ISBN 978 87 7066 499 8

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 5.9. Geometriske fraktaler og fraktale dimensioner

Indhold

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 5.9. Geometriske fraktaler og fraktale dimensioner

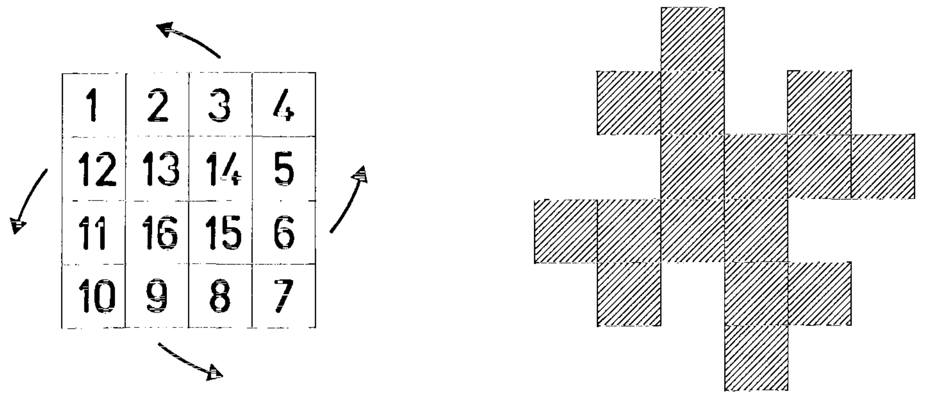
1. Fraktaler og vækstmodeller

Geometriske figurer med uendelig små mikrostrukturer kaldes for *fraktaler.* Det var den fransk-amerikanske matematiker Benoit Mandelbrot, der i 1975 indførte denne betegnelse efter det latinske ord for "brud" for at minde om de uregelmæssige brudflader, der ofte opstår, hvis man knækker en gren eller flækker en sten, jf. fraktur = benbrud. Fraktaler er derfor velegnede, når man skal lave modeller af naturens former og ønsker at fremhæve deres uregelmæssige struktur. Fx er kystlinjer fulde af bugter og sving af alle mulige størrelser. Ligegyldigt hvor tæt man kommer på en kyst, vil der dukke stadig mindre bugter og sving op, indtil vi kommer så tæt på, at mikrostrukturen drukner i havet, der skyller frem og tilbage i vandkanten.

2. Kløverøen

Vi vil nu lave en model af en kystlinje, idet vi vil konstruere en fraktal ø. Som så mange andre simple matematiske modeller er modellen ikke specielt realistisk, men den er nyttig, fordi den på en enkel måde formår at gengive et væsentligt træk ved virkelige kyster: deres mikrostruktur.

Forestil dig, at øen starter som et kvadrat. Hver dag kommer havet og gnaver sig ind på øen, samtidig med at det aflejrer det frigjorte materiale rundt langs øen. Øen ændrer derfor langsomt udseende efter nogle simple regler, som vi nu vil fastlægge. Vi dele. kvadratet i 16 lige store delkvadrater. Disse nummereres fra 1 til 16 som vist på figuren. Når havet gnaver sig ind på øen, fjerner det langs hver af siderne det tredje randkvadrat og aflejrer det ud for nabokvadratet. Den første dag fjerner havet altså randkvadraterne 3, 6, 9 og 12 og aflejrer dem ud for kvadraterne 2, 5, 8 og 11. Efter den første dag ser øen derfor således ud:

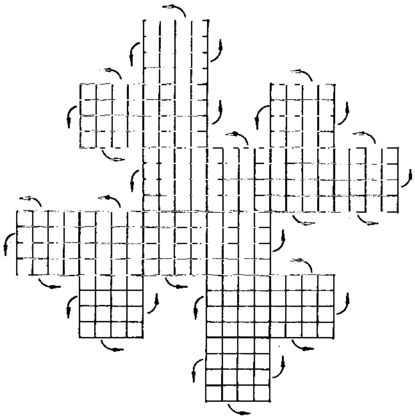


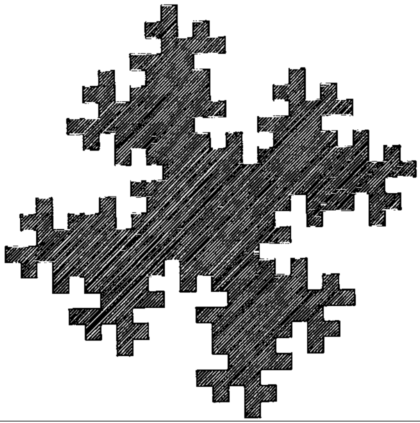
Kløverøen efter 1. dag.

De 16 delkvadrater deles nu i 16 nye kvadrater, der kan nummereres på samme måde som før. De yderste randkvadrater omfordeles som før. Havet gnaver sig ind på øen og fjerner hvert tredje randkvadrat og aflejrer det ved siden af. Efter den anden dag ser øen derfor således ud:

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

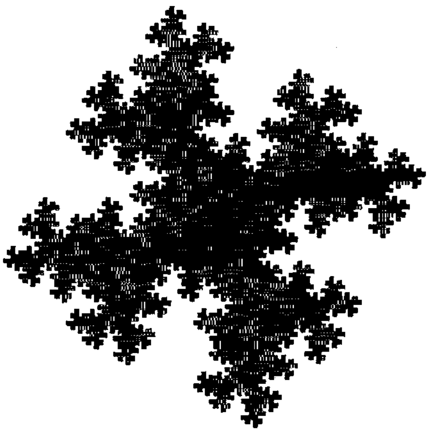
KOPIERING FORBUDT

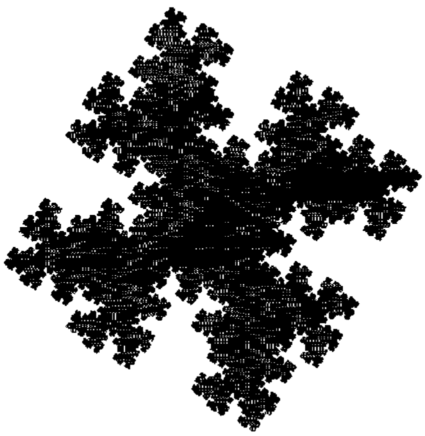




Havet gnaver sig ind på øen. *Kløverøen efter 2. dag.*

Sådan fortsætter det dag efter dag!





Kløverøen efter 3. dag. *Den yderste dag!*

Efter den femte dag er de nye bugter og sving så små, at vi ikke længere kan se dem på ovenstående figurer, men i princippet kan vi fortsætte processen i det uendelige. Hver dag gnaver havet nye og endnu mindre bugter ud, og når der er gået uendelig mange dage (på "den yderste dag"), har havet så fået frembragt en *fraktal ø,* **Kløverøen**.

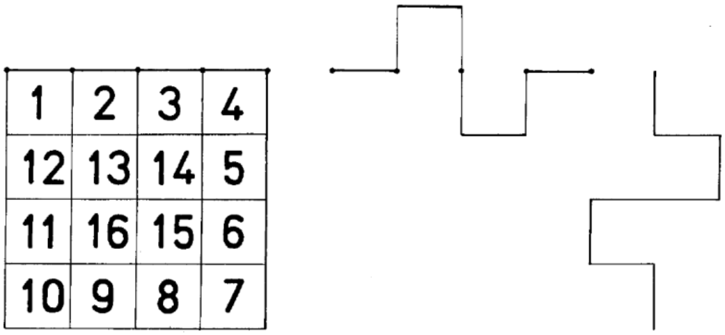
Vi kan nemt finde *arealet* af Kløverøen. Hver eneste *dag fjernes* der nemlig *ikke* noget materiale fra øen. Der sker blot en omfordeling af materialet. Arealet er derfor uændret fra dag til dag, og på den yderste dag må Kløverøen derfor have præcis samme areal, som da den startede. Arealet har altså en **konstant vækst**.

Anderledes forholder det sig med *kystlængden*. For hver dag der går, bliver ethvert vandret linjestykke erstattet af otte nye linjestykker, fire vandrette, der tilsammen har samme længde som det oprindelige

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8

linjestykke, og fire lodrette, der tilsvarende tilsammen har samme længde som det oprindelige linjestykke.



Det samme sker med de lodrette linjestykker. For hver dag bliver kystlængden derfor *dobbelt* så stor:

+1

Dag nr. x	1	2	3	4	5	6	…
Kystlængden y	4	8	16	32	64	128	…

·2

Kystlængden y vokser altså **eksponentielt** med antallet af dage x ifølge forskriften $y = 4 \cdot 2^x$. Men heraf følger, at kysten på den yderste dag er blevet *uendelig* lang.

3. Fraktal dimension

I eksemplet med Kløverøen så vi, at kystlængden blev dobbelt så stor for hver dag, der gik. Kløverøens kyst er derfor *uendelig lang.* I almindelighed giver det ingen mening at tale om længden af en fraktal kyst. I stedet vil vi prøve at finde et mål for, hvor *"krøllet"* den fraktale kyst er. Når vi zoomer ind på en kystlinje, dukker der for hver forstørrelse flere og flere bugter og sving op. Vi søger et mål for, hvor detaljeret denne mikrostruktur er.

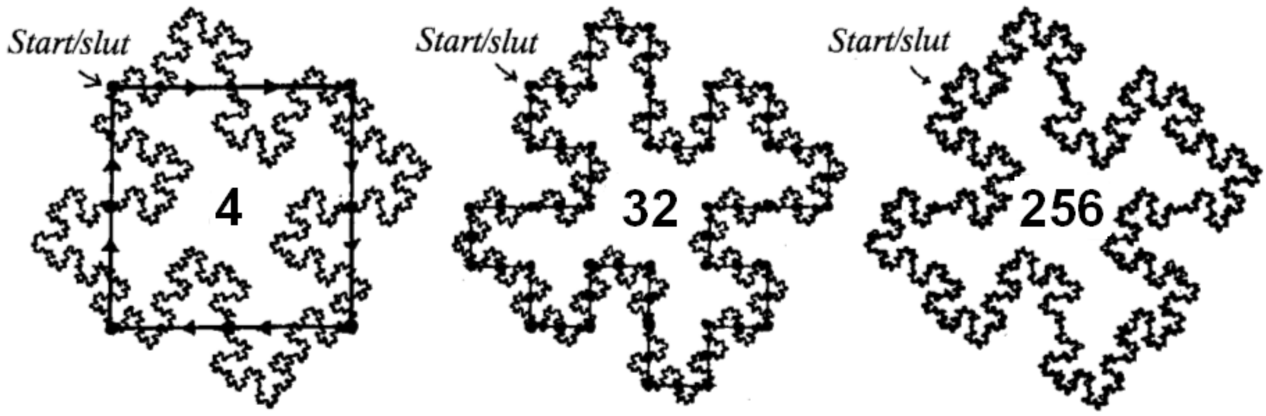
3.1 Skridtlængdemetoden

Vi kan undersøge, hvordan nye detaljer dukker op således: Hvis vi skal måle længden af en kystlinje (eller længden af en grænse mellem to lande, eller...) skal vi vælge en *skridtlængde/målestok* og derefter tælle, hvor mange skridt vi skal tage for at komme rundt langs kysten henholdsvis hvor mange målestokke vi skal lægge i forlængelse af hinanden for at komme hele øen rundt. Hvis kysten var en pæn glat kurve, fx en cirkelbue, ville vi nu umiddelbart forvente, at skridtlængden og det samlede antal skridt var omvendt proportionale. Hver gang vi gør skridtlængden 4 gange så lille, skulle antallet af skridt blive ca. fire gange så stort. Men sådan går det ikke i tilfældet med Kløverøen:

Jo mindre skridt/målestokke vi tager, jo flere detaljer får vi med. Det samlede antal skridt/målestokke rundt langs Kløverøen bliver denne gang 8 gange så stort, for hver gang vi gør skridtlængden 4 gange så lille.

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8



	·1/4 →				
Skridtlængde	1	1/4	1/16	1/64	…
Samlet antal skridt	4	32	256	2048	…
		·8 →			

Jo mindre skridtlængde/målestok vi benytter, jo flere detaljer får vi som nævnt med i vores opmåling. Vi kan derfor knytte en *forstørrelsesgrad* til skridtlængden/målestokken.

Forstørrelsesgraden angiver, hvor mange gange skridtlængden/målestokken går op i enhedsstykket.

Hvis skridtlængden fx er 1/16, bliver forstørrelsesgraden 16. Vi kan så tælle antallet af skridt som funktion af forstørrelsesgraden:

	·4 →				
Forstørrelsesgrad *x*	1	4	16	64	…
Antal skridt *y*	4	32	256	2048	…
		·8 →			

Som vi har set, vil antallet af skridt *y* stige med en faktor 8, for hver gang forstørrelsesgraden *x* vokser med faktoren 4. Antallet af skridt *y* vokser derfor som en *potensfunktion* af forstørrelsesgraden *x*. Vi kan også finde den mere præcise sammenhæng ved at se på simple potenser af *x* og *y*. Da *y*-værdien vokser hurtigst må vi forvente at vi skal bruge en højere potens af *x* for at få 'ligevægt' i form af en simpel direkte proportionalitet:

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

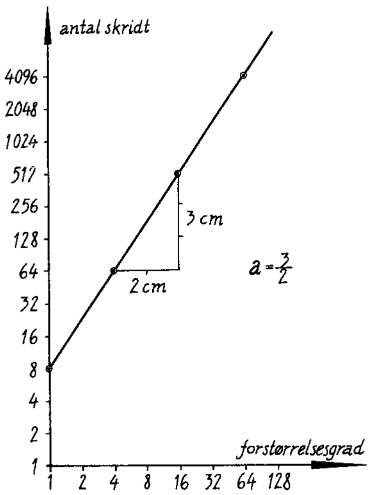
x	1	4	16	64	…
x^2	1	16	256	4096	…
x^3	1	64	4096	262144	
$y/4$	1	8	64	512	…
$y^2/16$	1	64	4096	262144	…

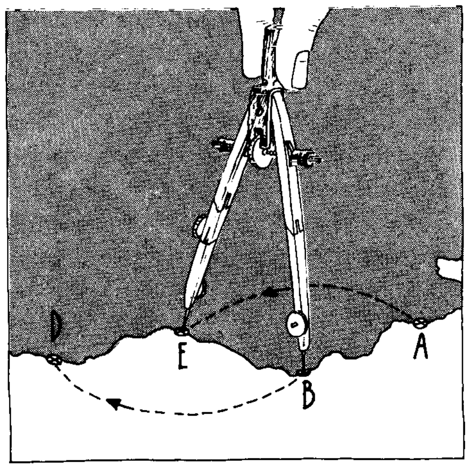
Vi bemærker da at x^3 og y^2 er ligefrem proportionale, idet der gælder sammenhængen:

$$y^2 = 16 \cdot x^3 \quad \text{dvs.} \quad y = 4 \cdot x^{3/2} \ .$$

Konklusion: Antallet af skridt/målestokke vokser altså med eksponenten 3/2 i forhold til forstørrelsesgraden.

Bemærkning: Hvis du er fortrolig med brugen af dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer kan vi også afsætte sammenhørende værdier af forstørrelsesgraden x og antallet af skridt y i et *dobbeltlogaritmisk koordinatsystem*, hvorved vi netop får en ret linje:





Vi kan da karakterisere mikrostrukturens vækst under forstørrelse ved *hældningen* af denne linje. I det ovenstående tilfælde finder vi således hældningen 3/2, dvs. eksponenten er igen givet ved 3/2.

Dette tal, dvs. eksponenten 3/2, der knytter væksten i forstørrelsesgraden sammen med væksten i antallet af skridt/målestokke kaldes den *fraktale dimension* af kystlinjen. Det er vores mål for, hvor krøllet kysten er.

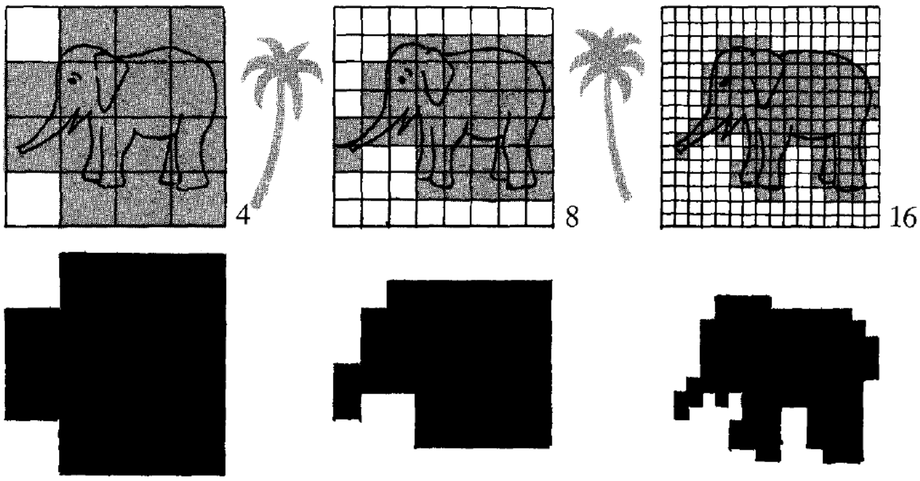
Bemærkning: Skridtlængden er også god til at måle krølletheden, dvs. den fraktale dimension, for en rigtig kyst (grænse, ...). I praksis sker det ved hjælp af geodætiske kort og en stikpasser.

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

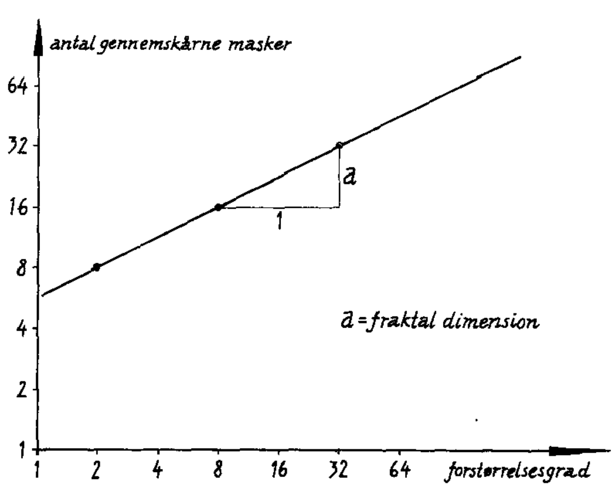
ISBN 978 87 7066 499 8

3.2 Netmaskemetoden

Skridtlængdemetoden kan ikke bruges på alle typer fraktaler. Vi vil derfor også skitsere en anden simpel og mere generelt anvendelig metode til udmåling af den fraktale dimension. Denne gang lægger vi et gennemsigtigt net hen over den fraktale figur og forestiller os, at de enkelte masker bliver sorte, hvis de overskæres af genstanden, henholdsvis lyse, hvis de ligger udenfor. Vælger vi nu mindre og mindre net-masker, svarende til større og større forstørrelse, dukker der flere og flere detaljer op. Nedenfor er antydet udseendet af den samme figur ved forskellige størrelser netmasker:



Læg mærke til, at det denne gang er netmaskernes størrelse, der afgør, hvor små detaljer vi kan se. Alt hvad der er mindre end en enkelt maske i nettet, bliver ikke registreret. For nu igen at få et mål, et bestemt tal, der kan angive "krølletheden" af den fraktale ø, tæller vi antallet af masker, der gennemskæres af kystlinjen. Så kan vi afsætte sammenhørende værdier af forstørrelsesgraden og antal gennemskårne masker i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. *Hvis* den fraktale struktur har en fraktal dimension, så vil de fremkomne punkter med god tilnærmelse ligge på en ret linje. Det er *hældningen* af denne rette linje, vi bruger som et mål for den fraktale dimension.

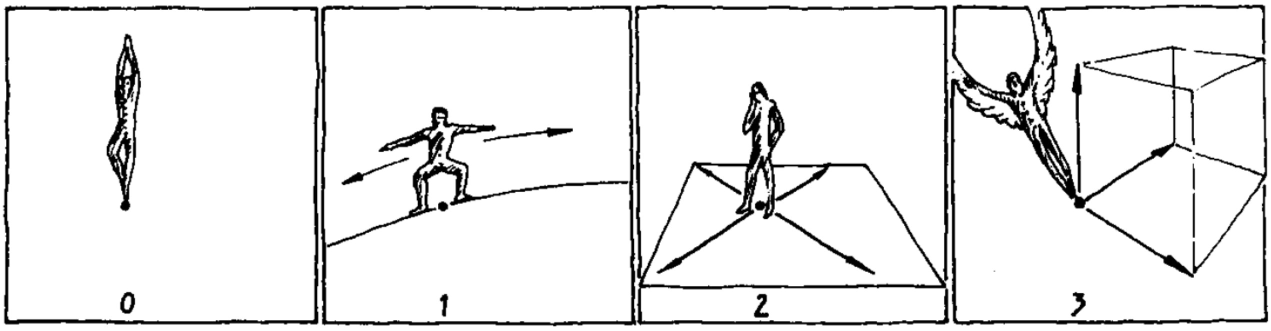


© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8

3.3 Dimensionsbegrebet

Det kan synes mærkeligt at tale om en dimension på fx halvanden. I daglig tale er vi vant til at betragte *dimension* som et af de hele tal 0, 1, 2 eller 3. Et punkt har dimensionen 0, en linje dimensionen 1, en plan figur som fx et kvadrat har dimensionen 2, og endelig har en rumlig figur som fx en kasse dimensionen 3:



Der er flere måder at begrunde dette intuitive dimensionsbegreb på. Én af dem er følgende:

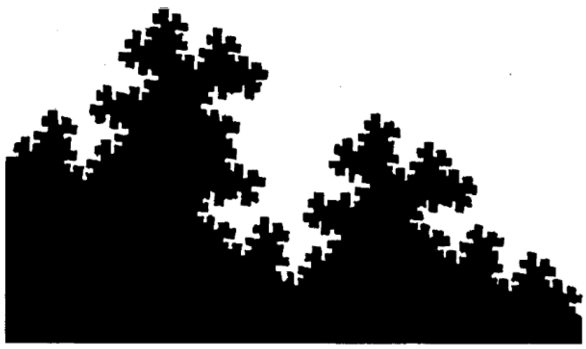
a) Hvis man står i et punkt, kan man slet ikke flytte sig uden at forlade punktet. Et punkt har dimension nul.

b) Hvis man står på en linje, kan man bevæge sig i præcis en "retning" (idet vi ikke skelner mellem frem og tilbage), hvis man ikke må forlade linjen. En linje har dimension 1. Det samme gælder fx for en cirkelbue. Hvis man forstørrer buen omkring et punkt på cirkelbuen, kan man til sidst ikke skelne den fra en ret linje. Hvis man befinder sig på en cirkelbue, har man derfor også netop en retning (frem og tilbage i tangentens retning), hvor man kan bevæge sig uden at forlade cirkelbuen.

c) Hvis man står inde i et kvadrat, har man altid to på hinanden vinkelrette retninger til rådighed, når man vil bevæge sig rundt i kvadratet.

d) En plan figur har dimension 2. I rummet har man tre på hinanden vinkelrette retninger til rådighed. Rummets dimension er derfor 3.

Men hvad med denne kystlinje? Den er meget krøllet, og hvis man bevæger sig selv et nok så lille stykke langs den, kan man ligeså vel risikere at være gået i lodret retning som i vandret retning. Den er derfor indrettet som en mellemting mellem en sædvanlig glat kurve og en plan figur. Det er derfor, man kan finde på at tilskrive den en dimension mellem 1 og 2.

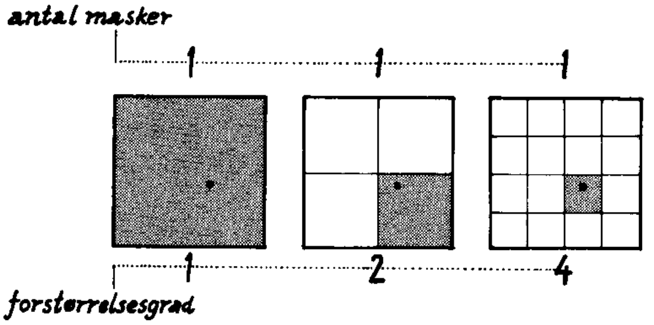


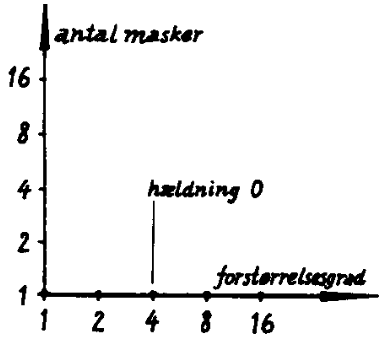
Man kan også *måle* dimensionen af en klassisk figur (en ret linje, en trekant, en cirkel osv.) på samme måde som ovenfor ved at lægge kvadratiske net henover figuren. Man finder da de samme resultater som ovenfor:

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

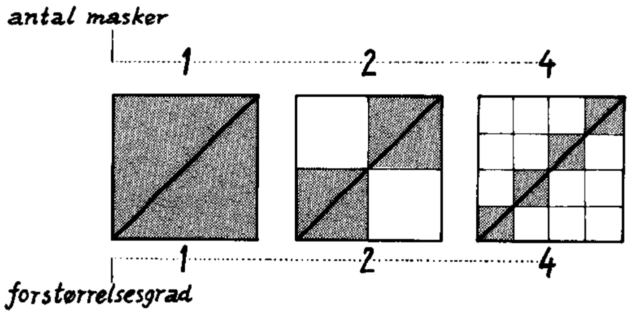
KOPIERING FORBUDT

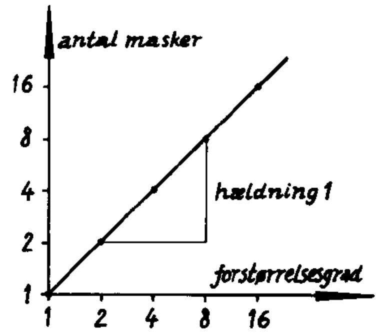
a) Et punkt rammes af præcis én maske uafhængigt af forstørrelsesgraden. Masketallet y er altså en konstant funktion af forstørrelsesgraden x: $y = x^0$. Afsættes masketallet som funktion af forstørrelsesgraden i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, fås derfor en vandret linje. Denne har hældning 0, og hældningen angiver netop dimensionen som forventet.



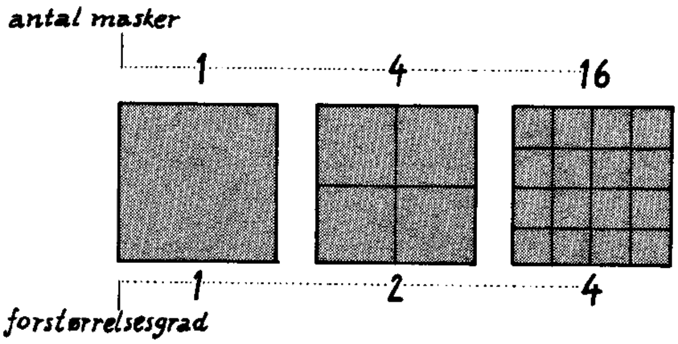


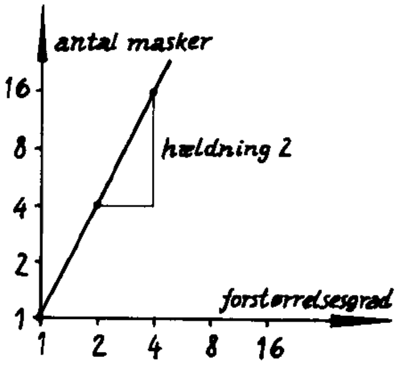
b) En linje rammer et antal masker, der vokser proportionalt med forstørrelsesgraden. Masketallet y er altså ligefrem proportionalt med forstørrelsesgraden x: $y = x^1$. Afsætter man sammenhørende værdier af masketal og forstørrelsesgrad i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, fås derfor en ret linje med hældning 1 i overensstemmelse med dens dimension.





c) Et kvadrat rammer et antal masker, der vokser proportionalt med kvadratet på forstørrelsesgraden. Masketallet y er kvadratisk proportionalt med forstørrelsesgraden x: $y = x^2$. Afsætter man sammenhørende værdier af masketal og forstørrelsesgrad i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, får man derfor en ret linje med hældning 2 i overensstemmelse med dens dimension.





4. Fraktal-øvelse: Koch-øen

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

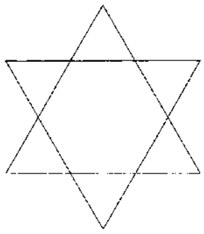
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8

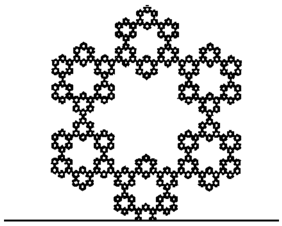
Hvis man tegner en ligesidet trekant og lægger en anden ligesidet trekant omvendt over den første, får man konstrueret en sekstakket stjerne: *davidsstjernen.* Takkerne består af seks nye ligesidede trekanter. Oven på disse lægger vi nu seks andre ligesidede trekanter omvendt på. Man får herved konstrueret seks nye davidsstjerner. De nye takker danner 36 endnu mindre ligesidede trekanter osv. osv. Fortsætter vi på denne måde *i det uendelige,* får vi frembragt en *fraktal figur, den triadiske kurve,* der blev opdaget og undersøgt af den svenske matematiker Koch i 1904.

Kvinde med mandolin (Picasso 1911)

Kubismen er et eksempel på en kunstretning, der fortrinsvis udtrykker sig ved hjælp af klassiske geometriske figurer som rette linjer, trekanter og cirkler i overensstemmelse med Cezannes manifest: "Alle former i naturen kan føres tilbage til kuglen, keglen og cylinderen" (ca. 1900).



Davidsstjernen: Den klassiske geometris forløber for den triadiske kurve



Den triadiske kurve (Koch, 1904).

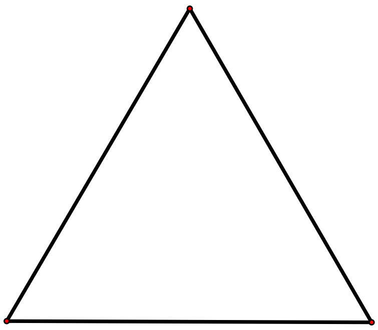
Cesaro: "Denne uendelige indlejring af dens form i sig selv giver os en fornemmelse for det, som Tennyson et sted har kaldt den *indre uendelighed,* der jo til syvende og sidst er den eneste slags uendelighed, vi kan opleve i naturen. En sådan lighed mellem helheden og dens dele, selv i de uendelig små dele, får den triadiske Koch kurve til at fremstå som noget enestående. Kunne den vækkes til live, ville vi kun kunne slippe af med den igen ved at ødelægge den fuldstændigt, for den ville kunne opstå igen og igen fra dens mindste dele, på samme måde som livet selv gør det i Universet" (1905).

4.1 Koch-øens areal, omkreds og dimension

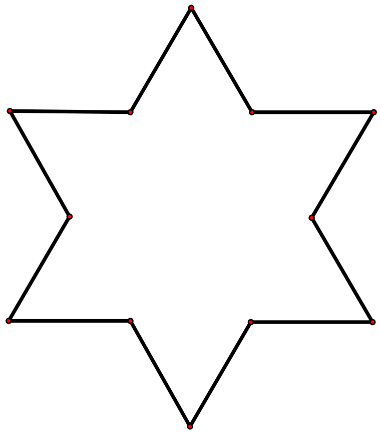
© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978 87 7066 499 8

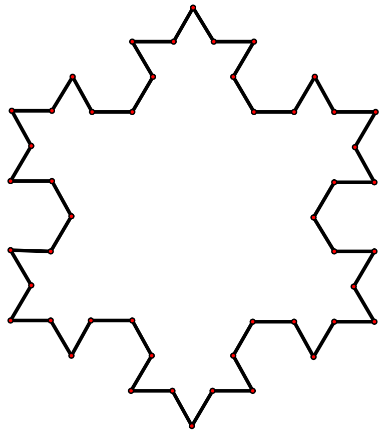
Ligesom kløverøen kan Koch-øen frembringes ved en iterativ proces, hvor vi 'dag for dag' tilføjer nye mikrostrukturer til øen. I dette tilfælde tilføjes nye ligesidede trekanter ovenpå siden af de eksisterende. Vi aflejrer altså stedse nyt materiale:



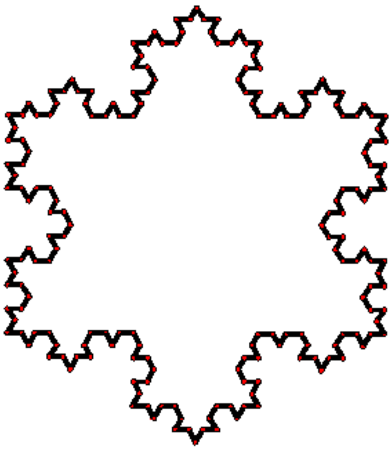
Koch-øen den 0'te dag



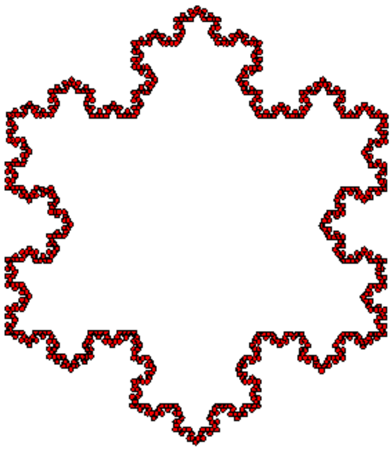
Koch-øen den 1. dag



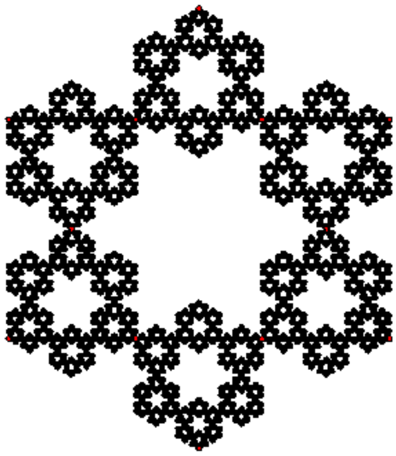
Koch-øen den 2. dag.



Koch-øen den 3. dag



Koch-øen den 4. dag



Koch-øen i alle detaljer.

- Hvordan udvikler kystlængden sig som funktion af antallet af dage?
- Hvor lang er kystlængden på den yderste dag?

- Hvordan udvikler arealet sig som funktion af antallet af dage?
- Hvor stort er arealet på den yderste dag?

- Hvordan udvikler antallet af skridt sig som funktion af forstørrelsesgraden?
- Hvad bliver den fraktale dimension af kysten på Koch-øen?

© 2015 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT