發展摺紙模型步驟化操作，例如「翻滾吧！方塊」與「藝數翻摺四邊形 II」即設計為將相關摺線印製於模型上，以便學生進行操作，並與學生討論相關摺線的繪製方式。
  - (2) 搭配實物投影機、大型教具同步學習，可使老師更易講解說明，學生印象更為深刻；
  - (3) 使用網際網路預錄對照學習，如「摺出立體根號  $n$  螺線」與「翻摺多邊形」即透過 youtube 網站分享摺法使教師與學生可重覆學習；
  - (4) 結合其他軟體課件對照學習，如資優生可透過 GSP 或 GGB 軟體進行圖形的繪製與驗證；
  - (5) 透過小組合作學習模式進行，藉由討論與分組完成作業可增進學生



互動，減輕學生完成指定作業的壓力；

- (6) 「鑲嵌課程」難度較高的對稱結構施作於資優班專題課程，普通班則僅操作「藝數翻摺多邊形」，透過摺紙模型與動畫，認識基本的正方形、正三角形與正六邊形對稱結構；

4. 學生反應不如預期：部份設計內容因設計時無法確認學生接受度與延伸學習的可能性，針對此問題所採取相關措施如下：

- (1) 鼓勵有興趣深入研究同學於課堂或以其他形式發表，透過作品的發表可讓討論所得的結論更為具體，如「藝數翻摺多邊形」與「翻滾吧！方塊」課程安排於資優班期末發表的研究結果；而本校自然科學研究社的「巧拼連方塊」課程討論，也能兼顧設計感與數學性；
- (2) 設計另類作業，使學生願意投入的意願性增高，如結合普通班圓形性質所設計的「小黑的故事」繪本設計，可看到學生具巧思的結果；
- (3) 透過「數學萬花筒」徵題、辦理校內數學週與數學競試活動等方式，提昇學生興趣，並鼓勵有能力的學生多參與；

5. 部份社群老師排課不易，流動度高：自 100 年迄今共累積逾二十位有意願參與的老師參與社群，然因部份教師跨時段排課與資優班鎖課，目前固定參與老師約六至八人，且部份教師因課務無法全程參與；因此於本學年起，社群活動固定於週一下午，設計以一節課為單元，且減少跨校性活動，以使更多教師可以共同參與，設計教材、進行教案投稿與徵題競賽；

藉由上述遭遇困難的解決之道，除了讓藝術課程融入數學教學，更能讓學生從實作中得到啟發，從討論中發現結果，從發表中提昇成就，從作品中建立美感；自己也願意投入更多時間與心力，致力發展更多元的數學藝術實作課程。若本計畫於來年申請獲准，期待也透過上述調整方式，在未來的一年持續執行更為順遂，裨益更多老師學生，透過數位化彈性簡報整理與摺紙媒介，理解藝術與數學的關聯性，進而欣賞並愛上數學。期待藉由此專案的實施，能給更多的老師與學生們，提供一套完整有系統的教材，藉由網路、成果光碟或直接分享，讓更多師生從藝術中發現數學的美。

備註 1：本校數學科網站《林中生命藝數殿堂》：

<http://163.20.9.7/dyna/menu/index.php?account=math>

親子天下「翻轉教育」網站：

<http://flipedu.parenting.com.tw/>

備註 2：摺紙數學與藝術發表相關文章：

1. 《「摺紙融入數學」促進學生思考的實驗心得》，99 年上學期《促進學生主動思考》工作坊成果
2. 《「摺紙中學數學」之紅包花花》，科學教育月刊 337 期（並轉載於 HPM 通訊十四卷第十一期第四版）
3. 《「摺紙中學數學」之名片試金石》，科學教育月刊 345 期
4. 《「摺紙中學數學」社群經營與專業成長》，99 學年度數學領域輔導團永續經營論文集—分享與傳承
5. 《摺紙學勾股定理》，新北市 100 年度國中數學學習領域新教案甄選第二名
6. 《「摺紙中學數學」教學心得——從「勾股定理」證明談起》，發表於 100 學年度「數學領域輔導團永續經營 II」研討會
7. 《摺出黃金/白銀比》教案，康軒出版社「財源滾滾包」教具包
8. 《「摺紙中學數學」之社團指導篇》，HPM 通訊十六卷第二、三期合刊第十版
9. 新北市教育電子報 117 期「談摺紙融入乘法公式教學」
10. 《摺出無理數》教案，康軒出版社「摺其所好」教具包
11. 教育部《國中數學原型教材》C 冊 1-1、1-3 部份內容
12. 《淺談實作評量——從摺紙中學習數學》，科學教育月刊 367 期
13. 《長方體被平面截出三角錐各面面積間的平方關係》，科學教育月刊 369 期
14. 《從摺紙學數學—從有理數到畢氏數》，科學研習月刊 54-4 期
15. 《摺出無理數（一）》，投稿科學教育月刊中（已接受）



圖 1 資優社群期初會議



圖 2 山腳國中「立體摺學」分享



圖 3 安溪國中課程分享



圖 4 期末研討於九份魔術館



圖 5 數學教學國際研討會課程交流



圖 6 錦和高中「藝數摺學」課程分享



圖 7 師大師培中心摺紙工作坊實作



圖 8 台北教育大學師培中心課程分享



圖 9 教育部有效教學推廣計畫特優



圖 10 「科學研習」月刊投稿獲選



圖 11 大業國中「藝數摺學」課程



圖 12 中央大學「翻滾吧！摺紙」課程



圖 13 林中校慶「镶嵌图形」作品展示



圖 14 華江高中「藝數多角盒」作品實作



圖 15 石門國中「立體摺學」課程

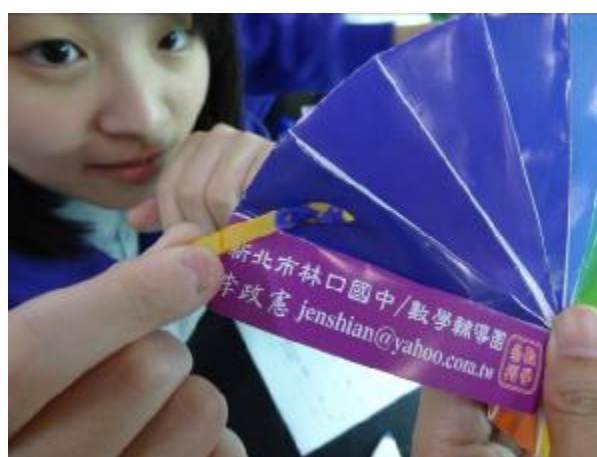


圖 16 林口國中「酸鹼指示/根號 $n$ 螺線」課程



圖 17 交大陳明璋教授教材設計諮詢



圖 18 中研院李國偉教授數學藝術講座



圖 19 台北醫學大學英家銘教授專題講座



圖 20 台北科技大學李家祥教授實作分享



圖 21 本校學生「藝數鑲嵌」手繪作品 I



圖 22 本校學生「藝數鑲嵌」手繪作品 II



圖 23 山腳國中「畢氏樹」手繪作品 I



圖 24 山腳國中「畢氏樹」手繪作品 II