ISBN 978 87 7066 499 8

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 3.12 Vikingeborgenes geometriske konstruktion

Indhold

ISBN 978 87 7066 499 8

Projekt 3.12 Vikingeborgenes geometriske konstruktion

Materialerne, der danner grundlag for dette projekt, er stillet til rådighed af lektor Dorthe L. Nielsen, Vesthimmerlands Gymnasium, der sammen med kolleger har udviklet det tilhørende AT-forløb, som ligger i et bilag. En af inspirationskilderne har været noter skrevet af Preben Møller Henriksen (hvis site ikke er tilgængelig længere).

Projektet er velegnet til et fagligt samarbejde med historie og andre fag. I appendiks ligger der materialer til brug for et fagligt samarbejde.

Det kan også gennemføres som et rent matematikprojekt, og vil her dække supplerende stof i matematik C, B eller A.

Projektet gør brug af begreber og konstruktioner fra klassisk geometri som fx kongruens, midtnormaler og omskrevne cirkler, midtpunktstransversaler og ligedannetheder. Sådanne begreber og egenskaber kan introduceres undervejs, eller dette projekt kan anvendes som en afrunding af et forløb om emner fra den klassiske geometri.

I appendiks ligger der en indføring i ellipsens teori. Dette kan også dækkes / suppleres ved inddragelse af B-bogens projekt 0.2 om ***Ellipser og Keplers 2. lov****, der har fokus på ellipsens ligning, og A-bogens* ***projekt 6.5 Ellipser – brændpunkter, brændstråler og praktisk anvendelse i en nyrestensknuser****, der har fokus på ellipsens parameterfremstilling.*

I C-bogens kapitel 10 om Matematik og kultur ligger et særligt projekt 10.14 om ***cirkler, ellipser og ovaler****, der fortæller historien om konstruktionen af Peterspladsen i Rom som en oval, og undervejs viser, hvorledes man geometrisk kan udføre sådanne ovalkonstruktioner, der er en mellemting mellem en ellipse og en cirkel – og måske kan være anvendt af vikingerne i konstruktionen af langhusene.*

ISBN 978 87 7066 499 8

Ringborgenes konstruktion

Der er fundet fem ringborge i Danmark, Trelleborg syd for Slagelse, der var den første man opdagede og udgravede (fra 1934), Fyrkat ved Hobro, Aggersborg ved Aggersund på nordsiden af Limfjorden, Nonnebakken under det nuværende Odense og den i 2014 opdagede Vallø Borgring ved Køge.

Der er en del fællestræk ved disse ringborge. Ringvolden danner en cirkel og har port i de fire verdenshjørner. Disse er forbundet to og to med træbrolagte gader, dels gennem centrum, dels langs voldens inderside. Voldgraven er *koncentrisk* med ringvolden, men adskilles fra den af et smalt stykke land, der kaldes en *berme*. *Langhuse* er arrangeret som firelængede gårde, der er præcist placeret i hver af borgens fjerdedele. Disse huse har krumme langvægge, rette gavle og skrå yderstolper til støtte herfor, og de er delt i tre rum. De dominerende byggematerialer er jord, græstørv og træ.
De vigtigste forskelle borgene imellem er størrelsen, men der kan også være andre detaljer i konstruktionerne, som er forskellige.

	Borgpladsens diameter	Voldens bredde	Gravens bredde	Husenes længde
Aggersborg	240	11	4	32,0
Trelleborg	136	19	18	29,4
Fyrkat	120	13	7	28,5
Nonnebakken	120	17?	7?	?

(kilde: Else Roesdahl , *Vikingernes verden* s. 148)

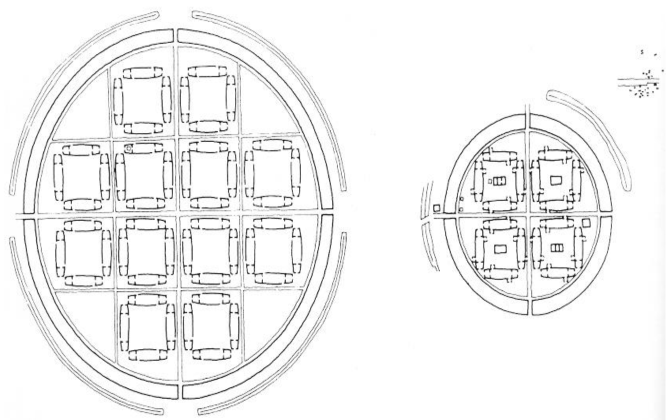
Grundplanerne

Til højre ses grundplanerne for ringborgene.

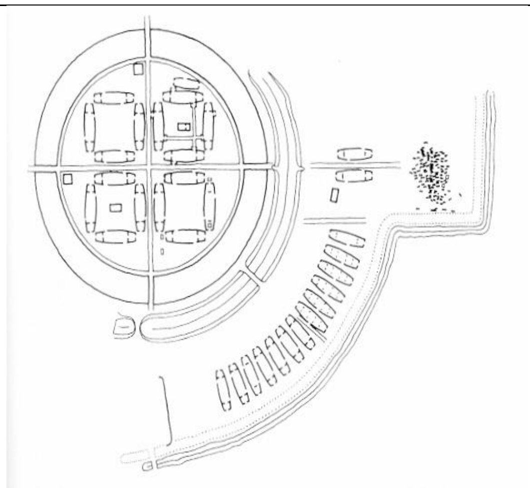
Øverst til venstre: Aggersborg

Øverst til højre: Fyrkat

Nederst: Trelleborg.



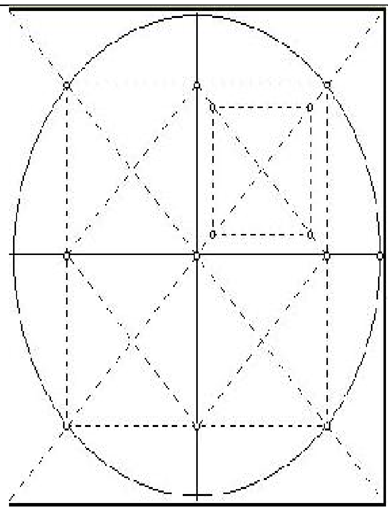
ISBN 978 87 7066 499 8

Der er så stor regelmæssighed i konstruktionen af grundplanen, at den må have været planlagt på forhånd. Bygmesteren har dermed kunnet udstikke hele grundplanen ved hjælp af et langt reb og nogle pæle, før byggeriet gik i gang.	

Trelleborg

Nedenunder kan ses, hvordan Trelleborg muligvis blev konstrueret. Vi opstiller således en geometrisk model over Trelleborgs grundplan.

1. del af konstruktionen:

Trelleborg kan konstrueres ud fra den indre ringvolds radius. *Lad os som udgangspunkt sætte radius til 8 enheder*. Det vil fremgå nedenfor, hvorfor dette er praktisk. Vi kan jo altid skalere til de mål vi ønsker os. Først bestemmes centrum, dernæst tegnes cirklen og Nord-Syd og Øst-Vest retningen fastlægges. Cirklens indre kvadrat fastlægges ved at halvere de rette vinkler til verdenshjørnerne. En 90 graders vinkel kan let halveres ved at afsætte et kvadrat med en tilfældig sidelængde. **Opgave 1** Forklar hvorfor vinklen halveres ved at afsætte et kvadrat med tilfældig sidelængde. Lav en figur og indfør de nødvendige betegnelser. Hvilken matematik skal vi bruge for at lave argumentet? Er det sandsynligt, at vikingerne gjorde sådan?	

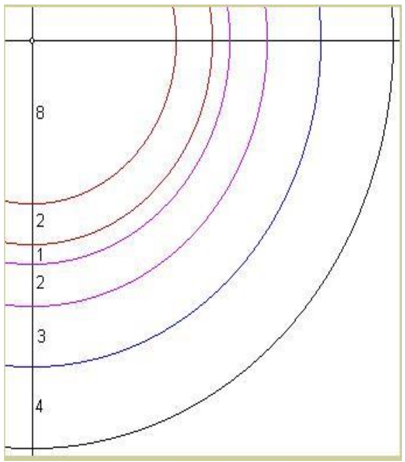
2.del af konstruktionen

Vi får dermed bestemt 8 punkter på kvadratet, nemlig hjørnepunkterne og sidernes midtpunkter. Det indre kvadrat er opdelt i 4 små kvadrater. I hvert af disse kvadrater skal der konstrueres et nyt kvadrat, som skal bruges til konstruktion af karreen. Dette gøres ved at afsætte 1/8 radius på hver af diagonalerne fra hjørnepunkterne. De små kvadrater får dermed en side, der er 1/4 kortere end siden i det omgivende kvadrat. Karreernes kvadrater er herefter forskudt en smule væk fra centrum for at give bedre plads til aksegaderne.
De stiplede linjer repræsenterer retninger; kun pælene udsættes i praksis.

ISBN 978 87 7066 499 8

3. del af konstruktionen:

Herefter afsættes en cirkelbue med den dobbelte radius (blå) i den sydøstlige kvadrant. De yderste huse er placeret langs denne cirkelbue.
Den ekstra radius opdeles i forholdet *2:1:2:3*, som bestemmer ringvoldens, mellemstykkets og voldgravens bredde, samt stykket mellem voldgraven og de yderste huse.
Endelig afsættes den ydre ringvold med en radius, der er *2,5* gange den indre radius.
Læg mærke til at alle forhold let kan findes i praksis ved halveringer af rebet.
Modellen respekterer arkæologernes påstand om, at volden og voldgraven har samme bredde.



Opgave 2:
Konstruer med passer og lineal (gerne i et matematisk værktøjsprogram) en geometrisk model af Trelleborg ud fra ovennævnte beskrivelse. Langhusene sætter du på, efter at have løst den følgende opgave.

Opgave 3
Den geometriske konstruktion af langhusene buede sider kan være foretaget som en del af to cirkelkonstruktioner. En god geometrisk model for dette er en ellipse, og denne har yderligere den fordel, at det er én geometrisk figur, som vi kan konstruere på én gang

a) Konstruer i et dynamisk geometriprogram en ellipse, der tegnes ud fra følgende oplysning: Udmålingen på Fyrkat giver, at husene er ca. 26 fod bred på midten og ca. 16 fod bred i enderne. Husenes længde kan du finde i Roesdahls tabel.
b) De 6 punkter, du har fastlagt under punkt a) bestemmer to trekanter, der ligger symmetrisk om langhusets symmetriakse. Enhver trekant har en omskreven cirkel, hvis centrum fastlægges som skæringspunktet mellem midtnormalerne. Midtnormaler er ret enkle at konstruere, også i en praktisk situation, idet man blot skal kunne halverer og oprejse vinkelrette. Det er en konstruktion, der har været kendt helt tilbage til Euklid. Måske kendte bygmestrene bag vikingeborgene den – disse bygmestre var ofte omkringrejsende eksperter, som stormænd og konger kaldte til landet, når der skulle bygges. Så lad os antage, at bygmesteren kendte konstruktionen af omskrevne cirkler. Gennemfør konstruktionen ud fra de 2 x 3 punkter, og tegn cirkelbuerne der er geometriske modeller for langhusenes buede sider.
c) Giv en vurdering af de to konstruktioner – og inddrag gerne en tredje, du selv har udtænkt. Er det efter din vurdering realistiske bud på hvordan konstruktionerne kan være foregået?
d) Hvis projektet indeholder en ekskursion, så foretag en mere detaljeret opmåling af et langhus og sammenlign med din model.

Opgave 4
Færdiggør nu din konstruktion idet du sætter langhusene på konstruktionen i opgave 2.

ISBN 978 87 7066 499 8

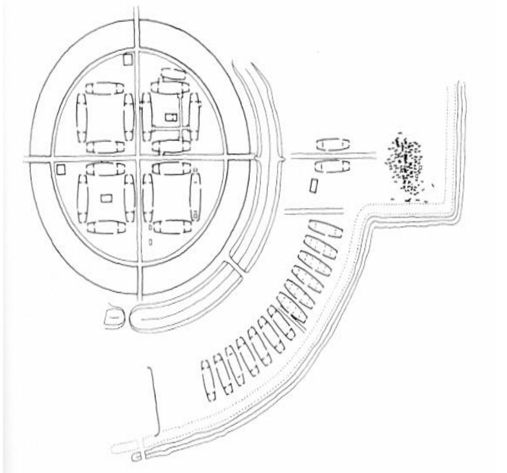
Opgave 5
Modellens gyldighed kan afprøves ved at beregne nogle relevante afstande og sammenligne dem med de faktiske mål. Vi fastlagde i konstruktion den indre radius til 8 enheder. Det faktiske mål på den indre diameter er ca. *137,2 m*, så vi vil beregne alle afstande på basis af dette mål. Overvej nu hvordan du kan beregne de nedenstående mål. Du kan alternativt anvende din geometriske konstruktion og få programmet til at måle afstandene:

a) Cirklens kvadrat får sidelængden ____ *m*.
b) Dette kvadrat opdeles i *4* kongruente kvadrater med sidelængden ____ *m*.
c) Inden i hvert af disse kvadrater konstrueres et kvadrat med sidelængden ____ *m*.
d) Ringvolden og voldgraven får begge bredden ____ *m* og mellemstykket bliver ____ *m*.
e) Afstanden fra centrum til de yderste huses forreste gavle bliver _____ *m* (cirkelbuen med den dobbelte radius) og afstanden til den ydre vold bliver _____ *m*.
f) De yderste huse er 26,5 *m* lange, så de er placeret ____ *m* fra den ydre vold, og afstanden mellem husene og den indre voldgrav er ____ *m*.
g) Husene i karreerne er konstrueret over ellipser, hvor afstanden mellem brændpunkterne er ____ *m* (kvadratets sidelængde).

Der er en facitliste i appendiks 1. Sammenlignes de beregnede tal med de officielle mål passer de pænt. Dog ser det ud til at der er en mindre forskydning fra mellemstykket til ringvolden og til voldgraven. Disse ser ud til at være ca. 18 meter brede.

Opgave 6
Prøv også at tegne husene i den ydre gård ind på figuren. Hvilke problemer opstår der i den forbindelse?

Øvrige huse

Lige foran gravpladsen er der anbragt yderligere 2 huse, som ikke umiddelbart kan indpasses i den geometriske model, bortset fra at de er anbragt symmetrisk om borgens østlige linje. Gravpladsen bryder borgens cirkulære forløb, men det kan forklares med, at man har valgt at genanvende en gammel gravplads. I to af karreerne (symmetrisk om den sydøstlige linje) er der anbragt et firkantet hus midt i gården, og ved den vestlige og den nordlige port er der anbragt to små firkantede huse. Disse fire huse symboliserer en vinkel, som har været bestemmende for husene ved den ydre vold.	

I to af karreerne (symmetrisk om den sydøstlige linje) er der anbragt et firkantet hus midt i gården, og ved den vestlige og den nordlige port er der anbragt to små firkantede huse. Disse fire huse symboliserer en vinkel, som har været bestemmende for husene ved den ydre vold.

ISBN 978 87 7066 499 8

Derudover er der bygget et mindre krumvægget hus tæt op af det nordligste hus i den nordøstlige karre. Dette hus ses der altid bort fra, idet det fuldstændigt bryder borgens symmetri.
Konstruktionen af det indre kvadrat er indtegnet på figuren.

De 13 huse i det sydvestlige hjørne bestemmer en vinkel på ca. 53 *grader*. For de fleste af husene er de forreste hushjørner anbragt tæt på den omtalte cirkel, og man har forsøgt at rette hvert hus ind efter borgens centrum. Dette er dog ikke lykkedes helt godt, da nogle af husene står temmelig skævt. Nedenfor skal I eftervise, at disse 13 huse bestemmer en vinkel på ca. 53 grader.

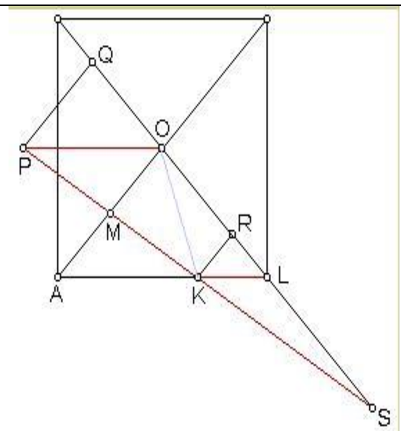
Vinkelberegningen

Tegningen viser borgens indre kvadrat, hvor *OL* er borgens radius og *OS* er den dobbelte radius.

Punktet *M* er midtpunkt for *AO*.

Punktet *P* er bestemt som skæringspunktet mellem linjen gennem *S* og *M*, og kvadratets vandrette symmetrilinje.

PQ og *KR* er tegnet vinkelret på diagonalen.



Opgave 7

a) Da *L* er midtpunktet af siden *SO* og *KL* er parallel med *PO*, bliver *K* midtpunktet af siden *SP*, idet KL bliver en *midtpunktstransversal*.
b) Argumenter for, at *M* er midtpunktet af siden *KP*. Hertil skal I bl.a. bruge, at trekant *MPO* og trekant *MKA* er kongruente.

Opgave 8

Husk at lave en passende figur i løsningen af denne opgave.

a) Argumenter bl.a. vha. din viden om ensvinklede trekanter for, at trekant *SKR* og trekant *SMO* er ligedannede med forholdet 2:3, så |KR| er lig med 2/3 af |MO|, og |OR| er 1/3 af |OS|.
b) Vis at forholdet mellem |KR| og |OR| bliver 1:2, da |MO| er den halve radius og |OS| er den dobbelte radius.
c) Vis til sidst, at vinkel KOR, som vi betegner *v* er bestemt ved, at $\tan v = \frac{1}{2}$, dvs. at *v* = 26,57 grader.

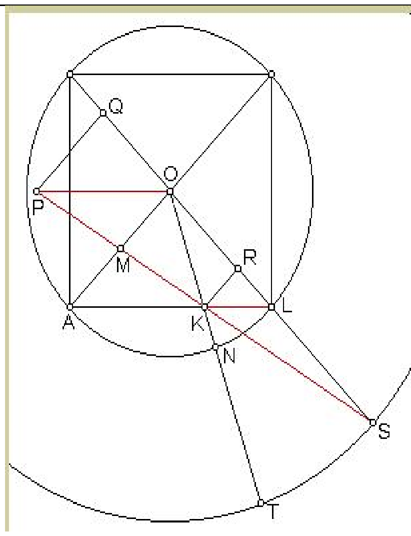
ISBN 978 87 7066 499 8

De ydre huse

Tegningen er nu udvidet med den indre borgs cirkel og cirklen til husene i den ydre borg. Buen NL er fastlagt ved vinkel KOR. Da radius til den ydre cirkel er den dobbelte, bliver buen TS dobbelt så stor.

Bemærk at vinklen (og dermed buen) kan afsættes uden kendskab til linjen gennem S og M, idet vinklen er fastlagt ved forholdet 1:2, som vi lige har argumenteret for.

Når buen NL er målt op, kan punktet *T* dermed afsættes korrekt i forhold til *S*, uafhængigt af, hvor punktet *S* er placeret på den ydre cirkel.



Vikingernes konstruktion

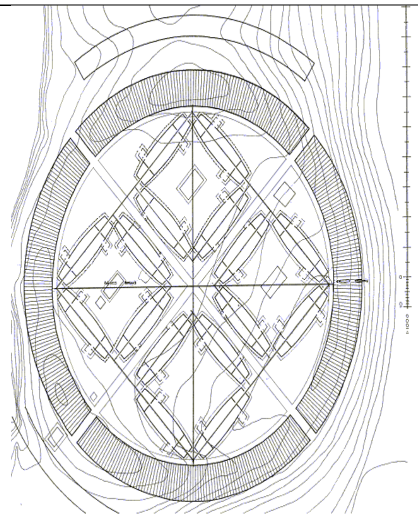
Vikingerne valgte at dreje vinklen lidt mod nord, da de byggede husene, men de var dog fortsat i stand til at udmåle den korrekte cirkelbue.

Fyrkat

Fyrkat er mindre, men er til gengæld konstrueret mere kompakt end Trelleborg. Det kunne tyde på, at Fyrkat er opført efter Trelleborg, således at man har kunnet bruge erfaringerne derfra. Man diskuterer stadig dateringen af borgene, som I arbejder med i historie – og dermed også rækkefølgen af opførelsen af borgene.

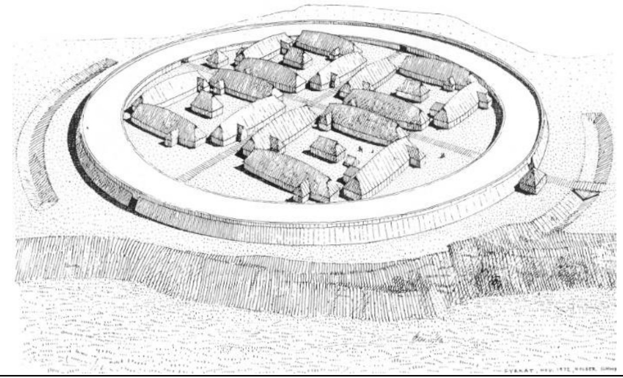
Forskellen fra Trelleborg er tydelig, idet karreernes kvadrater er forskudt, således at siderne i borgens indre kvadrat bliver midterakser i de yderste huse. Det giver en bedre udnyttelse af pladsen, således at de kunne bygge næsten lige så store huse som i Trelleborg, skønt borgens radius kun er 60 m.

Sidelængden i karreernes kvadrater er *ikke* bestemt på samme måde som i Trelleborg.



ISBN 978 87 7066 499 8

Rekonstruktion af Fyrkat



Udmålingen på Fyrkat giver, at husene er ca. 26 fod bred på midten og ca. 16 fod bred i enderne.

Opgave 9
Undersøg de ellipseformede huse og bestem afstanden mellem brændpunkterne.

Aggersborg

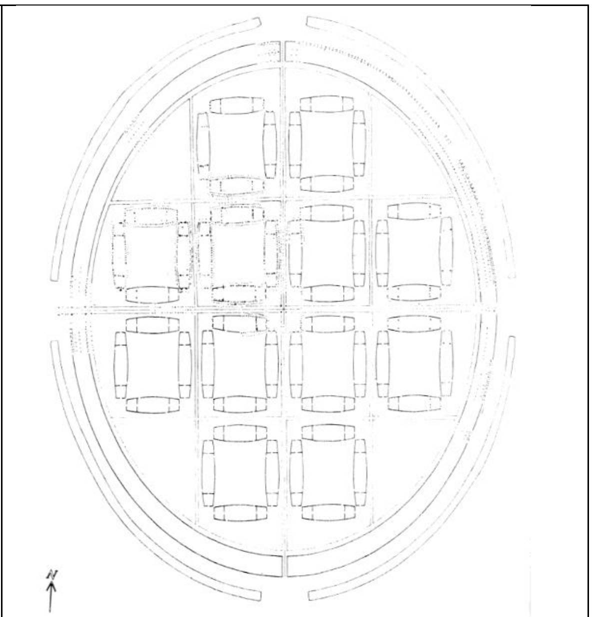
Aggersborg er langt den største af borgene og har langt flere huse i borggården. Det er derfor ikke helt det samme billede som ved Fyrkat og Trelleborg der gør sig gældende.

Aggersborgs grundplan

Opgave 10
Prøv at tegne det indre kvadrat for Aggersborg og den indskrevne cirkel i kvadratet ind på skitsen med husene.

Lad os kalde den indskrevne cirkel or C1. Tegn nu det indskrevne kvadrat i C1.

Hvilke observationer kan man gøre sig i forhold til Aggersborgs konstruktion?



Appendiks 1. Løsninger til opgave 5

Den indre diameter er oplyst at være ca. *137,2 m*

e) Cirklens kvadrat får sidelængden *97,0 m*.
f) Dette kvadrat opdeles i *4* kongruente kvadrater med sidelængden *48,5 m*.
g) Inden i hvert af disse kvadrater konstrueres et kvadrat med sidelængden *36,4 m*.
h) Ringvolden og voldgraven får begge bredden *17,2 m* og mellemstykket bliver *8,6 m*.
i) Afstanden fra centrum til de yderste huses forreste gavle bliver *137,2 m* (cirkelbuen med den dobbelte radius) og afstanden til den ydre vold bliver *171,5 m*.
j) De yderste huse er *26,5 m* lange, så de er placeret *7,8 m* fra den ydre vold, og afstanden mellem husene og den indre voldgrav er *25,7 m*.
k) Husene i karreerne er konstrueret over ellipser, hvor afstanden mellem brændpunkterne er *36,4 m* (kvadratets sidelængde).

ISBN 978 87 7066 499 8

Appendiks 2. Ekskursion til en af borgene – Eksempel: udflugt til Aggersborg

Forberedelse til ekskursionen

Gennemlæs de opgaver, som I skal lave efter ekskursionen.
Få styr på, hvad I skal medbringe for at kunne svare på opgaverne.

Opgaver, som skal laves efter ekskursionen

Opgave 1
Indtegn opmålingerne af diameteren fra Aggersborg på figuren.
Lad r være radius i den inderste cirkel og R være radius i den yderste cirkel.
Udregn R/r.
Er dette tal det samme for Fyrkat? Hvilke kommentarer kan I give hertil.

Opgave 2
Indtegn opmålingerne fra Fyrkat og Aggersborg med en anden farve på jeres oprindelige geometriske model over Trelleborg i samme målestoksforhold.
Hvilke observationer gør I jer i forhold til størrelse?
Hvilke observationer gør I jer i forhold til konstruktionsprincipper?
Hvor ligner de tre borge hinanden og hvor adskiller de sig?

Opgave 3
Indtegn jeres opmålinger / afprøvning af ellipse-konstruktionerne af husene.
Passer jeres data med de modelresultater, I havde med hjemmefra?

ISBN 978 87 7066 499 8

Appendiks 3. Vikingetid med fokus på vikingeborgene – et AT-forløb i 1.g

1. Formål

Formålet med forløbet er:

- At arbejde anvendelsesorienteret med fagenes metoder i forbindelse med arkæologi
- At lære at opstille en teori på baggrund af empiri
- At lære, at historien ikke er en entydig størrelse – der kan være forskellige historier alt efter empiri og metoder – og ikke mindst tidsperioder.
- At lære at modellere ved brug af geometriske modeller
- At lære, hvordan naturvidenskabelige metoder kan anvendes til at undersøge arkæologiske fund og hvordan de inddrages i bevaringen af fundene.
- At lære, hvordan man en arkæolog samler viden?

Fællesfaglige kompetencer i AT:

- Belysning af emnet set fra forskellige faglige synsvinkler og forskelle mellem de humanistiske og naturvidenskabelige metoder.
- Se hvordan forskellige teorier om samme emne (Trelleborgene) kan opbygges ved brug af empiri (levn og beretninger, målinger) og anvendelse af metoder fra forskellige fagområder.

2. Fagene

Fysik/Kemi/Matematik :

- At lære om metoden spektrofotometri og anvende denne til praktisk måling af phosphatniveau ved eksisterende udgravninger
- At få kendskab til datering ved C-14 metoden med henblik på aldersbestemmelse af fund fra Vikingetiden
- At lære om isotopforhold for kernerne Sr-86 / Sr-87 samt C-12 / C-13 / C-14 for derigennem at få kendskab til Vikingernes geografiske oprindelse samt habitat.

Materiale vedr. fysik/kemi

- Spektrofotometri : Pilegaard Hansen, Kemi M, FAG 1989
- Noter og opgaver om isotoper (CP)
- Jordbundsanalyser : Bjarne Lyders Pedersen, F&K Forlaget 1984
- Isotopanalyse – Aktuel Naturvidenskab 4, 2008
- Harald Blåtands vikinger var polske lejesoladter. Nyhedsartikel fra Aarhus Universitet
    - http://www.au.dk/om/nyheder/nyhed/artikel/harald-blaatands-vikinger-var-polske-lejesoldater/
- GRAF - Direkte link til grafen ovenstående artikel
    - http://www.au.dk/typo3temp/pics/af6ef5fa59.gif

ISBN 978 87 7066 499 8

- The Use of Strontium Isotope Analysis to Investigate Tiwanaku Migration andMortuary Ritual in Bolivia and Peru. Videnskabelig artikel om Sr isotopforholdets anvendelse i Sydarmerika . Især side 7-8 er interessant for jer.
  - http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1475-4754.2004.00140.x/full
- Samme artikel i PDF format
  - http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1475-4754.2004.00140.x/pdf

Matematik:

- At anvende trigonometri til beregninger vedr. langhusene i Trelleborgene.
- At opstille en geometrisk model for Trelleborg og lave modelkritik med målinger fra Fyrkat og Aggersborg.
- At bidrage med argumenter til overvejelserne om, hvorvidt Trelleborgene er bygget af samme bygherre.

Materialer i matematik:

- Materialesamlingen ovenfor om ringborgenes konstruktion
- Grundbogsmateriale : Bjørn Grøn m.fl : Hvad er matematik C, kapitel 3.
- Claus Glunk m.fl.: ”Q.E.D- Platon og Euklid tegner og fortæller”. Gyldendal 2006 s. 70 (sætning 1.29)

Historie :

- At analysere og forstå den empiri, teori og metode som ligger bag forskellige teorier for Trelleborgene og deres anvendelse.
- At få en generel forståelse for vikingetiden og dens karakteristika : centralmagtens opståen, Vikingetogter, Danernes kristning, Trelleborgenes bygning og de første byers opståen.
- At kunne anvende den kildekritiske metode til at forholde sig kritisk til historiske kilder (beretninger) og arkæologisk materiale (levn)

Materialer i historie :

Poul Nørlunds teori fra 1948: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i vikingetiden. Gyldendal 1980 s. 126-128. i uddrag.
Olaf Olsens teori 1962: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i Vikingetiden. Gyldendal 1979. s. 129-140 (i uddrag)
Tage E. Christiansen teori 1970: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i vikingetiden. Gyldendal 1980 s. 140-148. i uddrag.
Bjørn Svensson teori 1973: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i vikingetiden. Gyldendal 1980 s. 153-157. i uddrag.
Olaf Olsen teori 1980: Olaf Olsen. Tanker i tusindåret. Skalk december 1980
Tage E Christiansen teori 1982: Tage E Christiansen. Trelleborgs Alder. Arkæologisk Datering. Aarbøger Nordisk Oldkyndighed og Historie 1982. KBH. 1984 i uddrag.

ISBN 978 87 7066 499 8

Else Roesdahl teori: af Else Roesdahl: Vikingernes verden, 7. udgave 2001, s. 151ff i uddrag.

Jens Ulriksen: Aggersborgs forsvarsværkerAarbøger for Nordisk Oldkyndighed og Historie. 1993. s. 181-203. i uddrag.

Andres S. Dobat, Per Th. Mandrup Christensen, Simon K. Nielsen

Et kongeligt borganlæg fra middelalderen ved Aggersborg. Årbog for Vesthimmerlands Museum. 2009 s. 37-45.

Ælnod: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i Vikingetiden. Gyldendal 1979.
Saxo: Carl og Esben Harding Sørensen. Danmark i vikingetiden. Gyldendal 1980 s. 125.
Uddrag af den angelsaksiske krønike, i Vikingerne i England, udg. af The Anglo-Danish Viking Project 1981. http://danmarkshistorien.dk/leksikon-og-kilder/vis/materiale/den-angelsaksiske-kroenike-980-1066/?pdf=1&cHash=19dd57df7b965e51691373a3ff9f7e6a
Adam af Bremen om Sven Tveskægs oprør: Jørgen Bjernum. Kilder til vikingetidens historie. Gyldendal1965. s. 63-64

Widukinds Sachserkrønike: Kong Henriks Tog mod Chnuba. Hans Død 2. Juli 936. I.P Jacobsen. Kbh: 1910 s.60-61.
Tietmar af Merseburg. Om danernes "mark" ca. 975. Jørgen Bjernum. Kilder til vikingetidens historie. Gyldendal 1965 s. 51.
Thietmar af Merseburg: Om et dansk oprør 983. Jørgen Bjernum. Kilder til vikingetidens historie. Gyldendal 1965 s. 52
Bischofs Bernward von Hildesheim: Et hedensk tilbagefald ca. 1000.
Jørgen Bjernum. Kilder til vikingetidens historie. Gyldendal 1965 s. 68

3. Produktkrav
Eleverne afleverer en synopsis på max 4 sider (+evt. bilag)
Synopsis skal indeholde følgende punkter:
Problemformulering og hovedkonklusion
Problemstillinger og delkonklusioner

- a) Hvem byggede Trelleborgene ifølge historikerne og hvordan argumenterer man herfor?
- b) Hvorfor blev Trelleborgene bygget?
- c) Find selv på en ekstra, så der bliver 3 i alt.

Teori og metode integreret i øvrige dele.

ISBN 978 87 7066 499 8

L&R Uddannelse EGMONT

Appendiks 4. Ellipser – teori og konstruktion

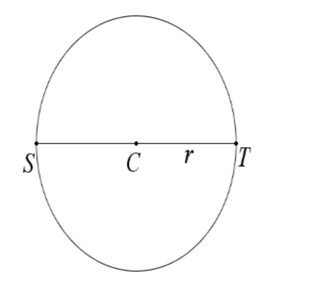
Dette afsnit rummer en introduktion til ellipsens teori og konstruktion. Dette emne kan også dækkes ved inddragelse af projekter om ellipsen fra B-bogens kapitel 0 og A-bogens kapitel 6.

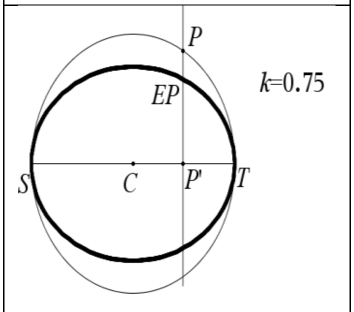
En ellipse kan beskrives som en fladtrykt cirkel

Vi har en cirkel med radius r og centrum i C.
Vi indfører en fladtrykningsfaktor $k \in]0;1]$, som angiver hvor meget en cirkel fladtrykkes omkring en diameter.

Fladtrykningen foregår på følgende måde:

- Gennem et vilkårligt punkt P på cirklen nedfældes normalen (den vinkelrette) på diameteren.
- Skæring mellem diameteren og normalen kaldes P' .
- Der konstrueres et nyt punkt, EP, som er $k \cdot |PP'|$.
- Dette gøres for alle punkter på cirklen og så har man sin ellipse.





Opgave: konstruktion
Konstruer nye ellipser ved at ændre på fladtrykningsfaktoren k. Derefter er det smarte trick at ”spore” punktet EP. Dette kan gøres på to måder, hvor den første er mere dynamisk end den anden:

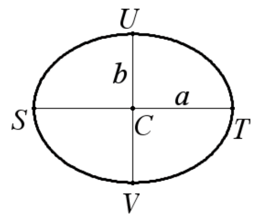
- Værktøj -> 3: Spor -> 1: Geometrisk spor. Hvorefter I trykker på EP og trækker i P (afhængig -> uafhængig).
- Værktøj -> 7: Konstruktion -> 6: Geometrisk sted. Hvorefter I I trykker på P og derefter på EP (uafhængig -> afhængig).

Halvdelen af ellipsen mangler ved denne konstruktion. Brug Q og EQ til at konstruere den sidste halvdel.

Centrum og halvakser

Ligesom i en cirkel, så er en diameter en linje som går gennem centrum og fra et punkt på periferien til et andet punkt på periferien.
Den største diameter kaldes storaksen (ST på tegningen). Og den mindste diameter kaldes lilleaksen (UV på tegningen).
Længden af storaksen er $2a$ og længden af lilleaksen er $2b$.
Storaksen og lilleaksen står vinkelret på hinanden.
Storaksen og lilleaksen kaldes ellipsens symmetriakser.
Cirklen med centrum i C og storaksen som diameter (dvs. radius er a) kaldes for ellipsens omskrevne cirkel - den ses ovenfor ved konstruktionsbilledet af ellipsen.
Fladtrykningsfaktoren er forholdet mellem lilleaksen og storaksen, dvs.

$$k = \frac{b}{a}.$$



ISBN 978 87 7066 499 8

Areal

Arealet af den omskrevne cirkel er $A_{cirkel} = \pi \cdot a^2$.
Da ellipsen er fladtrykt med faktoren $k = \frac{b}{a}$, så reduceres arealet med samme faktor, så ellipsens areal er:
$A_{ellipse} = k \cdot A_{cirkel} = \frac{b}{a} \cdot \pi \cdot a^2 = \pi \cdot a \cdot b$.

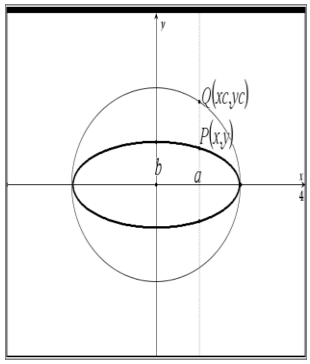
Ellipsens ligning

Hvis ellipsen lægges ind i et koordinatsystem således at ellipsens centrum er i Origo og ellipsens akser følger koordinatsystemets akser, så kan man udlede ellipsens ligning.

Opgave: udled ellipsens ligning

Vi ved, at den omskrevne cirkel har ligningen $x_c^2 + y_c^2 = a^2$, hvor (x_c, y_c) er koordinaterne til et vilkårligt punkt Q på cirklen.
Ved en fladtrykning føres Q over i P på ellipsen. P har koordinaterne (x, y).

- Opskriv et udtryk for x ved x_c
- Opskriv et udtryk for y ved y_c (husk formlen for fladtrykningsfaktoren)
- Isoler y_c i dit udtryk for y.
- Indsæt dine udtryk for x_c og y_c (ved hhv. x og y) i cirklens ligning.
- Reducer ligning, så der står 1 på den ene side af lighedstegnet

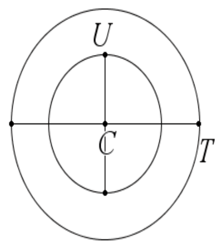


Konstruktion ud fra centrum og halvakser

Der tages udgangspunkt i centrum C og punkterne T og U hørende til halvakserne.

Trin 1

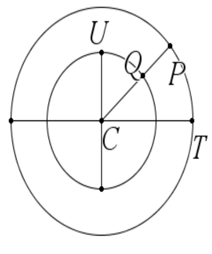
Vi konstruerer to cirkler med centrum i C og radier på hhv. a og b - sådanne cirkler med samme centrum kaldes *koncentriske*.
Disse cirkler er hhv. den omskrevne og den indskrevne cirkel for ellipsen.
Forholdet mellem de to radier er $\frac{b}{a} = k$ (fladtrykningsfaktoren).



Trin 2

Der vælges et punkt P på den omskrevne cirkel. Linjestykket CP tegnes.

Skæring mellem den indskrevne cirkel og CP kaldes Q.



Opgave

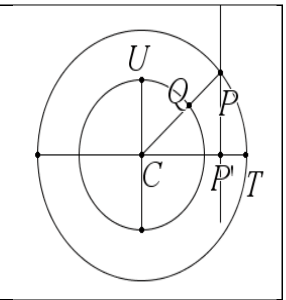
Forklar hvorfor der gælder: $|CQ| = k \cdot |CP|$?

ISBN 978 87 7066 499 8

Trin 3

Normalen (den vinkelrette) til CT gennem P konstrueres.

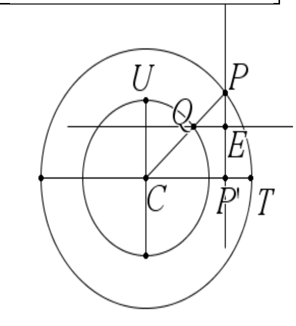
Skæringspunktet mellem normalen og CT kaldes P'.



Trin 4

En linje parallel med CT gennem Q konstrueres. Skæringspunktet mellem denne linje og PP' kaldes E.

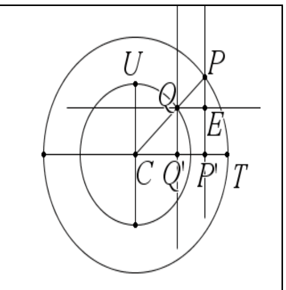
Da E opfylder, at det deler PP' i forholdet $k = \frac{b}{a}$, så ligger E på ellipsen.



Opgave

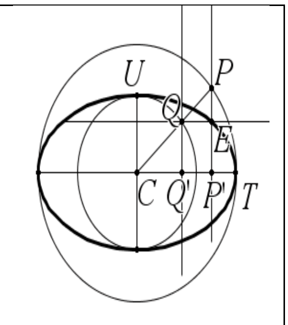
Forklar hvorfor PP' bliver delt af E i forholdet $\frac{b}{a}$?

(*Hint*: Betragt de ensvinklede trekanter CQQ' og CPP' for at argumentere for dette - Q' er konstrueret så $\angle CQ'Q$ er ret)



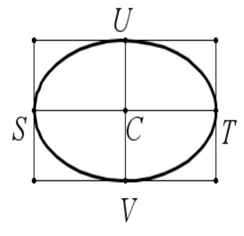
Trin 5:

Ellipsen konstrueres ved at konstruere *det geometriske sted* defineret af P og E (i denne rækkefølge):
Værktøj -> 7: Konstruktion -> 6: Geometrisk sted.



Opgave. Konstruktion af ellipser
Konstruer et par ellipser med forskellige værdier af a og b.

Det omskrevne rektangel
Det omskrevne rektangel er et rektangel, hvis sider tangerer ellipsen i hhv. S, T, U og V.
Det omskrevne rektangel er også konstrueret i det vedlagte Nspire-dokument.



ISBN 978 87 7066 499 8

Brændpunkter og brændstråler

Hvis man konstruerer cirklen med den øverste (eller nederste) side i det omskrevne rektangel som diameter, og centrum i *U* (eller i *V*) så skærer denne cirkel storaksen to steder.
Disse to punkter F_1 og F_2 kaldes ellipsens *brændpunkter*.
Brændpunkterne har en række egenskaber. Nedenfor undersøges en af dem: Denne egenskab angiver en god metode til at konstruere en ellipse vha. to pinde, en snor og en blyant.
En linje fra et brændpunkt ud til ellipsen kaldes en *brændstråle*

Opgave. Brændstrålernes længder - en eksperimentel undersøgelse

- Konstruer en ellipse med en lilleakse på $2b$ og en storakse på $2a$ i Nspire (du vælger selv størrelsen på a og b).
- Konstruer også brændpunkterne F_1 og F_2.
- Konstruer et punkt P på ellipsen.
- Konstruer linjerne mellem P og hhv F_1 og F_2. Disse linjer F_1P og F_2P kaldes brændstrålerne.
- Mål længden af brændstrålerne.
- Varier P og undersøg, hvad der sker med længden af brændstrålerne. Kan I finde en sammenhæng mellem længderne af brændstrålerne og en af akserne i ellipsen?

Formuler denne egenskab du har fundet frem til som en sætning.

Excentriciteten

Excentriciteten e er et mål for, hvor meget ellipsen afviger fra en cirkel. Excentriciteten er defineret som forholdet mellem afstanden mellem de to brændpunkter og længden af storaksen: $e = \frac{|F_1F_2|}{2a}$.

Opgave. Excentricitetens talværdier

- hvilke værdier kan e antage?
- hvilket tal er e tæt på, hvis ellipsen afviger lidt fra en cirkel (lille fladtrykningsfaktor)?
- hvilket tal er e tæt på, hvis ellipsen afviger meget fra en cirkel (stor fladtrykningsfaktor)?
- hvad er e, hvis der er tale om en cirkel?

Opgave

Brændpunkterne ligger lige langt fra ellipsens centrum C. Forklar, hvorfor vi kan beregne e på følgende måde: $e = \frac{|CF|}{a}$, hvor $|CF|$ er afstanden fra centrum til en af brændstrålerne?
Hvis vi omformer denne formel for e, så får vi et udtryk for afstanden fra centrum til et brændpunkt:
$|CF| = a \cdot e$

Excentriciteten og ellipsens ligning

ISBN 978 87 7066 499 8

L&R Uddannelse EGMONT

Når man kender excentriciteten, så kan man opstille et nyt udtryk for ellipsens ligning, hvor i a og e indgår i stedet for a og b.
Ud fra definitionen af brændpunkter får vi, at $|UF_2| = a$
Vha. Pythagoras i trekant UCF_2 får vi:

$a^2 = b^2 + (a \cdot e)^2$ Omskriv nu dette:

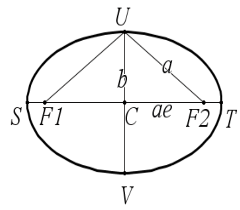
$a^2 = b^2 + a^2 \cdot e^2$

$\Updownarrow$

$a^2 - a^2 \cdot e^2 = b^2$

$\Updownarrow$

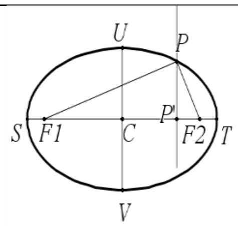
$a^2 \cdot (1 - e^2) = b^2$
Dette indsættes i ellipsens ligning:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} = 1$



Opgave
Forklar udregningerne ovenfor.

Opgave: Bevis sætningen om summen af brændstrålerne

På tegningen er der konstrueret et vilkårligt punkt P på ellipsen.
Brug denne tegning til at bevise, at der for et vilkårligt punkt på ellipsen gælder, at summen af afstandene fra punktet til brændpunkterne er lig med længden af storaksen, dvs. at summen af brændstrålerne er længden af storaksen, dvs. at $|PF_1| + |PF_2| = 2a$:



Gangen i beviset

1) Lad P have koordinaterne (x, y).
2) Overvej, hvad koordinaterne til F_1 og F_2 er (I får brug for afstanden fra centrum til et brændpunkt udtrykt ved excentriciteten).
3) Brug Pythagoras i trekant F_1PP' til at opskrive et udtryk for $|PF_1|$.
4) Reducer dette udtryk, så I får $|PF_1|$ udtrykt ved bl.a. a og e, nemlig $|PF_1| = a + e \cdot x$
5) Som hjælp til dette skal I lave nye udtryk for de to andre sidelængder i trekanten:
6) $|PP'| = y$, da…
7) $|PP'|^2 = y^2 = \cdots$, isoler y^2 i den nye version af ellipsens ligning ovenfor.
8) $|F_1P'| = a \cdot e + x$, da…
9) Brug Pythagoras i trekant F_2PP' til at opskrive et udtryk for $|PF_2|$.
10) Reducer dette udtryk, så I får $|PF_2|$ udtrykt ved bl.a. a og e, nemlig $|PF_2| = a - e \cdot x$
11) Som hjælp til dette skal I lave nye udtryk for de to andre sidelængder i trekanten:
12) $|PP'|$ bør I allerede have styr på.
13) $|F_2P'| = a \cdot e - x$, da…
14) Beregn vha. disse udtryk summen af brændstrålerne: $|PF_1| + |PF_2|$.

ISBN 978 87 7066 499 8

Det modsatte gælder også

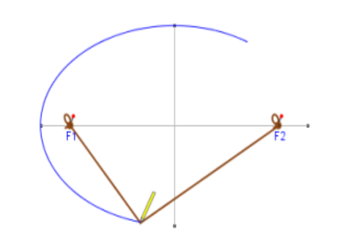
Hvis et punkt P opfylder, at summen af afstandene fra punktet til brændpunkterne er lig med længden af storaksen, så ligger P på ellipsen. At summen af afstandene fra punktet til brændpunkterne er lig med længden af storaksen kan også formuleres som, at summen af brændpunktsafstandene er lig med længden af storaksen, dvs. $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.
Dermed kan være sikre på, at der ikke ligger punkter udenfor ellipsen, som opfylder, at summen af deres afstand til brændpunkterne er længden af storaksen.
Vi springer beviset for denne påstand over her

Sætning. Karakteristik af ellipsen

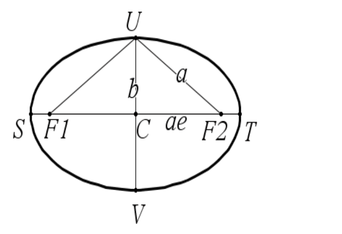
Punkter på ellipsen er netop de punkter, der opfylder, at summen af afstandene ind til to givne punkter er konstant. Dvs. $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, hvor P betegner et punkt på ellipsen og F_1 og F_2 er de to givne punkter.

Tegning af en ellipse

Dette kan bruges til at tegne en ellipse vha. to pinde og en snor og en blyant… De to pinde repræsenterer brændpunkterne. Snorens længde er længden af storaksen. Ellipsen tegnes som illustreret på tegningen.
Hvis I ønsker at tegne en ellipse med en bestemt storakse og lilleakse, så skal I først beregne excentriciteten for at kunne placere pindene med den korrekte afstand: $2ae$.



Excentriciteten kan beregnes ved formlen $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ som følger af anvendelse af Pythagoras i trekant CUF_2 på figuren til venstre kombineret med ligningsløsningsregler. $|UF_1| = |UF_2| = a$ følger af, at U ligger lige langt fra brændpunkterne, og at summen af brændstrålerne er $2a$.



Opgave: bevis

Bevis ovennævnte formel for excentriciteten vha. fremgangsmåden, som også er skitseret ovenfor.

Ellipse-tegning i Nspire:

Hvis I får brug for at konstruere en ellipse ovenpå et billede eller lignende, så er der to indbyggede muligheder i Geometri-applikationen:

- Værktøj -> 5: Figurer -> 6 Ellipse. Her skal brændpunkterne i princippet være kendte.
- Værktøj -> 5: Figurer -> 9: Keglesnit. Her skal fem punkter på ellipsen afmærkes.

De samme muligheder findes i Graf-applikationen (hvis I skulle få brug for ellipsen i et koordinatsystem):

- Værktøj -> 8: Geometri -> 2: Figurer -> 6 Ellipse. Her skal brændpunkterne i princippet være kendte.
- Værktøj -> 8: Geometri -> 2: Figurer -> 9: Keglesnit. Her skal fem punkter på ellipsen afmærkes.