ISBN 978-87-7066-497-4

Projekt 7.2. Optimeringsproblemer og funktioner af flere variable

Indhold

(*Dette projekt er identisk med projekt 2.7 i kapitlet om differentialregning*)
Optimeringsopgaver indeholder altid flere variable. I gymnasiet løses de traditionelt ved, at man – ved hjælp af en bibetingelse – omformer problemet til et, hvor der kun indgår én variabel. Men ligesom der findes metoder til at bestemme maks og min af funktioner af én variabel, findes der naturligvis metoder til at bestemme maks og min af funktioner af flere variable. I dette projekt vil vi kaste lys over den dybere teori bag typiske modelleringsopgaver som fx projekt Vodkaklovn i B-bogen (projekt 4.13).

I vores rejse ind i denne verden af funktioner af flere variable opstår der behov for nye matematiske metoder, der samtidig harv en værdi, der rækker ud over det specifikke projekt her. Afsnittene om implicit differentiation, om gradientvektorer og om Langrange-multiplikatorer kan således både indgå i et større samlet projekt, eller læses særskilt, som små projekter inden for teorien om funktioner af flere variable.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

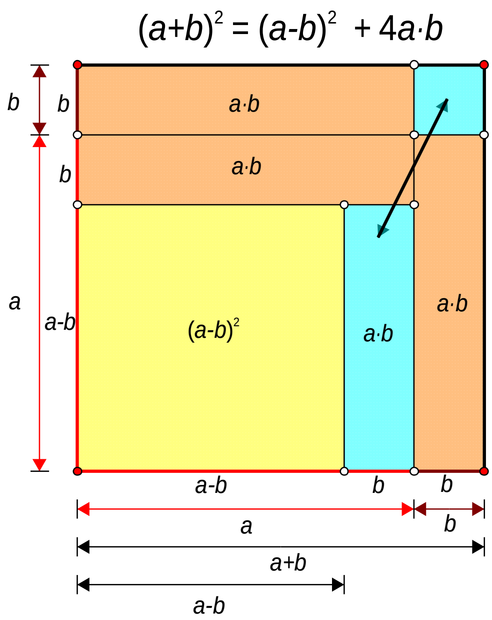
ISBN 978-87-7066-497-4

1. Eksempel: Kvadratet som en optimal figur (se B-bogen projekt 1.1)

Sætning 1: Kvadratet som en optimal figur
Blandt alle rektangler med en given omkreds er kvadratet den figur, der har det største areal-
Blandt alle rektangler med et givet areal er kvadratet den figur, der har den mindste omkreds.

Bevis:
Sætningen hænger på den følgende kvadratsætning:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4a \cdot b$$



Kaldes grundlinjen og højden for rektanglet for g og h finder vi derfor

Formlen for arealet: $T = g \cdot h$

Formlen for omkredsen: $O = 2g + 2h$

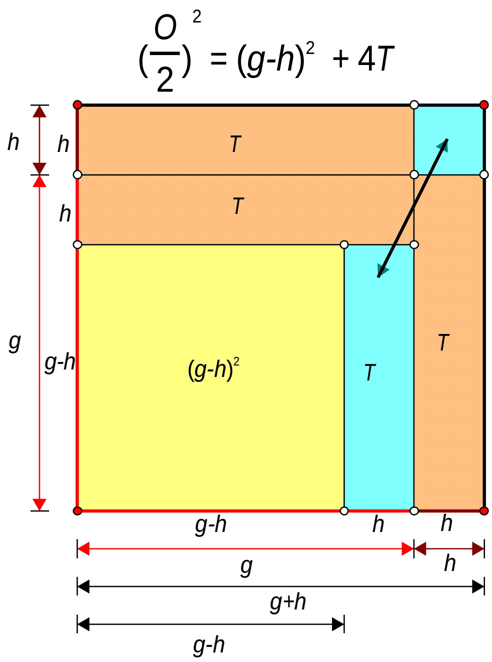
Kvadratsætningen kan derfor omskrives på formen

$$(g+h)^2 - (g-h)^2 = 4g \cdot h$$

$$\left(\frac{O}{2}\right)^2 - (g-h)^2 = 4 \cdot T$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot O^2 = 4T + (g-h)^2$$

$$4T = \tfrac{1}{4} \cdot O^2 - (g-h)^2$$



Øvelse 1

a) Gør rede for at sætningerne om kvadratet som optimal figur netop følger fra de to sidste formuleringer af kvadratsætningen, der også kan formuleres som den følgende ulighed $T \leq \frac{1}{16} \cdot O^2$, hvor der kun gælder lighedstegn, hvis $g = h$.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Typisk vil vi jo gerne have differentialregningen i spil, når vi løser min-max-problemer. I det ovenstående modelleringproblem har vi en klasse af figurer, rektangler, karakteriseret ved to uafhængige variable, grundlinjen *g* og højden *h*, samt to afhængige variable, omkredsen $O = 2g + 2h$ og arealet $T = g \cdot h$.
Både arealet og omkredsen er voksende funktioner af grundlinjen og højden, så der findes fx ikke noget største rektangel, hvad enten vi kigger på areal eller omkreds. Men binder vi den ene afhængige variabel kan vi lave et optimeringsproblem for den anden afhængige variabel. Vi kan fx indhegne en rektangulær mark med et givet stykke hegn til rådighed. Opgaven går da ud på at indhegne så stor en mark som mulig med en given omkreds.

Øvelse 2:

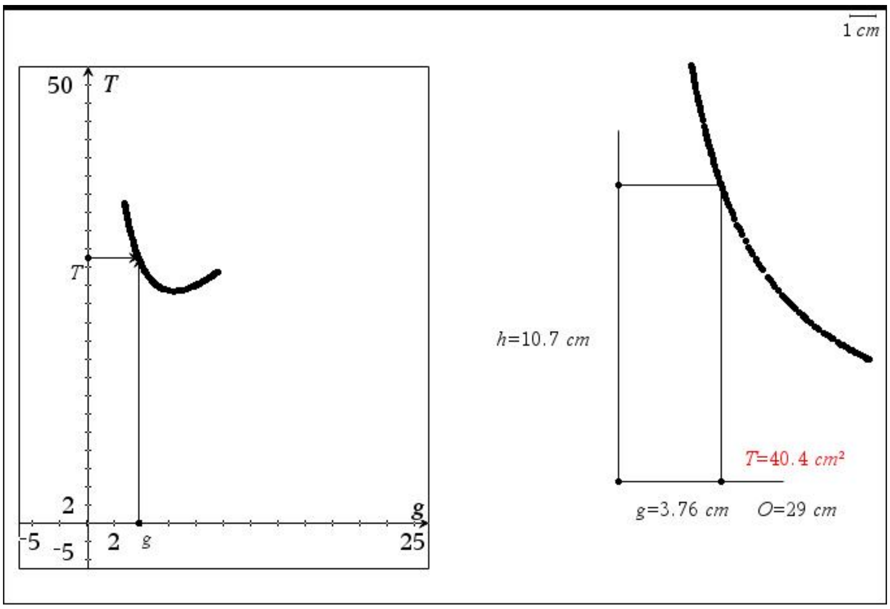
a) Formuler et tilsvarende problem, hvor vi i stedet binder arealet.

Så snart vi har bundet den ene afhængige variabel kan vi bruge bindingen til at *eliminere* den ene af de to uafhængige variable, fx højden *h*. Problemet reduceres da til en optimering af en enkelt afhængig variabel, som er givet som en funktion af en enkelt uafhængig variabel, hvilket jo netop betyder at vi har mulighed for at differentiere funktionen og sætte differentialkvotienten til nul. Der ved finder vi eventuelle stationære punkter, og ved at undersøge disse stationære punkter nærmere kan vi afgøre om der er tale om et maksimum, et minimum eller noget tredje fx et vendepunkt med vandret vendetangent.

Øvelse 3:

a) Benyt *elimination* til at løse de to ovenstående problemtyper, hvor du den ene gang varierer arealet og holder omkredsen fast, mens du den anden gang varierer omkredsen, mens du holder arealet fast.

b) Gør rede for at ligningen for det stationære punkt i begge tilfælde fører til den samme sammenhæng mellem grundlinjen og højden og karakteriser den pågældende optimale figur.



© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Øvelse 4: Udfordring

Da der er tale om en geometrisk problem kan du illustrere problemet visuelt i et geometriprogram.

a) Konstruer et rektangel, hvor du kan trække i såvel rektanglets grundlinje som rektanglets højde og find ved opmåling eller beregning rektanglets areal og omkreds.

b) Lås arealet og se hvordan rektanglet deformeres under indflydelse af bindingen. Prøv fx at spore hjørnepunktet (g,h). Overfør grundlinjen og omkredsen til et koordinatsystem, dvs. grundlinjen overføres til førsteaksen, omkredsen til andenaksen, og konstruer grafen for omkredsen som funktion af grundlinjen.

c) Find grafisk den optimale omkreds. Hvordan passer modelleringen sammen med de resultater du fandt i den symbolske løsning?

d) Lås nu i stedet omkredsen og se hvordan rektanglet deformeres under indflydelse af bindingen. Prøv fx at spore hjørnepunktet (g,h). Overfør grundlinjen og arealet til et koordinatsystem, dvs. grundlinjen overføres til førsteaksen, arealet til andenaksen, og konstruer grafen for arealet som funktion af grundlinjen.

e) Find grafisk det optimale areal. Hvordan passer modelleringen sammen med de resultater du fandt i den symbolske løsning?

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

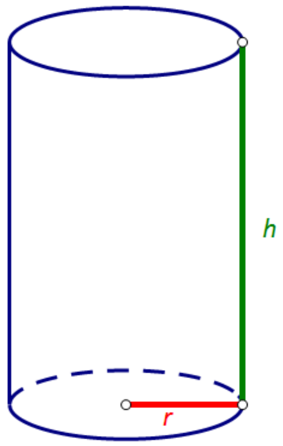
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

2. Eksempel: Øldåsen som en optimal figur (se B-bogen kapitel 1, eksempel 5)

I det foregående eksempel med rektangler kunne vi i princippet løse opgaven med meget simple midler. Denne gang illustrerer vi principperne ved hjælp af et lidt mere kompliceret problem, hvor det bliver svært at komme uden om differentialregningen.

Denne gang ser vi først på cylinderformede dåser, karakteriseret ved to uafhængige variable, radius *r* og højden *h*, samt to afhængige variable, overfladearealet $O = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$ og rumfanget $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Både overfladearealet og rumfanget er voksende funktioner af såvel radius som højden, så der findes fx ikke nogen største dåse, hvad enten vi kigger på overfladeareal eller rumfang. Men binder vi den ene afhængige variabel kan vi lave et optimeringsproblem for den anden afhængige variabel. Vi kan fx fremstille en øldåse med et bestemt rumfang, fx 50 cl. Opgaven går da ud på at fremstille dåsen med så lille et materialeforbrug som mulig, dvs. så lille et overfladeareal som muligt med et givet rumfang.



Øvelse 5:

a) Gør rede for formlerne for cylinderdåsens overfladeareal og rumfang.

b) Formuler et tilsvarende problem, hvor vi i stedet binder overfladearealet.

Så snart vi har bundet den ene afhængige variabel kan vi bruge bindingen til at *eliminere* den ene af de to uafhængige variable. Da de afhængige variable er polynomier i grundlinjen og højden, skal vi vælge den variabel, som har den *mindste grad*, da det fører til de nemmeste udregninger. I dette tilfælde skal vi altså eliminere højden *h*. Problemet reduceres da til en optimering af en enkelt afhængig variabel, som er givet som en funktion af en enkelt uafhængig variabel, hvilket jo netop betyder at vi har mulighed for at differentiere funktionen og sætte differentialkvotienten til nul. Derved finder vi eventuelle stationære punkter, og ved at undersøge disse stationære punkter nærmere kan vi afgøre om der er tale om et maksimum, et minimum eller noget tredje fx et vendepunkt med vandret vendetangent.

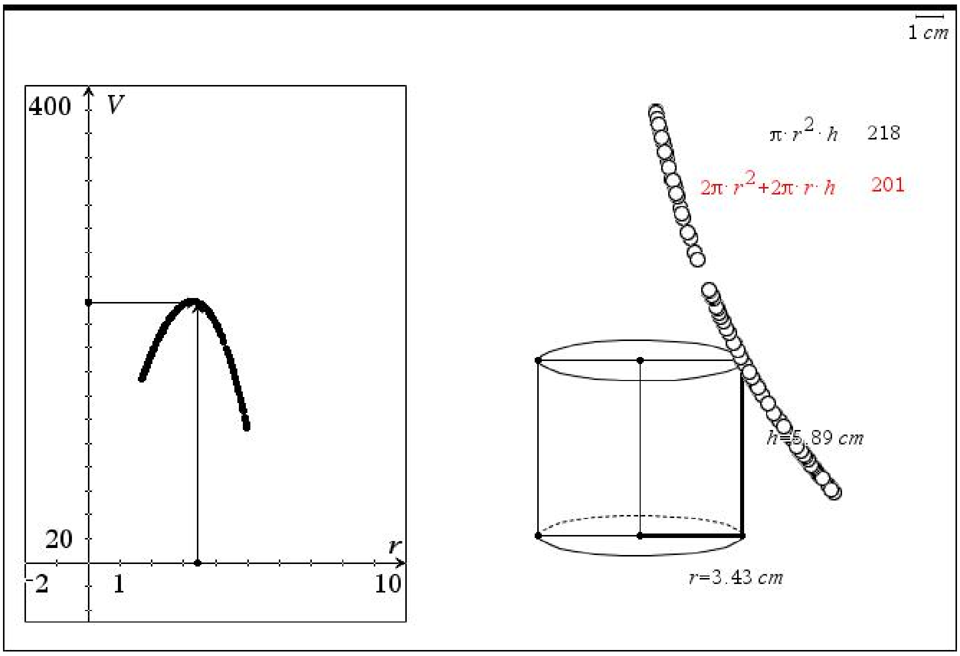
Øvelse 6:

a) Benyt *elimination* til at løse de to ovenstående problemtyper, hvor du den ene gang varierer rumfanget og holder overfladearealet fast, mens du den anden gang varierer overfladearealet, mens du holder rumfanget fast.

b) Gør rede for at ligningen for det stationære punkt i begge tilfælde fører til den samme sammenhæng mellem radius og højden og karakteriser den pågældende optimale figur.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4



Øvelse 7: Udfordring

Da der er tale om en geometrisk problem kan du illustrere problemet visuelt i et geometriprogram.

a) Konstruer et rektangel, hvor du kan trække i såvel rektanglets grundlinje (diameteren) som rektanglets højde. Dåsen fremkommer ved at dreje rektanglet omkring rektanglets lodrette symmetrilinje. Find ved beregning såvel dåsens overfladeareal som dens rumfang.

b) Lås rumfanget og se hvordan rektanglet/dåsen deformeres under indflydelse af bindingen. Prøv fx at spore hjørnepunktet (r,h). Overfør radius og overfladearealet til et koordinatsystem, dvs. radius overføres til førsteaksen, overfladearealet til andenaksen, og konstruer grafen for overfladearealet som funktion af radius.

c) Find grafisk det optimale overfladeareal. Hvordan passer modelleringen sammen med de resultater du fandt i den symbolske løsning?

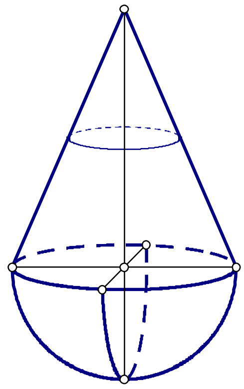
d) Lås nu i stedet overfladearealet og se hvordan rektanglet/dåsen deformeres under indflydelse af bindingen. Prøv fx at spore hjørnepunktet (r, h). Overfør radius og rumfanget til et koordinatsystem, dvs. radius overføres til førsteaksen, rumfanget til andenaksen, og konstruer grafen for rumfanget som funktion af radius.

e) Find grafisk det optimale rumfang. Hvordan passer modelleringen sammen med de resultater du fandt i den symbolske løsning?

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Øvelse 8: Projekt Tumlingen



Denne øvelse er indeholdt i projekt 4.13 i B-bogen. Her finder du også alle rumfangs og overfladeareals formler

a) En tumling består af en halvkugle sat sammen med en kegle. Indfør passende variable og find formlerne til udregning af rumfang og overfladeareal.

b) Gennemfør en undersøgelse af det tilhørende optimerings-problem.

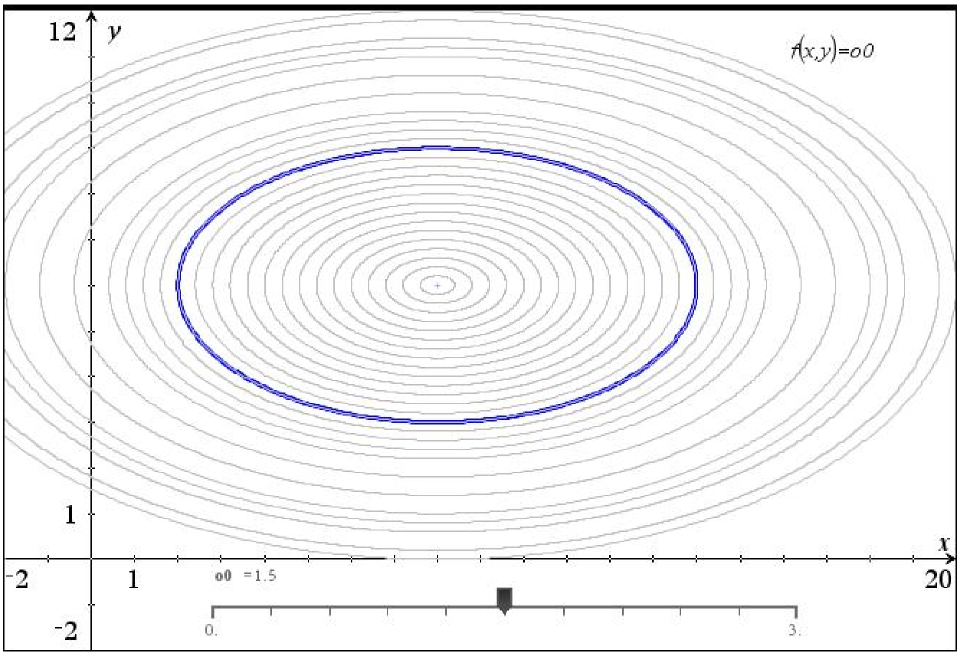
© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

3. Modellering med funktioner med flere variable.

I det foregående har vi løst modelleringsopgaverne med *eliminationsmetoden*, så vi ender med at kigge på en enkelt funktion af en enkelt variabel. Selv om vi fra starten af havde flere uafhængige variable, så binder vi nogle af de afhængige variable for at reducere antallet af uafhængige variable til en enkelt: Modellen har altså kun en enkelt frihedsgrad. Det er imidlertid ikke nødvendigt at eliminere uafhængige variable, hvis vi i stedet er villige til at arbejde med funktioner af flere variable. Det giver ydermere en dybere indsigt i hvorfor min-max-problemerne typisk optræder i par.



Vi ser først på kvadratet som en optimal figur: Som udgangspunkt har vi to uafhængige variable: grundlinjen og højden. Dertil kommer to afhængige variable, nemlig omkredsen og arealet, der altså begge er funktioner af to variable. I et koordinatsystem kan vi derfor repræsentere såvel omkredsen som arealet ved hjælp af *niveaukurver*, hvor omkredsen henholdsvis arealet er konstant. Det er sådanne niveaukurver vi nu vil undersøge nærmere.

Øvelse 9:

a) Tegn niveaukurverne for omkredsen *O* som funktion af grundlinjen *g* og højden *h*, idet du indfører en skyder for omkredsen. Hvilken slags kurve er der tale om?

b) Tegn niveaukurverne for arealet *T* som funktion af grundlinjen *g* og højden *h*, idet du indfører en skyder for arealet. Hvilken slags kurve er der tale om?

c) Varier nu omkredsen, mens du holder arealet fast. Bestem grafisk en omtrentlig værdi for den optimale figur i dette tilfælde. *Vink*: Bestem skæringspunkterne for de to niveaukurver.

d) Varier tilsvarende arealet, mens du holder omkredsen fast. Bestem grafisk en omtrentlig værdi for den optimale figur i dette tilfælde. *Vink*: Bestem skæringspunkterne for de to niveaukurver.

e) Sammenhold resultaterne af denne grafiske analyse med den tilsvarende symbolske analyse.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Vi bruger derefter igen øldåsen som et eksempel. Som udgangspunkt har vi to uafhængige variable: radius og højden. Dertil kommer to afhængige variable, nemlig overfladearealet og rumfanget, der altså begge er funktioner af to variable. I et koordinatsystem kan vi derfor repræsentere såvel overfladearealet som rumfanget ved hjælp af *niveaukurver*, hvor overfladearealet henholdsvis rumfanget er konstant. Der er flere forskellige måder at afbilde niveaukurverne på. Her vil vi udnytte at de er grafer for simple funktioner, hvor vi udtrykker højden som funktion af radius:

Øvelse 10:

a) Tegn niveaukurverne for overfladearealet *O* som funktion af radius *r* og højden *h*, idet du indfører en skyder for overfladearealet.

b) Tegn niveaukurverne for rumfanget *V* som funktion af radius *r* og højden *h*, idet du indfører en skyder for rumfanget.

c) Varier nu overfladearealet, mens du holder rumfanget fast. Bestem grafisk en omtrentlig værdi for den optimale dåse i dette tilfælde. *Vink*: Bestem skæringspunkterne for de to niveaukurver.

d) Varier tilsvarende rumfanget, mens du holder overfladearealet fast. Bestem grafisk en omtrentlig værdi for den optimale dåse i dette tilfælde. *Vink*: Bestem skæringspunkterne for de to niveaukurver.

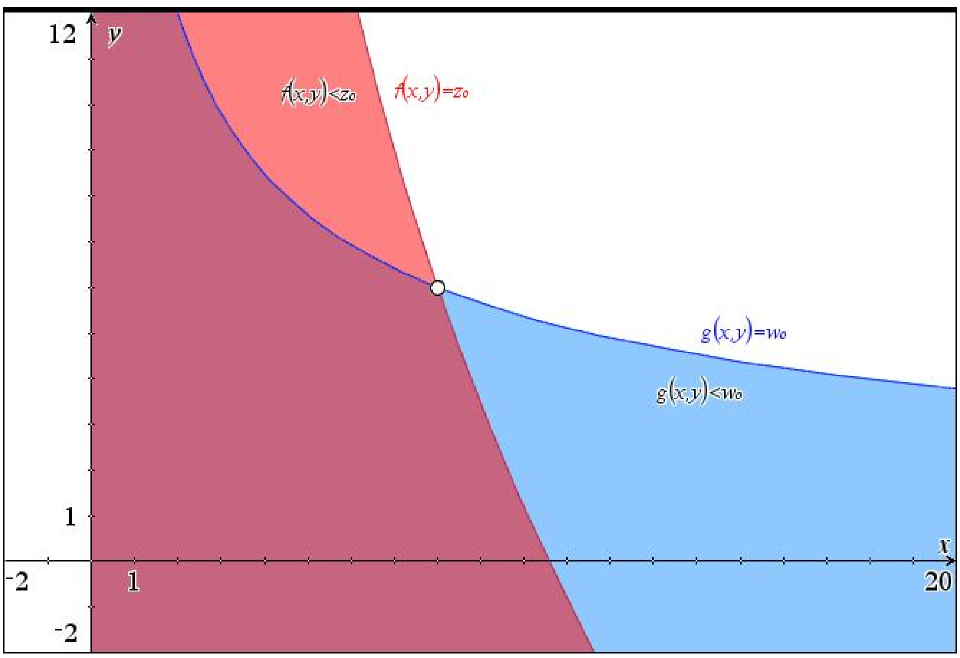
e) Sammenhold resultaterne af denne grafiske analyse med den tilsvarende symbolske analyse.

Vi vil nu prøve at formulere det mere generelt: Der er givet et modelleringsproblem med to uafhængige variable *x* og *y* (fx radius og højde). Ydermere er der givet to afhængige variable *z* og *w* fastlagt ved hver deres funktion af to variable (fx overfladeareal og rumfang)

$$z = f(x,y) \text{ og } w = g(x,y)$$

Vi kan nu tegne niveaukurver for disse to funktioner:

$$f(x,y) = z_0 \text{ og } g(x,y) = w_0$$



© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Hvis vi ændre på niveauerne z_0 og w_0 så vil der ske en forskydning af disse to niveaukurver. Så længe disse to niveaukurver skærer hinanden kan vi *ikke* være i et stationært punkt. Hvis vi fx holder niveauet for variablen *w* fast og varierer variablen *z*, så vil vi kunne bevæge os i to retninger langs niveaukurven for *w*. I den ene retning vil *z* falde og i den anden vil *z* stige. Altså er *z* ikke stationær. Præcis det samme gælder, hvis vi holder variablen *z* fast og varierer variablen *w*.

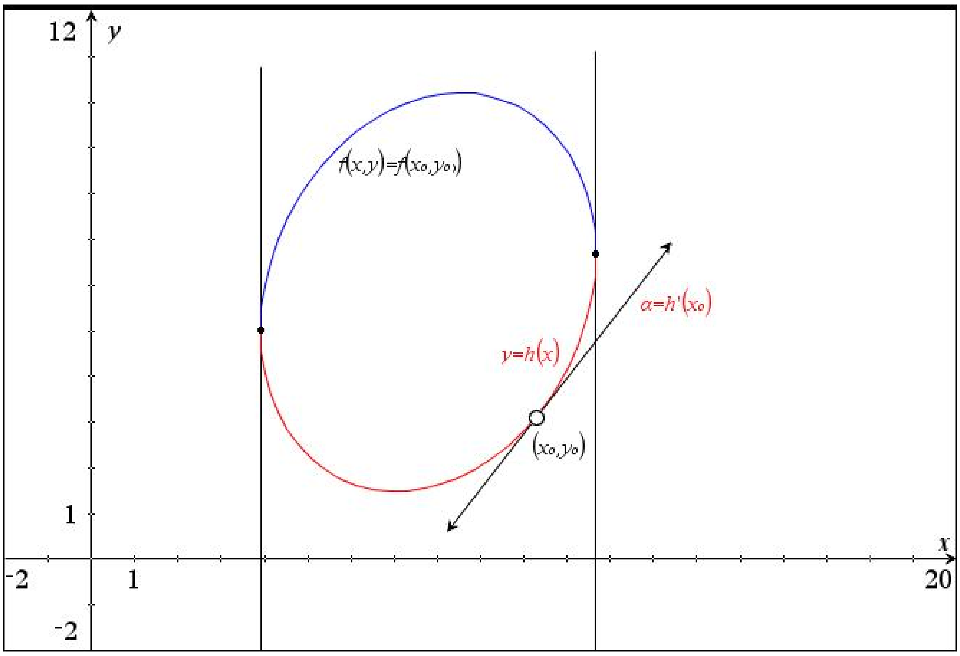
Konklusionen er altså at hvis den ene variabel er stationær, når vi varierer den anden, så vil de to niveaukurver tangere hinanden i det stationære punkt (x_0, y_0). Med andre ord: De to niveaukurver gennem punktet (x_0, y_0) vil have en fælles tangent med røringspunkt i (x_0, y_0). Man siger undertiden at de to niveaukurver kysser hinanden.

Vi skal derfor finde betingelsen for at de to niveaukurver har en fælles tangent .. Læg mærke til at de to variable *z* og *w* indgår symmetrisk i karakteriseringen af et stationært punkt, dvs. hvis *z* er stationær, når vi holder *w* fast, så er *w* også stationær når vi holder *z* fast. Det er altså herfra den grundlæggende symmetri i max-min-problemerne stammer! Vi kan også på tilsvarende vis begrunde hvorfor den ene variabel er maksimal, mens den anden er minimal, men vi udskyder lige denne del af problemet til efter vi har fundet ligningen for et stationært punkt.

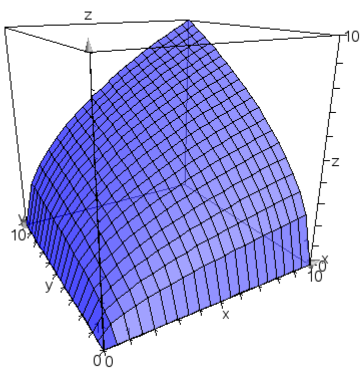
© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

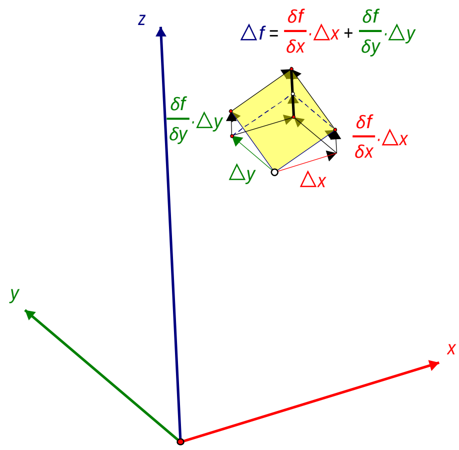
ISBN 978-87-7066-497-4

4. Implicit differentiation



Når vi kigger på en niveaukurve for en funktion af to variable $f(x,y)=z_0$ så vil niveaukurven i almindelighed kunne opfattes som grafen for en almindelig funktion, så længe niveaukurven ikke er lodret. Ellers må den håndteres som en familie af grafer for almindelige funktioner på samme måde som fx en cirkel kan opfattes som graferne for to almindelige funktioner. Vi betegner denne funktion med *h*, dvs. $f(x,y)=z_0 \Rightarrow y=h(x)$. Tangenthældningen i et punkt (x_0,y_0) på niveaukurven er da givet ved $h'(x_0)$. Vi kan altså finde tangent-hældningen ved eksplicit differentiation forudsat vi kender forskriften for *h*. Men vi kan også finde tangent-hældningen direkte fra funktionen $f(x,y)$ ved hjælp af såkaldt *implicit differentiation*. Det foregår således:





Tangenthældningen for *fladen* $z=f(x,y)$ fastlægges ud fra tangentplanens ligning:

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y$$

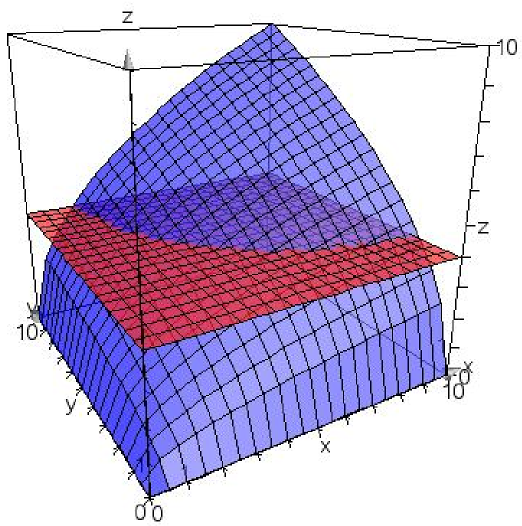
$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y-y_0)$$

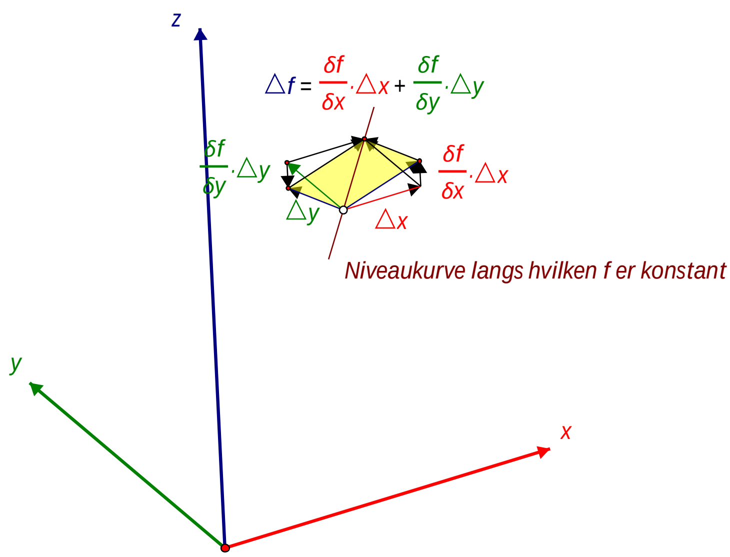
© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Her er $\frac{\partial f}{\partial x}$ den såkaldt *partielle afledede* med hensyn til *x*, dvs. vi holder *y* konstant og opfatter alene funktionen *f* som en funktion af *x*. Den partielle afledede med hensyn til *x*, er altså tangenthældningen, når vi bevæger os langs med *x*-aksen. I CAS-systemer findes den derfor ved hjælp af en kommando som derivative$(f(x,y),x)$. Det tilsvarende gælder for den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til *y*.

Når vi bevæger os stykket Δx langs *x*-aksen løftes vi stykket $\Delta_{z,x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x$ langs *z*-aksen. Det følger af den sædvanlige differentialregning. Når vi samtidig bevæger os stykket Δy langs *y*-aksen løftes vi stykket $\Delta_{z,y} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$ langs *z*-aksen. Det samlede resultat af dels at flytte os stykket Δx langs *x*-aksen, dels stykket Δx langs *y*-aksen, er da summen af disse to uafhængige tilvækster $\Delta z = \Delta_{z,x} + \Delta_{z,y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$.





Men når vi nu bevæger os langs en niveaukurve, holdes *z*-konstant, dvs. der når vi bevæger os langs med tangenten til niveaukurven må der gælde:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Dette er derfor formlen for implicit differentiation:

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Sætning 2: Formlen for implicit differentiation

For en given niveaukurve $f(x,y)=z_0$, der går gennem punktet (x_0,y_0) kan vi finde hældningen for tangenten til niveaukurven ved hjælp af implicit differentiation, hvor y opfattes som en funktion af x:

$$h'(x_0)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Vi giver en anden udledning i næste afsnit . I et CAS-program ser kommandoen for implicit differentiation typisk således ud

$$\text{ImpDif}(f(x,y)=z_0,x).$$

Men så er det jo nemt at skrive en ligning op for den fælles tangenthældning for de to niveaukurver:

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Det er på den sidste form vi normalt vil prøve at løse ligningen for stationære punkter for systemer af funktioner i flere variable.

Sætning 3: Ligningen for stationære punkter i to variable

Betingelsen for at to niveaukurver $z=f(x,y)$ og $w=g(x,y)$ kysser hinanden, dvs. den ene afhængige variabel er stationær med hensyn til den anden er givet ved ligningen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

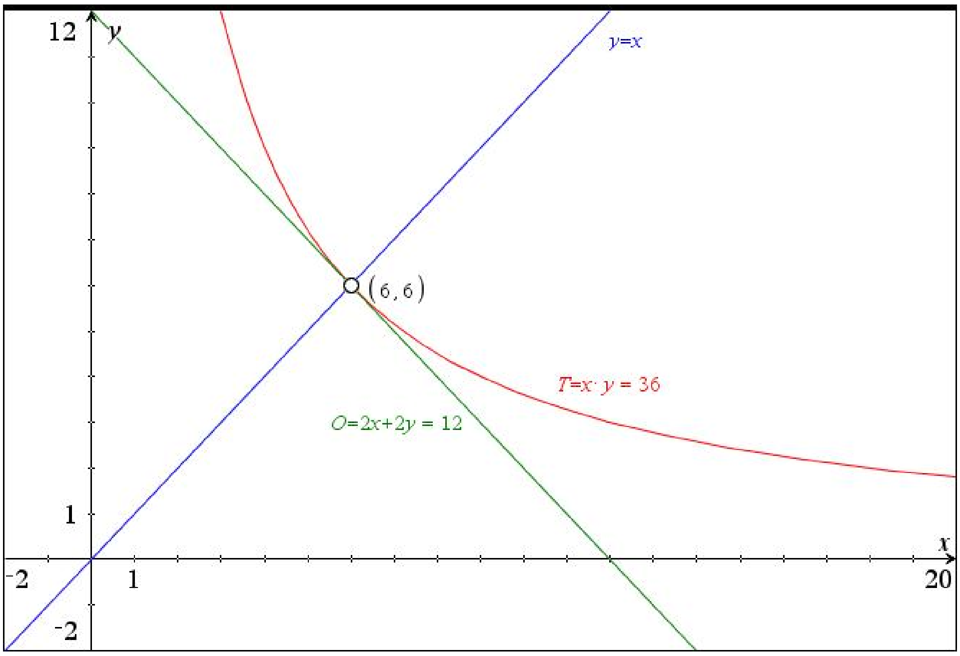
Lad os lige tjekke i vores simpleste eksempel at det virker .

For et rektangel med grundlinje x og højde y er arealet z givet ved $z=f(x,y)=x\cdot y$ og omkredsen er givet ved $w=g(x,y)=2x+2y$. Ligningen for stationære punkter er derfor givet ved

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial(x\cdot y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(2x+2y)}{\partial y}-\frac{\partial(x\cdot y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial(2x+2y)}{\partial x}\\&=y\cdot 2-x\cdot 2=2\cdot(y-x)\end{aligned}$$

Altså er et punkt stationært netop når $y=x$ eller med andre ord, et rektangel er stationært netop når det er et kvadrat .

ISBN 978-87-7066-497-4



Hvis vi nu kigger på et diagram, kan vi se at niveaukurven for arealet er en hyperbel, niveaukurven for omkredsen er en ret linje og de stationære punkter ligger på diagonalen $y = x$. Da hyperblen ligger over den rette linje og da såvel areal som omkreds vokser med stigende værdier af x og y følger det at hvis vi binder omkredsen falder arealet, når vi bevæger os væk fra det stationære punkt langs den rette linje. Tilsvarende følger det at hvis vi binder arealet stiger omkredsen, når vi bevæger os væk fra det stationære punkt langs hyperblen. Altså kan vi karakteriserer de stationære punkter således:

> Blandt alle rektangler med fast omkreds har kvadratet det største areal.
> Blandt alle rektangler med fast areal har kvadratet den mindste omkreds.

I almindelighed kan vi kun udlede *lokale resultater* ved hjælp af differentialregning. Vi skal de foretage en *implicit differentiation af anden orden* for at vurdere hulheden af de to niveaukurver og derved se, hvilken der ligger øverst. I et CAS program ser kommandoen typisk sådan ud: $\mathrm{ImpDif}(f(x,y)=z_0, x, 2)$

Ved implicit differentiation af arealfunktionen finder vi:

$$x \cdot y = z_0 \Rightarrow y + x \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \quad \text{(isoler } y'\text{)}$$

$$\Downarrow \quad \text{(differentier ligningen endnu engang)}$$

$$y' + y' + x \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2y'}{x} \quad \text{(isoler } y''\text{)}$$

Sættes udtrykket for y' ind i udtrykket for y'' fås derfor $y'' = \frac{2y}{x^2}$. Den er selvfølgelig noget nemmere at finde ved hjælp af CAS:

$$\mathrm{impDif}(x \cdot y = z_0, x, y, 2) \quad \blacktriangleright \quad \frac{2 \cdot y}{x^2}$$

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

L&R Uddannelse EGMONT

I et stationært punkt hvor $y = x$ fås endelig $y'' = \frac{2}{x}$.

Tilsvarende finder vi ved implicit differentiation af omkredsen:

$$2x + 2y = z_0 \Rightarrow 2 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -1$$
$$\Downarrow$$
$$2 \cdot y'' = 0$$

Hældningen langs den rette linjer er selvfølgelig konstant og den anden afledede er derfor nul.

Da hulheden for hyperblen er positiv og hulheden for den rette linje er nul, følger det at hyperblen ligger over den rette linje, og som vi har set fører det til at det stationære punkt er et minimumspunkt, når vi holder arealet fast og et maksimumspunkt, når vi holder omkredsen fast .

Øvelse 11: Øldåsen

En øldåse er kendetegnet ved to uafhængige variable: radius x og højden y. Tilsvarende er den kendetegnet ved to afhængige variable: rumfanget $z = f(x, y) = \pi \cdot x^2 \cdot y$ og overfladearealet $w = 2\pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x \cdot y$.

a) Find ligningen for de stationære punkter og karakteriser de pågældende øldåser.

b) Gør rede for at den anden afledede langs niveaukurven for rumfangsfunktionen er givet ved $\frac{6y}{x^2}$.

c) Gør rede for at den anden afledede langs niveaukurven for overfladefunktionen er givet ved $\frac{2 \cdot (x+y)}{x^2}$.

d) Gør rede for at det stationære punkt er et minimumspunkt, når vi holder rumfanget fast, og tilsvarende at det stationære punkt er et maksimum, når vi holder overfladen fast.

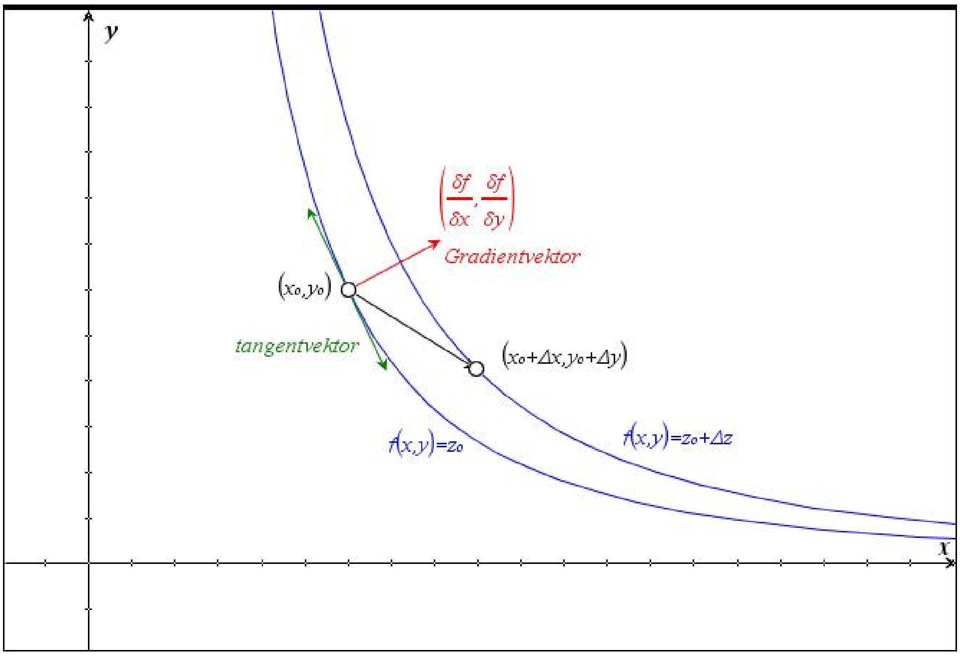
Øvelse 12: Tumlingen

a) Gennemfør nu selv analysen af tumlingen .

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

5. Gradientvektorer



Vi kigger igen på en funktion af to variable $z = f(x,y)$ og de tilhørende niveaukurver $f(x,y) = z_0$ hvor vi binder værdien af den afhængige variabel til at være konstant. Ved differentiation fås de partielle afledede $\frac{\partial f}{dx},\frac{\partial f}{\partial y}$ hvor vi varierer den ene uafhængige variabel og holder den anden konstant. For tilvæksten af funktionen *f* gælder da (med tilnærmelse hvis vi går langs grafen og eksakt, hvis vi går langs tangentplanen)

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y = \left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\bullet\{\Delta x,\Delta y\}$$

Hvor det sidste produkt er skalarproduktet som vi kender det fra vektor regningen. Her er venstresiden, dvs. tilvæksten Δf en skalar, mens tilvæksten $\{\Delta x,\Delta y\}$ er en forskydningsvektor. Den første faktor $\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ er derfor også en vektor, der kaldes *gradientvektoren* og ofte betegnes med $\vec{\nabla} f$. Tilvækstformlen kan derfor skrives mere kompakt som

$$\Delta f = \vec{\nabla} f \bullet \Delta\vec{r}$$

Hvis nu tilvækstvektoren $\Delta\vec{r}$ peger langs tangenten til en niveaukurve, hvor *f* jo er konstant er førsteordenstilvæksten $\Delta f = 0$, dvs. tangentvektoren står vinkelret på gradientvektoren. Vi indser altså følgende:

Sætning 4: Gradientvektoren

Hvis der er givet en funktion af to variable $z = f(x,y)$ vil gradientvektoren $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ være en normalvektor til niveaukurven gennem et punkt, dvs. den vil stå vinkelret på tangentvektoren i dette punkt. Ydermere vil funktionen vokse hurtigst, når vi bevæger os langs med gradientvektoren og aftage hurtigst når vi bevæger os modsat gradientvektoren.

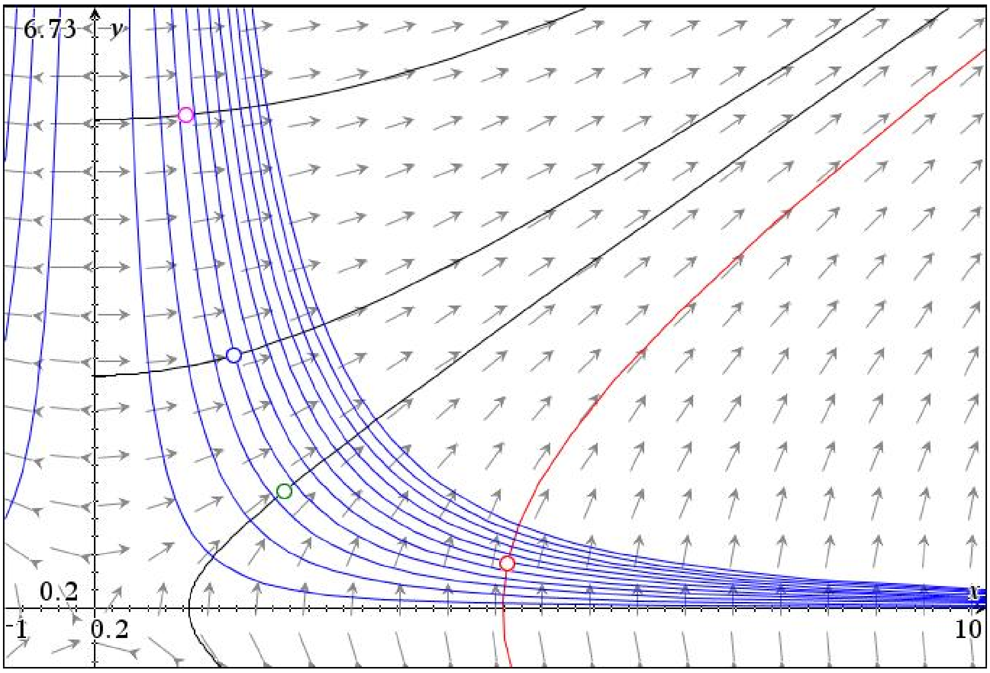
© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Øvelse 13

a) Prøv selv at gøre rede for vækstpåstandene ud fra egenskaber ved prikproduktet.

Bemærkning: Det er standard for CAS-programmer at de kan tegne niveaukurver og det tilhørende gradientfelt. Her ses fx gradientfeltet for funktionen $f(x,y)=\frac{1}{5}\cdot x^2\cdot y$ sammen med udvalgte niveaukurver:



Da gradientvektoren står vinkelret på tangent vektoren følger det, at tangentvektoren er en tværvektor til gradientvektoren og derfor har koordinaterne

$$\vec{v}_{\text{tangent}}=\left\{-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

Dermed finder vi igen at tangentvektoren (langs niveaukurven) har hældningen

$$\alpha_{tangent}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Vi har altså som lovet genfundet formlen for implicit differentiation .

Vi kan nu også nemt genfinde ligningen for de stationære punkter.

Øvelse 14: Stationære punkter for to funktioner af to variable

a) Gør rede for at en niveaukurve for $f(x,y)$ og en niveaukurve for $g(x,y)$ tangerer hinanden netop når deres gradientvektorer er parallelle.

b) Benyt dette til at genudlede ligningen for de stationære punkter.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

Hidtil har vi blot genfundet tidligere resultater med en ny synsvinkel . Metoden med gradientvektorer kommer for alvor til sin ret, når vi udvider problemstillingen. Fx kan vi nu se på problemer med tre uafhængige variable. For at have et konkret eksempel at øve os på udvider vi rektanglerne til 3 dimensioner dvs. til retvinklede kasser. Som de uafhængige variable kan vi da bruge længde, højde og dybde. Som de afhængige koordinater kan vi bruge kantlængde, overfladeareal og rumfang.

Øvelse 15:

a) Gør rede for at rumfanget, overfladearealet og kantlængden er givet ved funktionerne $f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$, $g(x,y,z)=2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot z+2\cdot z\cdot x$ samt $h(x,y,z)=4\cdot x+4\cdot y+4\cdot z$ hvor *x*, *y* og *z* står for kassens længde, højde og dybde.

b) Giv eksempler på optimeringsproblemer, hvor en af variablerne varieres, mens en anden (eller begge de øvrige) holdes fast. Vink: Kantlængden indgår fx i postvæsnets dimensionering af pakkepost eller luftfartsselskabernes dimensionering af håndbagage.

Lad os nu se på *eliminationsmetoden*: Med tre uafhængige variable skal vi eliminere to af variablene for at reducere problemet til en enkelt funktion af en enkelt variabel. Lad os tænke os at vil optimere værdien af rumfanget *f*, mens vi holder værdien af overfaldearealet *g* og kantlængden *h* fast.

Øvelse 16:

a) Gør rede for at de to niveauflader for *g* og *h* skærer hinanden i en rumkurve med tangentvektoren $\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h$. Prøv også at tegne niveaufladerne for *g* og *h* og prøv eventuelt at finde en passende parameterfremstilling for skæringskurven. Hvilken type flader er der tale om? Hvilken skæringskurve er der tale om?

b) Gør rede for at de tre niveauflader for *f*, *g* og *h* i rummet skal have en fælles tangent, hvis der skal være et stationært punkt. Gør rede for at det betyder at de tre gradientvektorer må være parallelle.

c) Gør rede for at ligningen for de stationære punkter derfor må være givet ved den såkaldte rumdeterminant: $0=\vec{\nabla}f\bullet\left(\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h\right)=\det\left(\vec{\nabla}f,\vec{\nabla}g,\vec{\nabla}h\right)$

d) Find ligningen for de stationære punkter i det konkrette tilfælde med en kasse. Gør rede for at bl.a. terninger er stationære.

Men vi kan også nøjes med at se på en enkelt betingelse, dvs. vi eliminerer kun en af de tre uafhængige variable, I så fald er den funktion vi skal variere stadigvæk en funktion af to variable. Hvis den skal optimeres skal begge de partielle afledede derfor være nul. Vi kan fx forsøge at optimere rumfanget *f* samtidigt med at vi holder overfladearealet *g* fast:

Øvelse 17:

a) Gør rede for at hvis der er tale om et stationært punkt må de to niveauflader for f og g tangere hinanden, dvs. de må have fælles tangentplaner.

b) Gør rede for at ligningen for de stationære punkter må være givet ved $\vec{0}=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

c) Find ligningen for de stationære punkter i det konkrete tilfælde med en kasse. Karakteriser de stationære kasser. Gør rede for dualiteten i dette eksempel.

De to varianter vi netop har set på afslører et generelt træk ved min-maks problemer, hvor vi varierer på en afhængig variabel, mens vi holder andre fast. I alle tilfælde er et punkt stationært, netop når de involverede gradientvektorer er lineært afhængige, dvs. med to gradientvektorer må de ikke udspænde et areal, med tregradientvektorer må de ikke udspænde et rumfang osv. Dermed har vi fundet et generelt princip bag løsningen af optimeringsproblemer .

Læg også mærke til at Vodkaklovnen hurtigt fører til sådanne mere komplicerede problemer. Hvis den opbygges af flere delfigurer kommer der hurtigt mange uafhængige variable i spil og vi er derfor tilsvarende nødt til at opstille flere bindinger på klovnens form for at kunne eliminere et passende antal variable. Hvis I har lavet vodkaklovnen vil det ikke være svært at finde passende sjove eksempler I kan analysere .

Sætning 5: Ligningen for stationære punkter i tre variable

a) Betingelsen for at to niveaukurver for funktionerne $f(x,y,z)$ og $g(x,y,z)$ kysser hinanden er givet ved ligningen

$$\vec{0} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$$

b) Betingelsen for at tre niveaukurver for funktionerne $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ og $h(x,y,z)$ kysser hinanden er givet ved ligningen

$$\vec{0} = \vec{\nabla} f \bullet \left(\vec{\nabla} g \times \vec{\nabla} h \right) = \det(\vec{\nabla} f, \vec{\nabla} g, \vec{\nabla} h)$$

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

6. Lagrange multiplikatorer

Ved mere generelle min-maks problemer der omfatter mange uafhængige variable bliver det hurtigt uoverskueligt at skulle opstille specifikke ligninger for de stationære punkter. Man bruger da i stedet en generel algoritme, der bygger på de såkaldte Lagrange multiplikatorer. Ideen stammer fra lineær algebra: Hvis to gradientvektorer $\vec{\nabla} f$ og $\vec{\nabla} g$ skal være lineært afhængige må der findes en parameter λ så $\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g = \vec{0}$. Hvis tre gradientvektorer $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} g$ og $\vec{\nabla} h$ skal være lineært afhængige må der findes parametre λ og μ så $\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h = \vec{0}$ osv. Lagrange fik derfor ideen at man kunne omformulere problemet så disse ekstra parametre automatisk kom på plads.

Ideen er præcis den modsatte af eliminationsmetoden. I stedet for at udnytte bindingerne til at eliminere så mange uafhængige variable som muligt, så *udvider* vi problemet med ekstra variable og opsuger bindingerne, så vi ender med en enkelt funktion *Lagrangefunktionen*, som vi så skal optimere ved at sætte alle de partielle afledede til nul. Det fører til et stort ligningssystem som vi typisk overlader til CAS at løse .

Sætning 6: Lagranges metode:
Vi tænker os at vi skal optimere funktionen $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i *n* variable under *k* bibetingelser, der skrives på formen $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Til hver af bibetingelserne tilføjer vi da en såkaldt Lagrangemultiplikator, dvs. hjælpevariablene $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ og konstruerer Lagrangefunktionen

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_2 \cdot g_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_n \cdot g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

De stationære punkter for Lagrangefunktionen svarer da netop til de stationære punkter for den oprindelige funktion under bibetingelserne.

Lad os kort argumentere for Lagranges metode:

Vi skal sætte alle de partielle afledede til 0. Vi kigger først på hjælpevariablene $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Vi finder da

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$...$$
$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Det sikrer præcist at alle bibetingelserne er opfyldt . . Det sikrer også at Lagrangefunktionen *L* har præcis den samme værdi som den oprindelige funktion *f* i et stationært punkt ..

Således opmuntrede kigger vi nu på de almindelige variable $x_1, x_2, ..., x_n$. Vi finder da

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 978-87-7066-497-4

$$0=\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_k\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_1}$$
$$0=\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_k\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_2}$$
$$\ldots$$
$$0=\frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x_n}+\lambda_2\cdot\frac{\partial g_2}{\partial x_n}+\ldots+\lambda_k\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_n}$$

Omskriver vi det ved hjælp af gradientvektorer fås ligningen

$$\vec{0}=\vec{\nabla}f+\lambda_1\vec{\nabla}g_1+\lambda_2\vec{\nabla}g_2+\ldots+\lambda_k\vec{\nabla}g_k$$

Men det siger jo netop at gradientvektorerne er lineært afhængige og som vi har set er det netop betingelsen for et stationært punkt .

Lad os lige se et simpelt eksempel på Lagranges metode:

Et rektangel med siderne x og y har omkredsen $2x+2y$ og arealet $x\cdot y$. Hvis vi vil optimere *arealet*, når *omkredsen er* 20 konstruerer vi Lagrangefunktionen

$$L(x,y,\lambda)=x\cdot y+\lambda\cdot(2x+2y-20)$$

De partielle afledede er derfor givet ved

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda\cdot 2$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=x+\lambda\cdot 2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=2x+2y-20$$

Vi skal derfor løse ligningssystemet:

$$0=y+\lambda\cdot 2$$
$$0=x+\lambda\cdot 2$$
$$0=2x+2y-20$$

I dette tilfælde er det et meget simpelt lineært ligningssystem, som vi godt selv kan løse, men vi kan selvfølgelig også overlade det til vores CAS-værktøj. Vi finder da $x=5$, $y=5$ og $\lambda=-5/2$. *Det optimale rektangel er altså et kvadrat med sidelængden* 5.

Øvelse 18: Øldåsen

a) Løs øldåseproblemet ved Lagranges metode.

Øvelse 19: Tumlingen

a) Løs tumlingeproblemet ved hjælp af Lagranges metode.

Øvelse 20: Kasseproblemet

a) Løs kasseproblemet ved hjælp af Lagranges metode.

© 2014 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT