ISBN 978-87-7066-497-4

Projekt 5.6 Lineær algebra – moderne og klassisk kinesisk

De fire elementers kostbare spejl

"Som bekendt anses matematikken for at være en meget vigtig videnskab. Denne bog om matematik vil derfor være af stor nytte for alle folkeslag. Kendskabet til hvordan man foretager undersøgelser, udviklingen af tankekraft, den rette måde at styre et kongedømme på eller endda at herske over hele verden, kan opnås af den, som er i stand til at drage lære af denne bog. Bør så ikke de, som ønsker at være lærde, tage den til sig og studere den med stor omhyggelighed?"

(Zhu Shijie: *Fra forordet til De fire elementers kostbare spejl*, 1303)

Indhold

Indledning: 1
Om løsning af lineære ligninger: ref og rref-metoden 2
Lige store koefficienters metode 2
Escehlon-omformningen: ref og rref-metoderne 3
Ligningsløsning med CAS 7
Hvad sker der når ligningssystemet bryder sammen? 8
Flere ligninger med flere ubekendte: Kineserier 10

Indledning:

Løsning af *lineære* ligningssystemer blev som fortalt i A-bogen, kapitel 9, først for alvor sat i system i vesten af Gauss med grundlæggelsen af den lineære algebra. Men algoritmerne har været kendt meget længe før Gauss, hvad han selvfølgelig godt vidste. Den kultur, der kom længst med løsning af lineære ligningssystemer var den kinesiske: De udviklede de samme metoder som Gauss mange hundrede år før Gauss. Men de havde selvfølgelig ikke den symbolske notation til rådighed, så de opfandt ikke den lineære algebra i moderne forstand. Men de udviklede alle de afgørende algoritmer, idet de indså at det alene er koefficienterne til de ubekendte, der er afgørende, og at man derfor kunne repræsentere et lineært ligningssystem ved et talskema, i moderne sprogbrug: en koefficientmatrix. Og ved at udføre simple systematiske såkaldt lineære regneoperationer på disse talskemaer, kunne det omformes til en form, hvor man direkte kan aflæse løsningen, eller afgøre om der slet ingen eller uendeligt mange løsninger. Alt sammen skete ved håndregning på bambuspinde, så i praksis holdt kineserne sig til at kigge på lineære ligningssystemer med højst fem ubekendte!

Den kinesiske metode er også en af de metoder, der er implementeret i CAS-programmer, når de skal løse lineære ligningssystemer, hvad enten man bruger den generelle solve-kommando, eller en passende lineær variant specielt tilpasset de lineære ligningssystemer. Så projektet giver også et sjældent kik ind i maskinrummet, hvor vi for en gangs skyld kan se hvad det egentlig er, der foregår når solve-kommandoen let og elegant løser et stort lineært ligningssystem.

Så i dette projekt lærer du ikke blot om de grundlæggende algoritmer til løsning af lineære ligningssystemer. Du lærer også om lidt om historien bag nogle af de grundlæggende teknikker inden for den moderne lineære algebra.

ISBN 978-87-7066-497-4

L&R Uddannelse EGMONT

Om løsning af lineære ligninger: ref og rref-metoden

Vi vil nu se på ligningssystemer bestående af flere ligninger med flere ubekendte. Men vi vil kun se på *lineære* ligningssystemer, dvs. de må kun indeholde de ubekendte i førstegrads-udtryk. De må altså kun være bygget op af de simple regneoperationer, og den ubekendte må ikke være f*x* kvadreret, ligesom vi ikke må dividere med den ubekendte. Den mest almindelige form for to ligninger med to ubekendte ser derfor således ud:

$$a\cdot x+b\cdot y=e$$
$$c\cdot x+d\cdot y=f$$

Lige store koefficienters metode

Vi varmer op med et meget simpelt eksempel

Eksempel 1:

(1) $x+y=5$

(2) $x-y=1$

Her kan ligningssystemet nemt løses ved først at lægge ligningerne sammen, hvorved vi finder

(11) $2\cdot x=6\Leftrightarrow x=3$

og derefter trækker dem fra hinanden, hvorved vi finder

(21) $2\cdot y=4\Leftrightarrow y=2$

Her har vi brugt den følgende notation: (11) er den første omskrivning af ligning 1, (12) den anden omskrivning af ligning 2 osv. Tilsvarende er (21) den første omskrivning af ligning 2, (22) den anden omskrivning af ligning 2 osv.

Spørgsmålet er så, om vi derved har løst ligningssystemet fuldstændigt, dvs. om ligningssystemet bestående af ligningerne (1, 2) er *ækvivalent* med ligningssystemet bestående af ligningerne (11, 21)? Det er umiddelbart klart, at enhver løsning til ligningssystemet (1, 2) også er en løsning til ligningssystemet (11, 21). Men gælder det omvendte også? Hertil bemærker vi at ligningssystemet (11, 21) er fremkommet ved omformningerne:

$$(11)=(1)+(2)$$
$$(21)=(1)-(2)$$

Men heraf følger jo så omvendt, at der gælder

$$(1)=½\cdot\left((11)+(21)\right)$$
$$(2)=½\cdot\left((11)-(21)\right)$$

De to ligningssystemer er altså ækvivalente!

$$\begin{array}{lll} (1)\quad x+y=5 & & (11)\quad 2\cdot x=6 & & (12)\quad x=3 \\ & \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow & \\ (2)\quad x-y=1 & & (21)\quad 2\cdot y=4 & & (22)\quad y=2 \end{array}$$

.

Øvelse 1:

ISBN 978-87-7066-497-4

a) Prøv nu selv kræfter med ligningssystemet: $\begin{matrix} x+y=8 \\ x-y=-2 \end{matrix}$

Så vil vi prøve at diskutere lineære ligninger lidt mere alment. Vi vil benytte en metode, der hedder *lige store koefficienters metode*, som tillader os at løse vilkårlige ligningssystemer systematisk ved reduktion. Den findes i to varianter:

- En simpel, hvor man omformer ligningssystemet til en form, hvoraf løsningerne fremgår ved *substitution*.
- En lidt mere kompliceret variant, hvor man omformer ligningssystemet til en form, hvoraf løsningerne fremgår umiddelbart.

Escehlon-omformningen: ref og rref-metoderne

Strategien har i begge tilfælde fået navn efter et militært udtryk: en eschelon. Det kan minde om fx en bataljon. Det handler om at stille en række soldater op i en bestemt formation. Hertil skal vi forestille os at soldaterne står på række med en fløjmand ud for hver række. Ved en almindelig eschelon trækker man nu hele rækken skråt ud, så man kan se fløjmanden:

$$\begin{matrix} \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\quad\; \\ \;\;\times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\;\; \\ \quad\;\times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \end{matrix}$$

Ved en reduceret eschelon trækker man *kun* fløjmændene skråt ud, så man kan se dem *tydeligt*:

$$\begin{matrix} \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \times\quad\;\;\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \;\;\times\;\;\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \\ \quad\;\times\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge \end{matrix}$$

I forbindelse med lineære ligninger, skal man tænke på de ubekendte som fløjmændene, og konstanterne og parametrene som de menige soldater.

Eksempel 2: Løs ligningssystemet

$$\begin{matrix} (1) & x+y=5 \\ (2) & x-y=1 \end{matrix}$$

Når vi skal løse ligningssystemet trækker vi derfor først ligningerne fra hinanden, hvorved vi fjerner x fra den nederste ligning, dvs. vi erstatter (2) med differensligningen (1) – (2):

$$\begin{matrix} (1) & x+\;y=5 \\ (21)=(1)-(2) & 2y=4 \end{matrix}$$

Vi har nu fået trukket x ud som fløjmand, og har derfor fået lavet en *almindelig eschelon*. Den kan man umiddelbart bruge til at løse ligningen, idet man først finder y fra ligningen (21):

$$\begin{matrix} (1) & x+y=5 \\ (22)=(21)/2 & y=2 \end{matrix}$$

ISBN 978-87-7066-497-4

Derefter indsætter vi den fundne værdi for *y* i ligningen (1) og løser denne. Men vi kan også fjerne *y* fra den øverste ligning ved at trække ligningen (22) fra ligningen (1), hvorved vi finder:

$$\begin{array}{ll} (11)=(1)-(22) & x \quad\;\; =3 \\ (22) & \quad\;\; y=2 \end{array}$$

Denne gang har vi trukket begge fløjmændene fri, så de står alene, og dermed fået en *reduceret eschelon*!

Når vi nu skal gøre det samme på computeren bemærker vi, at de lineære udregninger er meget simple og kun virker på koefficienterne. Det er derfor nok at oversætte ligningssystemet til en *koefficientmatrix*:

$$\begin{array}{lll} (1) & x+y=5 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ (2) & x-y=1 & \\ & & \;\; x \quad y \quad \text{konstanter} \end{array}$$

Vi regner så løs direkte på koefficientmatricen, men det er præcis de samme udregninger som før!

$$\begin{array}{ll} (1) & \\ (2) & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Først trækkes de to rækker fra hinanden, og vi erstatter den anden række med differensrækken:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (21)=(1)-(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Så divideres den anden række med 2:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (22)=(21)/2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Derved har vi opnået at få opstillet den *almindelige række-eschelon*, hvor fløjmanden er trukket klart ud. Vi fortsætter så med at trække den øverste række fra den nederste, og vi erstatter den første række med differensrækken:

$$\begin{array}{l} (11)=(22)-(1) \\ (22) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi opnået at frembringe den *reducerede række eschelon*, hvor det fløjmændene er skilt fuldstændigt ud. Og når vi så oversætter det tilbage til ligningssystemet, idet første søjle er knyttet til *x*, anden søjle til *y* og tredje søjle til konstanterne fås netop:

$$\begin{array}{l} (11) \\ (22) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 1x+0y=3 \\ 0x+1y=2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \quad\;\; =3 \\ \quad\;\; y=2 \end{array}$$

Øvelse 2:

a) Hvilket ligningssystem varer til koefficientmatricen $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$?

ISBN 978-87-7066-497-4

Øvelse 3:
Dit CAS-værktøj rummer formentlig kommandoer til at udføre rækkeoperationerne på koefficientmatricen. I TI-Nspire CAS finder du sådanne kommandoer under Matricer i oversigten over Matematiske operatorer:

a) Find ud af hvordan kommandoerne virker, og hvordan de kan bruges til at omforme det ovenstående ligningssystem fra eksempel 2 med koefficientmatricen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det er dette princip computeren bruger til at løse 2 ligninger med to ubekendte! Men før vi ser nærmere på det, vil vi se på et lidt mere kompliceret eksempel:

Eksempel 3: Lad os tænke os at vi skal løse ligningssystemet

(1) $\quad 2\cdot x+3\cdot y=3$

(2) $\quad 3\cdot x-4\cdot y=5$

Vi starter da, med at udnævne den første ligning til at være den ligning, der skal indeholde den første ubekendte x. Vi skal så have elimineret x fra den anden ligning. Det sker ved hjælp af *lige store koefficienters metode*, idet vi udfører *mellemregningen*:

$$(11)=3\cdot(1) \qquad 6\cdot x+9\cdot y=9$$
$$(21)=2\cdot(2) \qquad 6\cdot x-8\cdot y=10$$

Ved subtraktion finder vi da den omformede ligning:

$$(22)=3\cdot(1)-2\cdot(2) \qquad 17\cdot y=-1$$

ISBN 978-87-7066-497-4

På nuværende tidspunkt har vi derfor omformet det oprindelige ligningssystem (1, 2) til følgende dermed *ækvivalente* ligningssystem:

$$\begin{array}{ll} (1) & 2\cdot x+3\cdot y=3 \\ (22) & 17\cdot y=-1 \end{array}$$

De er ækvivalente, fordi ligningssystemet (1, 22) kan omformes *tilbage* til ligningssystemet (1, 2). Det følger umiddelbart af omskrivningerne:

$$(1)=(1)$$
$$(2)=\left(3\cdot(1)-(22)\right)/2$$

Dermed har vi gennemført den delvise reduktion til en almindelig rækkeeschelon! Af den sidste ligning følger umiddelbart, at værdien af y selvfølgelig er givet ved $y = -1/17$. Og ved at sætte denne værdi ind i den første ligning fås en førstegradsligning, der umiddelbart kan løses med hensyn til x. I princippet er vi derfor færdige.

Hvis vi vil gennemføre en fuldstændig reduktion kræver det, at også ligning (1) omformes, så den kun indeholder én ubekendt/fløjmand, nemlig x. Det sker igen ved hjælp af lige store koefficienters metode, idet vi udfører *mellemregningen*:

$$\begin{array}{ll} (12)=17\cdot(1) & 34\cdot x+51\cdot y=51 \\ (23)=3\cdot(22) & 51\cdot y=-3 \end{array}$$

Ved subtraktion finder vi da den omformede ligning:

$$(13)=17\cdot(1)-3\cdot(22) \qquad 34\cdot x=54$$

På nuværende tidspunkt har vi derfor omformet det oprindelige ligningssystem (1,2) til følgende dermed *ækvivalente* ligningssystem:

$$\begin{array}{ll} (13) & 34\cdot x=54 \\ (23) & 17\cdot y=-1 \end{array}$$

De er ækvivalente, fordi ligningssystemet (13,23) kan omformes *tilbage* til ligningssystemet (1,22). Det følger umiddelbart af omskrivningen

$$(1)=\left((13)+3\cdot(22)\right)/17$$
$$(22)=(22)$$

Dermed har vi gennemført den fuldstændige reduktion til en række- eschelon! Vi kan nu umiddelbart aflæse løsningerne til ligningssystemet:

$$\begin{array}{l} x=\dfrac{27}{17} \\ y=\dfrac{-1}{17} \end{array}.$$

ISBN 978-87-7066-497-4

Øvelse 4:

a) Løs nu selv ligningssystemet med koefficient-matricen: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) Hvis du har fundet ud af hvordan rækkeoperationerne i dit CAS-værktøj virker, så brug dem til at omforme koefficientmatricen.

Ligningsløsning med CAS

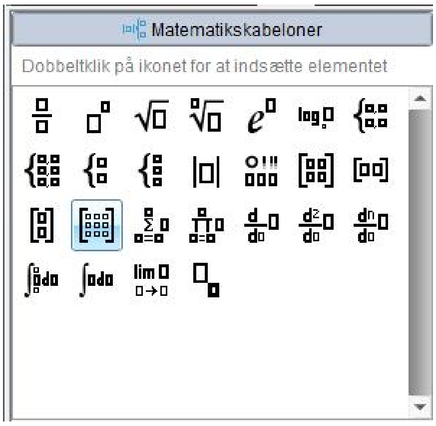
Så er det på tide, vi får computeren bragt i spil! Som eksempel benytter vi igen ligningssystemet:

$$\begin{array}{ll} (1) & 2\cdot x+3\cdot y=3 \\ (2) & 3\cdot x-4\cdot y=5 \end{array}$$

Først skal vi have indskrevet koefficientmatricen

$$\begin{array}{ll} (1) & \\ (2) & \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Den indeholder 2 rækker og 3 søjler. I TI-Nspire CAS findes en matrix-skabelon:



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Når vi først har indskrevet koefficientmatricen, skal vi have den reduceret til række-eschelon formen. Det gør vi ved hjælp af kommandoen

rref = reduced row eschelon form, dvs. reduceret række eschelon form

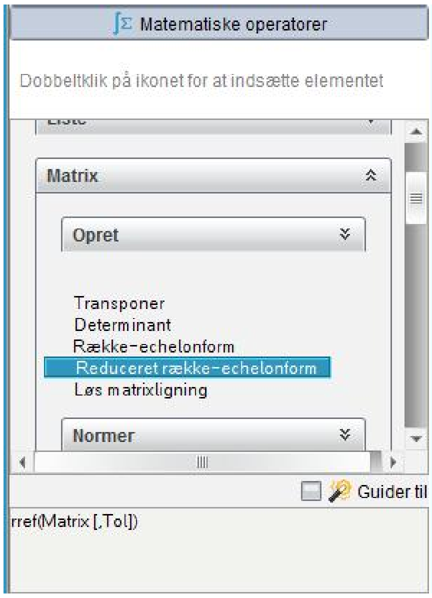
der ikke må forveksles med den korte udgave

ref = row eschelon form, dvs. række eschelon form

ISBN 978-87-7066-497-4

Vi henter rref-kommandoen i kataloget over Matematiske operatorer i Matrix-menuen, dvs. gør klar til at udføre en *reduceret række eschelon form*:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{27}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$



Herved finder vi netop løsningerne til ligningssystemet, dvs.

$$\begin{aligned} 1x + 0y &= 27/17 \qquad & x &= 27/17 \\ 0x + 1y &= -1/17 \qquad & y &= -1/17 \end{aligned}$$

Bemærkning: Hvis vi kun havde brugt *almindelig række eschelon form*, dvs. ref kommandoen, havde vi i stedet fået:

$$\operatorname{ref}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$

og dermed havde vi kun fået omskrevet ligningssystemet på formen:

$$\begin{aligned} 1\cdot x - \frac{4}{3}\cdot y &= \frac{5}{3} \\ 0\cdot x + \ 1\cdot y &= \frac{-1}{17} \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{-1}{17} = \frac{27}{17} \\ y &= \frac{-1}{17} \end{aligned}$$

Så det giver en del ekstra oprydning, hvis man nøjes med ref-kommandoen!

Øvelse 5:

b) Benyt rref-kommandoen i dit CAS-værktøj til at reducere koefficient-matricen: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) Forklar hvilket ligningssystem, denne koefficientmatrix svarer til og hvilke løsninger ligningssystemet har.

Hvad sker der når ligningssystemet bryder sammen?

Desværre er det ikke altid ligningssystemet har en enkelt pæn løsning. Det kan fx være, at de to ligninger i virkeligheden er identiske. Se fx på ligningssystemet

ISBN 978-87-7066-497-4

(1) $2\cdot x-3\cdot y=-5$
(2) $-4\cdot x+6\cdot y=10$

Måske lægger vi ikke mærke til, at ligning (2) i virkeligheden blot er ligning (1) ganget med –2:

$$(2)=-2\cdot(1)$$

Men det betyder jo, at de har præcis de samme løsninger. Enhver løsning til (1) er derfor også en løsning til (2) (og omvendt), men da ligning (1) har uendeligt mange løsninger gælder det selvfølgelig også for hele ligningssystemet! Hvis vi forsøger at løse ligningssystemet med lige store koefficienters metode, kan vi f*x* gange ligning (1) med 2 og derefter lægge ligningerne sammen, hvorved vi finder

$$0=0$$

Det oprindelige ligningssystem er derfor ækvivalent med ligningssystemet:

(1) $2\cdot x-3\cdot y=-5$
(21) $0=0$

Men hvad betyder det? Jo, den anden ligning er jo *altid* opfyldt! Og dermed er den overflødig. Ligningssystemet er derfor i virkeligheden ækvivalent med den første ligning i sig selv, og dermed har ligningssystemet *uendelig mange løsninger*. Prøver vi at løse ligningssystemet på computeren finder vi da også:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -4 & 6 & 10\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Altså er ligningssystemet ækvivalent med

(11) $x-\frac{3}{2}\cdot y=\frac{-5}{2}$
(21) $0=0$

Det viser netop, at den anden ligning er overflødig, og at den første ligning kan omskrives på formen

$$x-\frac{3}{2}\cdot y=\frac{-5}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\cdot y-\frac{5}{2}$$

Der er altså uendelig mange løsninger, og ved at sætte *y*-værdier ind i den ovenstående ligning kan vi finde de tilhørende *x*-værdier. Hvis vi kun er interesserede i positive heltallige løsninger, kan vi specielt nøjes med at indsætte ulige værdier for *y*:

$$y=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{5}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad \text{(duer ikke!)}$$
$$y=3 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}\cdot 3-\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$y=5 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{5}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$y=7 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{2}\cdot 7-\frac{5}{2}=\frac{16}{2}=8 \quad \text{(osv.)}$$

ISBN 978-87-7066-497-4

Det kan også ske, at ligningssystemet slet ikke har nogen løsning. Se f*x* på ligningssystemet

$$\begin{array}{ll} (1) & 2\cdot x-3\cdot y=5 \\ (2) & -4\cdot x+6\cdot y=10 \end{array}$$

hvor vi har ændret fortegnet på højresiden for den første ligning! Hvis vi igen forsøger at løse ligningssystemet med lige store koefficienters metode, kan vi f*x* gange ligning (1) med 2 og derefter lægge ligningerne sammen, hvorved vi finder

$$0=15$$

Det oprindelige ligningssystem er derfor ækvivalent med ligningssystemet:

$$\begin{array}{ll} (1) & 2\cdot x-3\cdot y=5 \\ (21) & 0=15 \end{array}$$

Men hvad betyder det? Jo, den anden ligning er jo *aldrig* opfyldt! Og dermed ødelægger den muligheden for at finde løsninger totalt! Dermed har ligningssystemet ingen løsninger. Prøver vi at løse ligningssystemet på computeren finder vi da også:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Altså er ligningssystemet ækvivalent med

$$\begin{array}{ll} (11) & x-\frac{3}{2}\cdot y=0 \\ (21) & 0=1 \end{array}$$

Det er den anden ligning, som er afgørende! Den er umulig at løse, og det viser netop, at ligningssystemet ingen løsninger har.

Øvelse 6:

a) Giv selv eksempler på ligningssystemer med 2 ubekendte, der enten ingen løsninger har, eller uendeligt mange løsninger har.

Flere ligninger med flere ubekendte: Kineserier

Metoden med at løse lineære ligninger ved hjælp af simple regneoperationer på koefficientmatricen, og derved reducere den til en almindelig eschelon form går tilbage til kineserne for mindst 2000 år siden. Så det er gammelt arvegods.

ISBN 978-87-7066-497-4

Eksempel 4: Kineserne løser fx ligningssystemet:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 3\cdot x+2\cdot y+z & = & 39 \\
(2) & 2\cdot x+3\cdot y+z & = & 34 \\
(3) & x+2\cdot y+3\cdot z & = & 26
\end{array}
$$

Vi vil løse det ved en fuldstændig reduktion til en række-eschelon! Ved at bruge lige store koefficienters metode på ligning (1) og (2) kan vi fjerne *x* fra ligning (2):

$$
\begin{array}{ll}
2\cdot(1) & 6\cdot x+4\cdot y+2\cdot z=78 \\
3\cdot(2) & 6\cdot x+9\cdot y+3\cdot z=102 \\
\hline
(3)\cdot(2)-2\cdot(1) & \qquad 5\cdot y+z=24
\end{array}
$$

Ved tilsvarende at bruge lige store koefficienters metode på (1) og (3) kan vi fjerne *x* fra ligning (3):

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 3\cdot x+2\cdot y+z=39 \\
 & \\
3\cdot(3) & 3\cdot x+6\cdot y+9\cdot z=78 \\
\hline
3\cdot(3)-(1) & \qquad 4\cdot y+8\cdot z=39
\end{array}
$$

Vi har derved fået omformet ligningssystemet til formen:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 3\cdot x+2\cdot y+z & = & 39 \\
(21) & 5\cdot y+z & = & 24 \\
(31) & 4\cdot y+8\cdot z & = & 39
\end{array}
$$

Dermed er den første fløjmand trukket fri! Så anvender vi lige store koefficienters metode på de to sidste ligninger for at fjerne *y* fra den sidste ligning:

$$
\begin{array}{ll}
4\cdot(21) & 20\cdot y+4\cdot z=96 \\
5\cdot(31) & 10\cdot y+40\cdot z=195 \\
\hline
5\cdot(31)-4\cdot(21) & \qquad 36\cdot z=99
\end{array}
$$

Dermed er det oprindelige ligningssystem omformet til det ækvivalente ligningssystem:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & 3\cdot x+2\cdot y+z & = & 39 \\
(21) & 5\cdot y+z & = & 24 \\
(32) & 36\cdot z & = & 99
\end{array}
$$

Her stopper kineserne så omformningen, idet de bemærker, at vi nu kan finde *z* af den sidste ligning. Deref-ter sættes den fundne værdi af *z* ind i den foregående, som vi så bruger til at finde *y*. Endelig sættes de fundne værdier af *z* og *y* ind i den første ligning, som så bruges til at finde *x*. I princippet har vi derfor løst det oprindelige ligningssystem.

Men vi vil føre omskrivningen helt igennem til en reduceret række-eschelon! Først vil vi dog forkorte den sidste ligning med 9, for at få mindre og dermed pænere tal at arbejde med!

ISBN 978-87-7066-497-4

$$\begin{array}{ll} (1) & 3\cdot x+2\cdot y+\ \ z=39 \\ (21) & \qquad 5\cdot y+\ \ z=24 \\ (33) & \qquad\qquad 4\cdot z=11 \end{array}$$

Vi benytter derefter lige store koefficienters metode på de to sidste ligninger til at fjerne *z* fra den anden ligning.

$$\begin{array}{lll} 4\cdot(21) & 20\cdot y+4\cdot z & =96 \\ (33) & \qquad 4\cdot z & =11 \\ \hline 4\cdot(21)-(33) & 20\cdot y & =85 \\ \Leftrightarrow & 4\cdot y & =17 \end{array}$$

Dermed er ligningssystemet omformet til formen:

$$\begin{array}{ll} (1) & 3\cdot x+2\cdot y+\ \ z=39 \\ (22) & \qquad 4\cdot y \qquad =17 \\ (33) & \qquad\qquad 4\cdot z=11 \end{array}$$

Så mangler vi kun at fjerne *y* og *z* fra den første ligning. Først fjerner vi *z* ved hjælp af lige store koefficienters metode anvendt på den første og tredje ligning:

$$\begin{array}{lll} 4\cdot(1) & 12\cdot x+8\cdot y+4\cdot z & =156 \\ (33) & \qquad\qquad 4\cdot z & =\ 11 \\ \hline 4\cdot(1)-(33) & 12\cdot x+8\cdot y & =145 \end{array}$$

dvs. ligningssystemet er nu bragt på formen:

$$\begin{array}{ll} (12) & 12\cdot x+8\cdot y \qquad =145 \\ (22) & \qquad 4\cdot y \qquad =\ 17 \\ (33) & \qquad\qquad 4\cdot z=\ 11 \end{array}$$

Så fjerner vi *y* fra den øverste ligning ved at anvende lige store koefficienters metode på den første og anden ligning:

$$\begin{array}{lll} (12) & 12\cdot x+8\cdot y+ & =145 \\ 2\cdot(22) & \qquad 8\cdot y+ & =\ 34 \\ \hline (12)-2\cdot(22) & 12\cdot x & =111 \\ \Leftrightarrow & 4\cdot x & =\ 37 \end{array}$$

Og så er vi endelig igennem!! Ved hjælp af lige store koefficienters metode har vi omformet det oprindelige ligningssystem til formen:

$$\begin{array}{ll} (13) & 4\cdot x \qquad\qquad =37 \\ (22) & \qquad 4\cdot y \qquad =17 \\ (33) & \qquad\qquad 4\cdot z=11 \end{array}$$

og deraf fremgår løsningerne jo direkte: $x=\frac{37}{4},\quad y=\frac{17}{4},\quad z=\frac{11}{4}.$

ISBN 978-87-7066-497-4

Når man har gået så grueligt meget ondt igennem for at løse et så forholdsvis simpelt et ligningssystem, så skønner man på, at man har en computer, der kan automatisere processen:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

Kineserne havde naturligvis ikke computere til rådighed. Men de indså hurtigt, at de kun behøvede at arbejde direkte med koefficientmatricerne, dvs. med de 'firkantede talskemaer'. Kineserne indførte derfor effektivt matricer til at repræsentere ligningssystemer. Tallene blev så noteret ved hjælp af pinde i et positionssystem, som netop svarede til vores ti-talssystem. Og da de også hurtigt indså nytten af negative koefficienter, havde de farvede pinde til rådighed, så den ene farve kunne stå for positive koefficienter, den anden for negative koefficienter. Kineserne udviklede derfor også som de første systematiske regler for at regne med negative tal.

Øvelse 7:

a) Løs nu selv i hånden på tilsvarende vis ligningssystemet med koefficientmatricen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Kontroller med rref-kommandoen og den specielle kommando for løsning af lineære ligningssystemer i dit CAS-værktøj (I TI-Nspire CAS hedder det fx linsolve(...)).

Øvelse 8:

a) Kineserne kendte ikke den analytiske geometri. Men det gør du i et vist omfang.
Gør rede for at to lineære ligninger med to ubekendte svarer til skæringen mellem 2 rette linjer i planen og at tre lineære ligninger med tre ubekendte svarer til skæringen mellem 3 rette planer i rummet.

b) Giv ved hjælp heraf en geometrisk tolkning af ligningssystemerne i eksempel 3 og 4. Illustrer også løsningerne grafisk.