

STEEN MARKVORSEN

Minimalflader
og flader med konstant
middelkrumning

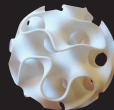
MATEMATISK FORSKNING

10

DANSKE MATEMATIKERE

10

MATEMATISKE FORTÆLLINGER



Film og tilhørende projektmateriale er produceret af lærebogssystemet

HVAD ER MATEMATIK?

Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

Minimalflader og flader med konstant middelkrumning

Projektmaterialer

Bjørn Grøn (red.)

Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader



© 2015 Konceptet: Matematisk forskning - 10 Danske matematikere - 10 Matematiske fortællinger

er udviklet af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun & Olav Lyndrup

© 2015 Filmene og de tilhørende projektmaterialer

er produceret af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Forsideillustrationer: Ulla Korgaard, Designeriet

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse.

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

Minimalflader og flader med konstant middeldkrumning.

faglig redaktion: Bjørn Grøn

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om ophavsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra bla. Undervisningsministeriets udlovningsmidler, IKV, SDU og Cryptomathic

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsens video: Skumstrukturer og minimalflader. Minimalflader og flader med konstant middelkrumning

Indhold

0. Indledning	4
1. Krumningen for kurver og flader	5
1.1 Oversigt over nogle centrale resultater	5
1.2 Parameterkurver på en flade	7
1.3 Krumningen for snitkurver	9
1.4 Middelkrumningen for parametriserede flader	14
1.5 To klassiske eksempler: Helikoiden og katenoiden	18
1.6 Middelkrumningen for flader, der er givet ved en ligning	21
2. Nogle klassiske minimalflader	24
2.1 Vindelflader som minimalflader	25
2.2 Omdrejningsflader som minimalflader	27
2.3 Forskydningsflader som minimalflader	28
3. Roulettefigurer	32
3.1 Cykliden	33
Cyklidens parameterfremstilling	33
Omdrejningslegemet hørende til cykliden	34
3.2 Kædelinjen	35
Lidt grundlæggende hyperbolsk trigonometri:	35
Parablens geometri	37
Parablens parameterfremstilling	38
Parameterfremstillingen for roulettefiguren: Kædelinjen	39
Omdrejningslegemet hørende til kædelinjen	40
Eksperimenter med katenoider	41
3.3 Unduloiden	43
Ellipsens geometri	43
Ellipsens parameterfremstilling	45
Parameterfremstillingen for roulettefiguren	47
Eksperimenter med Delaunay-fladen hørende til unduloiden	49
4. Appendiks	50
4.1 Løsning af sætning 5b ved håndregning	50
4.2 Løsning af sætning 5.b ved brug af Maple	51
4.3 Løsning af sætning 6b ved håndregning	52
4.4 Løsning af øvelse 2.3 og sætning 6b ved brug af Maple	53

0. Indledning

Disse projektmaterialer er skrevet i tilknytning til filmen *Skumstrukturer og minimalflader*, der indgår i serien om matematisk forskning: *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger*.

I filmen fortæller professor ved DTU, Steen Markvorsen dels om sæbeboblers og andre skumstrukturers lokale geometri og dels om hvorledes krumningsbegrebet kan løftes fra en lokal definition knyttet til kurver i 2D til et begreb, der kan udtrykke krumningsforhold globalt for flader i 3D. Derved tager han os med frem til en introduktion af et af de centrale begreber i differentialgeometri, *flader med konstant middelkrumning* og specielt: *minimalflader*.

Til den første del af filmen foreligger *projektmaterialer 1*, mens det foreliggende materiale tilbyder en fordybelse i teorien bag og en eksemplificering af netop emnet: *flader med konstant middelkrumning*, specielt minimalflader.

- I kapitel 1 udledes de klassiske formler, der karakteriserer minimalflader, både når vi studerer dem som grafer for vektorfunktioner og som grafer for funktioner af to variable. Man kan fx vælge at give disse formler og så studere nogle interessante flader.

- I kapitel 2 stiller vi det generelle spørgsmål, givet en bestemt klasse af funktioner af to variable, findes der da minimalflader blandt graferne? Vi udleder den formel, der anvendes, men man kan forære eleverne denne og så anvende den på udvalgte funktionstyper, hvorved eleverne selv går på jagt efter minimalflader – med brug af deres værktøjsprogrammer.

- I kapitel 3 skiftes der spor: Vi undersøger nogle af de såkaldte Delaunay flader, flader der fremkommer som omdrejningsflader af keglesnit. Og som baggrund for denne undersøgelse lægges der op til forløb om henholdsvis parablens og ellipsens geometri. I tilknytning til kapitel 3 ligger der et ekstramateriale i form af filmklip, hvor Steen Markvorsen fortæller om og visualiserer roulettefigurer.

Materialet er selvsagt alt for omfattende til et samlet forløb eller et projekt. Den enkelte lærer – og elev – må gå på opdagelse i materialet og vælge ud. Fx udvælge nogle enkelte dele som anvendes til at perspektivere et forløb over projektmaterialer 1. Men man kan også klippe mere afgrænsede forløb ud, hvor man tager det ene eller det andet resultat for givet, og så arbejder ud fra det.

Vi har valgt at redegøre for *hele* den grundlæggende teori om minimalflader, fordi et sådant materiale ikke foreligger på dansk. Samtidig anvender mange af de engelsksprogede fremstillinger en avanceret matematik, der nok kan gøre fremstillingen mere elegant, men som ligger uden for gymnasieelevers rækkevidde. Det har været ambitionen med dette materiale, at give en fremstilling af teorien, der anvender en matematik, der nok rækker ud over gymnasiets niveau, men dog er overkommelig for dygtige elever. Materialet er således velegnet som udgangspunkt for studieretningsprojekter.

1. Krumningen for kurver og flader

1.1 Oversigt over nogle centrale resultater

I *projektmaterialer 1* til Steen Markvorsens film studerede vi først krumningen for kurver i planen og i rummet.

For en plan kurve, givet ved en vektorfunktion $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, udledte vi følgende:

Kapitel 3, Sætning 1. Formel for krumningen af en banekurve

Krumningen for en kurve med parameterfremstillingen $\vec{r}(t)$ er givet ved:

$$\kappa = \frac{\vec{a} \cdot \hat{\vec{v}}}{v^3} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{3/2}} \quad (1)$$

Er en given kurve samtidig graf for en funktion, så viste vi følgende formel, der er meget enkel at bruge:

Kapitel 3, Sætning 2. Krumningen for en graf

Hvis en kurve er givet som grafen for en funktion $y = f(x)$ er krumningen givet ved

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + f'(x)^2} \right)^3} .$$

Specielt vil der i et stationært punkt, hvor $f'(x) = 0$, gælde $\kappa = f''(x)$.

Kurver i rummet er ikke meget mere komplicerede. Vi argumenterede her for at krumningsbegrebet i 2 dimensioner generaliseres til følgende, som vi gav som en definition, og som man kan se er helt parallel til formlen i sætning 1:

Krumningen for en rumkurve

Lad $\vec{r}(t)$ være en vektorfunktion og \mathcal{L} være den rumkurve, som vektorfunktionen bestemmer i \mathbb{R}^3 . Med $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$ og $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t)$ betegner vi henholdsvis hastighedsvektoren og accelerationsvektoren hørende til vektorfunktionen. Vi betragter et regulært punkt $\vec{r}(t_0) = P_0$, dvs et punkt hvor $\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$ og definerer nu *krumningen* af kurven i punktet P_0 som tallet:

$$\kappa_n = \frac{|\vec{a}(t_0) \times \vec{v}(t_0)|}{v^3(t_0)}$$

Ved krumningsvektoren i punktet P_0 forstås vektoren:

$$\vec{k} = \kappa_n \cdot \vec{N} ,$$

hvor $\vec{N} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{|\vec{a} \times \vec{v}|} = \frac{\vec{r}''(t_0) \times \vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}''(t_0) \times \vec{r}'(t_0)|}$ er en enhedsvektor i hovednormalens retning.

Dernæst studerede vi krumning af flader. Begrebet kommer til veje ved at tage udgangspunkt i et snit mellem en flade og en given normalplan til fladen. Vi viste den centrale:

Kapitel 4, Sætning 1. Eulers formel for snitkrumningen

En flades snitkrumning med en normalplan kan bestemmes ved formlen:

$$\kappa_0 = \kappa_1 \cdot \cos^2(\theta_1) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\theta_1),$$

hvor κ_1 og κ_2 , der kaldes for fladens *hovedkrumninger* eller *principale krumninger* i punktet, repræsenterer den maksimale og den minimale krumning, og hvor θ_1 er den vinkel fladen er drejet ift. 1. akse i koordinatsystemet bestemt af de principale krumninger.

Med udgangspunkt i begrebet snitkrumning nåede vi endelig frem til begrebet middelkrumning og viste her den overraskende enkle sammenhæng:

Kapitel 4, Sætning 2. Middelkrumning i et punkt

Middelkrumningen i et bestemt punkt kan bestemmes ved formlen:

$$H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$$

hvor κ_1 og κ_2 er henholdsvis den maksimale og den minimale snitkrumning i punktet

Vi er nu interesseret i at "instrumentalisere" definitionen på snitkrumning og formlen for middelkrumning af flader, så vi kan få formler af samme type, som dem vi har for kurver og grafer, som angivet i sætning 1 og 2 i kapitel 3. Dels vil dette give os et redskab til at beregne middelkrumningen i et givet punkt ud fra en parameterfremstilling eller en ligning. Men videre vil det kunne give os et redskab til at svare på følgende spørgsmål: *Findes der minimalflader af en given algebraisk type?*

Sætning 2 fra kapitel 4 fortæller os, at middelkrumningen er bestemt ud fra maksimum og minimum af snitkrumningerne. Men har vi en formel for snitkrumningen, så kunne vi måske ved brug af differentialregning bestemme maksimum og minimum. Og dermed svare på spørgsmål som følgende:

Inden for en given fladetype, bestemt ved en given algebraisk ligningstype, findes der da flader, der opfylder ligningen:

a) $H = \frac{1}{2} \cdot (\text{maksimum} + \text{minimum}) = \text{konstant}.$

Og yderligere: findes der flader, der opfylder ligningen:

b) $H = \frac{1}{2} \cdot (\text{maksimum} + \text{minimum}) = 0.$

Vi starter vores undersøgelse i parameterkurvernes verden, da det er her vi har udledt Eulers formel for snitkrumningen og formlerne for middelkrumning.

I det følgende vil vi hele tiden antage, at de vektorfunktioner vi har i spil er tilpas mange gange differentiabel, at deres differentialkvotienter altid er kontinuerte, og alle punkter vi betragter er regulære, dvs der er ikke "folde" eller "spidser" på fladerne, så vi kan altid forestille os, at der ligger tangentplaner i givne punkter.

1.2 Parameterkurver på en flade

Vi betragter en parametriseret flade \mathcal{F} givet ved vektorfunktionen $\vec{r}(u,v)$.

Definitionsmængden er altså et område i planen (\mathbb{R}^2), hvor vi har betegnet 1. og 2. koordinat med u og v .

$\vec{r}(u,v)$ er en (sted-)vektor for et punkt i rummet. Samlingen af alle disse punkter udgør fladen \mathcal{F} .

$\vec{r}(u,v)$ er differentiabel både mht. u og v . Vi differentierer altid mht. en retning. Hvis vi differentierer mht u svarer det til at differentiere i 1.-aksens retning. Tilsvarende med differentiation mht. v . Disse to afledte funktioner betegnes $\vec{r}_u(u,v)$ og $\vec{r}_v(u,v)$, eller blot \vec{r}_u og \vec{r}_v , og kaldes for *de partielle afledede*.

Øvelse 1.1. De partielt afledte af en vektorfunktion

Betragt vektorfunktionen: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ -v^2 \end{pmatrix}$. Bestem $\vec{r}_u(u,v)$ og $\vec{r}_v(u,v)$

Vi betragter et punkt P på fladen, og betragter en tilfældig kurve på fladen \mathcal{F} , som går gennem P . En sådan kurve kan betragtes som en kurve i rummet, der tilfældigvis løber på fladen. Kurven er parametriseret ved en funktion, $\vec{\gamma}(t)$ af én variabel, som vi betegner t . Da kurven forløber på \mathcal{F} , er punkterne på kurven også billeder ved vektorfunktionen $\vec{r}(u,v)$ af en delmængde af definitionsmængden i (u,v) -planen.

Delmængden må være en kurve i (u,v) -planen, som vi kunne beskrive som en funktion af t , $(u(t),v(t))$ (Overvej selv dette – tegn fx en illustration af situationen).

Det korte af det lange - vi kan beskrive kurven således:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$$

Vi skriver i korthed: $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t),v(t)) = \vec{r}(t)$ (1)

Hastighedsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ er en vektor i tangentens retning.

Accelerationsvektoren $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ vil normalt pege i en anden retning og er nært knyttet til krumningsbegrebet.

Bemærk, at vi her differentierer mht t .

Øvelse 1.2. Kædereglen (sammensat differentiation) for vektorfunktioner.

Lad os igen betragte vektorfunktionen fra 1.1, og nu indskrænke definitionsmængden til linjen i (u,v) -planen

givet ved: $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a \cdot t \end{pmatrix}$. Dette er altså en linje med hældningskoefficient a .

Vis, at kurven $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}((u(t), v(t)))$ er parameterkurven: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ a \cdot t^2 \\ -a^2 \cdot t^2 \end{pmatrix}$, og betem $\vec{\gamma}'(t)$.

Vi kan også bestemme $\vec{\gamma}'(t)$ ved sammensat differentiation. Her er $\vec{r}(u, v)$ den "ydre" funktion, og

$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a \cdot t \end{pmatrix}$ er den "indre" funktion, hvis afledte funktion er: $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Kædereglens siger så her:

$$\vec{\gamma}'(t) = (\vec{r}((u(t), v(t))))' = \vec{r}_u(u, v) \cdot 1 + \vec{r}_v(u, v) \cdot a$$

Udregn den afledte funktion ved brug af kædereglens og sammenlign med den tidligere bestemte $\vec{\gamma}'(t)$. Forhåbentlig får du det samme.

(*Bemærkning:* Hvis du synes at genkende udtrykket i kædereglens som en slags skalarprodukt med vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ er det ikke forkert. Men her udgør parret $[\vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)]$, der består af to vektorer, en matrix, som vektor-

ren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ ganges på. Kæderegler i flere dimensioner kan virke teknisk lidt komplicerede, men man kan normalt

styre det netop ud fra kravet om, at dimensionerne skal gå op: Her – 2 variable ind, 3 variable ud).

Vi vil ofte være interesseret i at bevæge os rundt på en kurve ved hjælp af en enhedsvektor $\vec{e}(t)$. En sådan enhedsvektor kan vi altid få ved at normere en vektor med samme retning, fx hastighedsvektoren:

$$\vec{e}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}, \text{ hvor } |\vec{v}(t)| \text{ også betegnes som } \textit{farten}. \quad (2)$$

En enhedsvektor langs kurvens tangent kan imidlertid fremkomme meget elegant ved en *om-parametrisering*. Vi har i projektmaterialer 1 behandlet dette vigtige begreb, og specielt set på det tilfælde, som Steen Markvorsen grundigt redegør for i sin film, nemlig om-parametrisering til buelængde s .

Den *buelængden*, som vi har bevæget os fra et starttidspunkt t_0 til tiden t kan angives som et integral:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(z)| dz = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(z)| dz, \text{ hvor vi har indført symbolet } z \text{ som integrationsvariabel.}$$

Formlen siger blot, at længden, vi bevæger os, er summen af *fart gange tid* over den periode, vi betragter. Det er intuitivt klart, men der er også reegjort for det i detaljer i appendiks til projektmaterialer 1.

Integration og differentiation er modsatte regningsarter, så af integralet får vi:

$$s'(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| \quad (3)$$

Øvelse 1.3

Overvej, at dette er indholdet i den sætning, der kaldes integralregningens hovedsætning, eller analysens hovedsætning. (*Hint: Hvad er matematik? B*, kapitel 5, afsnit 3 (sætning 4), eller *Hvad er matematik? A*, kapitel 3, afsnit 2 (sætning 3))

Da der til ethvert t hører et $s = s(t)$, kan vi betragte funktionen $\vec{r}(t)$ som en sammensat funktion:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)) = \vec{r}(s)$$

Dette skal forstås således: Skal vi for en given værdi af s bestemme $\vec{r}(s)$, så bestemmes først den værdi t , der svarer til s , og dernæst udregnes $\vec{r}(t)$. Dette er værdien af $\vec{r}(s)$.

Ved sammensat differentiation får vi nu:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(s(t))}{ds} \cdot \frac{ds(t)}{dt}, \text{ eller kort: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Indsæt heri (3):

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot |\vec{v}(t)|$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \vec{e}(t) \quad (\text{isoler } \frac{d\vec{r}}{ds} \text{ og udnyt (2)})$$

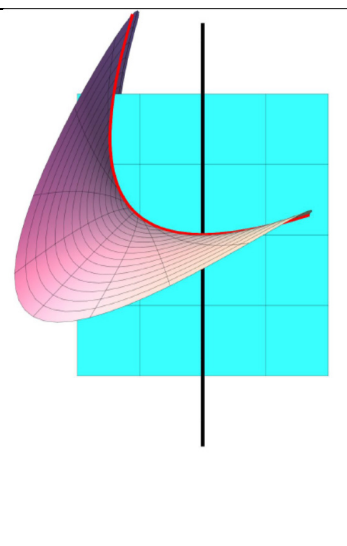
Konklusion: Når vi om-parametriserer til buelængde, så bliver hastighedsvektorerne for den nye parameterfremstilling enhedsvektorer:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}(s),$$

hvor sammenhængen mellem s og t er som ovenfor beskrevet.

1.3 Krumningen for snitkurver

Vi betragter nu som i filmen et bestemt punkt på fladen, hvor vi forestiller os, der er lagt en tangentplan, samt en normal til denne tangentplan. Vi lægger en snitplan parallel med normalen og gennem punktet, og vi drejer billedet, så normalen er lodret og tangentplanen vandret. Koordinatsystemet er placeret, så punktet ligger over Origo i (u, v) -planen. Vi lader nu kurven $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}((u(t), v(t)))$ være snitkurven mellem fladen og planen. Snitkurven forløber i en lodret plan, over en ret linje i (u, v) -planen. Den rette linje er bestemt ved hældningskoefficienten λ , og parameteren t angiver hvor langt vi har bevæget os ud af linjen. Vi vil nedenfor betragte λ som en variabel, og vi vil differentiere mht. λ for at bestemme retningerne med maksimum og minimum. Men før vi kan differentiere, skal vi have bestemt et udtryk for krumningen af denne snitkurve.



Lad \vec{N} være en enhedsvektor på normalen til tangentfladen i P , og lad $\vec{e}(s)$ være en enheds-retningsvektor for snitkurven gennem P , fx konstrueret ud fra hastighedsvektoren ved en om-parametrisering. Der gælder $\vec{N} \perp \vec{e}$ og derfor $\vec{N} \cdot \vec{e} = 0$. Ved differentiation af denne ligning får vi:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{e} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{e}}{ds} = 0,$$

hvoraf: $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{e}}{ds} = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{e}$ (4)

Betragt nu vektoren $\frac{d\vec{e}(s)}{ds} = \vec{k}$, og opløs vektoren \vec{k} efter tangentplanen og normalen:

$$\vec{k} = \vec{k}_g + \vec{k}_N, \tag{5}$$

hvor \vec{k}_g , der ligger i planen, kaldes den geodætiske krumning, og \vec{k}_N , der ligger langs normalen kaldes for normalkrumningen. I analysen af rumkurver fandt vi, at \vec{k}_N er krumningsvektoren, og at krumningen κ_n er proportionalitetsfaktoren:

$$\vec{k}_N = \kappa_n \cdot \vec{N} \tag{6}$$

Da \vec{N} er en enhedsvektor, og er ortogonal til tangentplanen gælder:

$$\vec{k} = \vec{k}_g + \vec{k}_N$$

$$\vec{k} = \vec{k}_g + \kappa_n \cdot \vec{N} \quad \text{Indsæt (6) i (5)}$$

$$\vec{N} \cdot \vec{k} = \vec{N} \cdot \vec{k}_g + \kappa_n \cdot \vec{N} \cdot \vec{N} \quad \text{Prik igennem med } \vec{N}$$

$$\vec{N} \cdot \vec{k} = \kappa_n \quad \text{Udnyt } \vec{N}'\text{'s egenskaber}$$

$$\kappa_n = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{e} \quad \text{Indsæt (4)}$$

$$\kappa_n = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{Indsæt } \vec{e} \tag{7}$$

Højre side er udtrykt ved buelængden. Ved hjælp af sammensat differentiation kan vi omskrive til et udtryk, vi kan regne på:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \text{ hvoraf: } \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{N}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \text{ hvoraf: } \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Ved at sammenfatte de to udtryk for vi:

$$\kappa_n = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{\frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt}} = -\frac{\frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \tag{8}$$

Bemærk: I mange fremstillinger af differentialgeometri optræder dette udtryk for krumningen på formen:

$$\kappa_n = \frac{\| \text{fundamentalform} \|}{I \text{ fundamentalform}}$$

Det er dette udtryk vi vil undersøge med henblik på at bestemme maksimum og minimum, og dermed kunne udregne middelkrumningen. Vi vil demonstrere, hvordan vi kan nå frem til målet ved udelukkende at bruge gymnasiematematikken generaliseret til funktioner af to variable.

Vi omskriver udtrykket (8) yderligere ved at se særskilt på tæller og nævner:

Nævner:

Af (3) ovenfor har vi: $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$, dvs:

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|, \text{ hvoraf: } \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)^2$$

Af (1) har vi $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$. Når vi beregner $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ svarer det til at beregne den afledte i linjens retning, dvs. differentiere som om det er en funktion af én variabel.

I øvelse 1.1 undersøgte sammensat differentiation, hvor den ydre funktion er en vektorfunktion, og den indre funktion er en linje givet som en parameterkurve. Den afledte kan beregnes ved at udregne (matrix-)produktet

af $[\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))] = [\vec{r}_u(t), \vec{r}_v(t)]$ og en retningsvektor i den givne retning. Lader vi vektoren $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

være en enhedsvektor i linjens retning, så er altså:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = [\vec{r}_u(t), \vec{r}_v(t)] \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \vec{r}_u(t) \cdot h + \vec{r}_v(t) \cdot k, \tag{9a}$$

hvor $r_u(t)$ og $r_v(t)$ er de partielle afledede efter henholdsvis u og v , evalueret i t .

Heraf får vi så:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)^2 \\ \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= (\vec{r}_u(t) \cdot h + \vec{r}_v(t) \cdot k)^2 \\ \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \vec{r}_u^2 \cdot h^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \cdot h \cdot k + \vec{r}_v^2 \cdot k^2 \end{aligned} \tag{9b}$$

Tæller:

Idet vektoren $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ stadig er en enhedsvektor i linjens retning, har vi som ovenfor:

$$\frac{d\bar{N}(t)}{dt} = \bar{N}_u(t) \cdot h + \bar{N}_v(t) \cdot k, \text{ hvor } \bar{N}_u(t) \text{ og } \bar{N}_v(t) \text{ er de partielle afledede efter henh } u \text{ og } v.$$

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{r}_u(t) \cdot h + \bar{r}_v(t) \cdot k, \text{ hvor } \bar{r}_u(t) \text{ og } \bar{r}_v(t) \text{ er de partielle afledede efter henh } u \text{ og } v.$$

Skalarproduktet i tælleren giver så:

$$-\frac{d\bar{N}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = -(\bar{N}_u(t) \cdot h + \bar{N}_v(t) \cdot k) \cdot (\bar{r}_u(t) \cdot h + \bar{r}_v(t) \cdot k)$$

$$-\frac{d\bar{N}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = -\bar{N}_u(t) \cdot \bar{r}_u(t) \cdot h^2 + (-\bar{N}_v(t) \cdot \bar{r}_u(t) - \bar{N}_u(t) \cdot \bar{r}_v(t)) \cdot h \cdot k + -\bar{N}_v(t) \cdot \bar{r}_v(t) \cdot k^2$$

Øvelse 1.4

a) Argumenter for, at $\bar{N} \perp \bar{r}_u$ og $\bar{N} \perp \bar{r}_v$

b) Differentier udtrykkene $\bar{N} \cdot \bar{r}_u = 0$ og $\bar{N} \cdot \bar{r}_v = 0$, både mht u og v og vis:

$$-\bar{N}_u(t) \cdot \bar{r}_u(t) = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uu}(t)$$

$$-\bar{N}_v(t) \cdot \bar{r}_u(t) = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uv}(t)$$

$$-\bar{N}_u(t) \cdot \bar{r}_v(t) = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vu}(t)$$

$$-\bar{N}_v(t) \cdot \bar{r}_v(t) = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vv}(t)$$

hvor eksempelvis $\bar{r}_{uu}(t)$ betyder den dobbelte partielle afledede mht. u .

Ved at indsætte resultaterne i øvelse 1.4 får vi:

$$-\frac{d\bar{N}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uu}(t) \cdot h^2 + (\bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uv}(t) + \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vu}(t)) \cdot h \cdot k + \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vv}(t) \cdot k^2$$

og ved at udnytte, at de blandede partielle afledede er ens får vi det reduceret til:

$$-\frac{d\bar{N}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uu}(t) \cdot h^2 + 2 \cdot \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uv}(t) \cdot h \cdot k + \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vv}(t) \cdot k^2 \quad (10)$$

Ved at indsætte tæller og nævner i (8) får vi nu et udtryk for krumningen:

$$\kappa_n = \frac{-\frac{d\bar{N}}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \frac{\bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uu}(t) \cdot h^2 + 2 \cdot \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{uv}(t) \cdot h \cdot k + \bar{N}(t) \cdot \bar{r}_{vv}(t) \cdot k^2}{\bar{r}_u^2 \cdot h^2 + 2\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \cdot h \cdot k + \bar{r}_v^2 \cdot k^2} \quad (11)$$

Praxis: Tradition for betegnelser i krumningsformlen

Siden Gauss tid har der været en tradition for, at indføre særlige betegnelser for de 6 centrale størrelser i formelen for krumningen. Det er dog ikke helt standardiseret, så vi følger her Gauss, men anfører de alternative betegnelser, man kan finde i visse fremstillinger, i parentes:

$$\begin{array}{lll}
 E = \vec{r}_u^2 & F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v & G = \vec{r}_v^2 \\
 L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uu} (= r) & M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uv} (= s) & N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv} (= t)
 \end{array}$$

Man kan også finde andre betegnelser anvendt, fx små bogstaver e, f, g i stedet for L, M, N

Med disse betegnelser kan formelen skrives:

$$\kappa_n = \frac{L \cdot h^2 + 2 \cdot M \cdot h \cdot k + N \cdot k^2}{E \cdot h^2 + 2F \cdot h \cdot k + G \cdot k^2} \quad (12)$$

Vektoren $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ er en enhedsvektor i linjens retning. Det betyder specielt, at $\lambda = \frac{k}{h}$.

Øvelse 1.5

Argumenter for, at (12) kan omskrives til følgende formel

$$\kappa_n = \frac{L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2} \quad (13)$$

I udledningen af formelen for snitkrumningen lagde vi koordinatsystemet i tangentplanen, og i denne plan betragtede vi linjer givet ved en bestemt hældningskoefficient λ . Da skalarproduktet er uafhængigt af koordinatsystem, så har vi vist:

Sætning 1. Formlen for snitkrumningen

Lad en flade være parametriseret med vektorfunktionen $\vec{r}(u, v)$, lad P være et punkt på fladen og \vec{N} være en enhedsnormalvektor til fladen i punktet P . Lad enhedsvektoren $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ fastlægge en bestemt retning i

(u, v) -planen, og lad $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ være en parametrisering af den kurve på fladen, der svarer til linjen. Så vil snitplanen bestemt af normalvektoren og retningsvektoren for denne kurve, skære fladen i en snitkurve, hvis krumning kan bestemmes af formelen:

$$\kappa_n = \frac{L \cdot h^2 + 2 \cdot M \cdot h \cdot k + N \cdot k^2}{E \cdot h^2 + 2F \cdot h \cdot k + G \cdot k^2}, \quad (12)$$

hvor symbolerne E, F, G, L, M og N har den sædvanlige betydning.

Hvis $h \neq 0$, og man sætter $\lambda = \frac{k}{h}$, så kan snitkrumningen udtrykkes ved formelen:

$$\kappa_n = \frac{L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2} \quad (13)$$

Bemærkning. Da snitkrumningen udtrykkes med en brøk, hvor h og k indgår på samme måde i tæller og nævner, vil vi kunne anvende en vilkårlig vektor $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ som retningsvektor, idet brøken kan forkortes med længden af denne vektor, hvorved vi har den ønskede enhedsvektor. Overvej dette!

Snitkurvens tangent kan ifølge (9a) ovenfor skrives således: $\vec{r}'(u(t), v(t)) = \vec{r}'_u(t) \cdot h + \vec{r}'_v(t) \cdot k$

Øvelse 1.6

En cylinder med radius ρ og z-aksen som symmetriakse kan parametriseres ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos(v) \\ \rho \cdot \sin(v) \\ u \end{pmatrix}. \text{ Bemærk, at når vi her taler om den afledede efter } u, \vec{r}'_u \text{ så er det den afledede i z-aksens}$$

retning; her er fladen retlinet. Når vi her taler om den afledede efter v , \vec{r}'_v så er det den afledede i den "plane cirkulære bevægelse" rundt om cylinderen.

a) Hvad vil du intuitivt forvente er snitkrumningen for et lodret snit gennem cylinderaksen? Og hvad er den for et vandret snit gennem cylinderen?

b) Bestem de første og anden ordens afledede: $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v, \vec{r}''_{uu}, \vec{r}''_{uv}$ og \vec{r}''_{vv} .

c) Vis, at enhedsnormalvektoren $\vec{N}(u, v)$ til fladen i punktet $P(u, v)$ er $\vec{N}(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos(v) \\ -\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Vis at snitkrumningen efter retningen $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ i (u, v) -planen, dvs efter tangentvektoren $\vec{r}'_u(t) \cdot h + \vec{r}'_v(t) \cdot k$

er lig med:
$$\frac{\rho \cdot k^2}{h^2 + \rho^2 \cdot k^2}$$

e) For et lodret snit er $k = 0$, for et vandret snit er $h = 0$. Bestem den lodrette og vandrette snitkrumning og sammenlign med dit intuitive bud i a).

1.4 Middelkrumningen for parametriserede flader

Vi vender nu tilbage til formlen for middelkrumningen

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\text{maksimale snitkrumning} + \text{minimale snitkrumning})$$

Formel (13) giver os snitkrumningen som en funktion af hældningskoefficienten λ for linjen. Derfor vil vi nu ved hjælp af differentialregning forsøge at bestemme de lokale ekstrema for denne funktion. Vi differentierer derfor denne funktion mht. λ og sætter den afledede funktion lig 0. Derved får vi en ligning frem som opfyldes af de to ekstremumsværdier for κ_n .

Vi anvender brøkreglen: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (Se evt. *Hvad er matematik?* A, kapitel 2, afsnit 4, sætning 9)

$$(\kappa_n(\lambda))' = \left(\frac{L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2}\right)' = \frac{(2N \cdot \lambda + 2M) \cdot (E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2) - (L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2) \cdot (2F + 2G \cdot \lambda)}{(E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2)^2}$$

Øvelse 1.7 Ligning for snitkrumningen, trin 1

En brøk er 0, når tælleren er 0. Argumenter for, at

$$(\kappa_n(\lambda))' = 0, \text{ dvs}$$

$$(2N \cdot \lambda + 2M) \cdot (E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2) - (L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2) \cdot (2F + 2G \cdot \lambda) = 0$$

medfører:

$$\kappa_n = \frac{L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2} = \frac{N \cdot \lambda + M}{F + G \cdot \lambda} \quad (14)$$

Øvelse 1.8

Vis, at ligningen;

$$(2N \cdot \lambda + 2M) \cdot (E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2) - (L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2) \cdot (2F + 2G \cdot \lambda) = 0$$

kan omskrives til

$$(M + N \cdot \lambda) \cdot (E + F \cdot \lambda + \lambda \cdot (F + G \cdot \lambda)) - (L + M \cdot \lambda + \lambda \cdot (M + N \cdot \lambda)) \cdot (F + G \cdot \lambda) = 0$$

og at denne ligning kan reduceres til:

$$(M + N \cdot \lambda) \cdot (E + F \cdot \lambda) - (L + M \cdot \lambda) \cdot (F + G \cdot \lambda) = 0$$

Øvelse 1.9 Ligning for snitkrumningen, trin 2

Vis ud fra øvelse 1.8, at formlen (14) kan udbygges til:

$$\kappa_n = \frac{L + 2 \cdot M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E + 2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2} = \frac{N \cdot \lambda + M}{F + G \cdot \lambda} = \frac{L + M \cdot \lambda}{E + F \cdot \lambda} \quad (15)$$

Lad os opsummere:

Vi ved at der findes et maksimum og et minimum for snitkrumningerne. Hvis der ikke er tale om, at fladen er en plan, så er snitkrumningerne ikke konstant, og vi kan finde maksimum og minimum ved at differentiere og bestemme de to værdier af λ som løsning til $(\kappa_n(\lambda))' = 0$.

(15) giver anledning til de to ligninger:

$$\kappa_n = \frac{L + M \cdot \lambda}{E + F \cdot \lambda} \quad \text{og} \quad \kappa_n = \frac{N \cdot \lambda + M}{F + G \cdot \lambda} \quad (15a)$$

der kan omskrives til ligningssystemet:

$$\kappa_n \cdot (E + F \cdot \lambda) = L + M \cdot \lambda$$

$$\kappa_n \cdot (F + G \cdot \lambda) = N \cdot \lambda + M$$

der kan reduceres til ligningssystemet:

$$(L - \kappa_n \cdot E) + (M - \kappa_n \cdot F) \cdot \lambda = 0$$

$$(M - \kappa_n \cdot F) + (N - \kappa_n \cdot G) \cdot \lambda = 0$$

Dette ligningssystem er opfyldt for maksimum og et minimum for snitkrumningerne κ_n . Vi vil nu udnytte vores viden om løsning af "to ligninger med to ukendte" til at analysere dette ligningssystem. Vi indfører derfor $\lambda = \frac{k}{h}$ og ganger igennem med h . Så får vi:

$$\begin{aligned} (L - \kappa_n \cdot E) \cdot h + (M - \kappa_n \cdot F) \cdot k &= 0 \\ (M - \kappa_n \cdot F) \cdot h + (N - \kappa_n \cdot G) \cdot k &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Dette ligningssystem har altid den trivielle løsning $(h, k) = (0, 0)$.

Men for maksimum og minimum af κ_n findes der jo også en retning, dvs. et (h, k) , som er en løsning til (16).

(Det gør der i virkeligheden for enhver given værdi af κ_n mellem de to yderpunkter).

Dvs. der er mere end én løsning til ligningssystemet. Men så er *ligningssystemets determinant* lig med 0.

Øvelse 1.10 Alternativ: Udnyt viden om parallelle vektorer

Hvis man ikke har arbejdet med determinanter af ligningssystemer, kan man argumentere på følgende måde:

For enhver given værdi af κ_n kan de to ligninger betragtes som ligninger for rette linjer. En løsning til ligningssystemet er en værdi hvor linjerne skærer hinanden. Når de skærer hinanden mere end ét sted, må linjerne være sammenfaldende.

- Opskriv linjernes normalvektorer.
- Argumenter for, at normalvektorerne er parallelle
- Vektorer er parallelle, når deres determinant er 0. Opskriv dette som en ligning.

Når ligningssystemets determinant er lig med 0, får vi altså følgende ligning:

$$(L - \kappa_n \cdot E) \cdot (N - \kappa_n \cdot G) - (M - \kappa_n \cdot F) \cdot (M - \kappa_n \cdot F) = 0 \tag{17}$$

Øvelse 1.11 Opstil en andengradsligning i κ_n

Vis, at (10) kan omskrives til:

$$(E \cdot G - F^2) \cdot \kappa_n^2 - (E \cdot N + G \cdot L - 2F \cdot M) \cdot \kappa_n + (L \cdot N - M^2) = 0 \tag{18}$$

Vi er nu tæt ved målet: Vi er på jagt efter maksimum og minimum af κ_n , og vi er nået frem til en andengradsligning i κ_n . De to løsninger til denne må være de søgte!

Vi reducerer (18) til:

$$\kappa_n^2 - \frac{(E \cdot N + G \cdot L - 2F \cdot M)}{(E \cdot G - F^2)} \cdot \kappa_n + \frac{(L \cdot N - M^2)}{(E \cdot G - F^2)} = 0$$

og vi indfører betegnelserne:

$$H = \frac{(E \cdot N + G \cdot L - 2F \cdot M)}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \qquad K = \frac{(L \cdot N - M^2)}{(E \cdot G - F^2)} \tag{19}$$

Med disse betegnelser får andengradsligningen formen:

$$\kappa_n^2 - 2H \cdot \kappa_n + K = 0$$

Øvelse 1.12 **Formler for κ_{\max} og κ_{\min}**

Vis, at løsningerne nu kan opskrives på formen:

$$\begin{aligned} \kappa_{\max} &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_{\min} &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned} \tag{20}$$

Alt dette giver os nu den ønskede

Sætning 2. Formlen for middelkrumningen og for Gauss-krumningen for flader givet ved en parameterfremstilling

Middelkrumningen i et punkt, der er givet ved $\frac{1}{2} \cdot (\kappa_{\max} + \kappa_{\min})$ kan beregnes ud fra formlen:

$$H = \frac{(E \cdot N + G \cdot L - 2F \cdot M)}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \tag{21}$$

Det Gaussiske krumningsmål i et punkt, der er givet ved $\kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min}$ kan beregnes ud fra formlen

$$K = \frac{(L \cdot N - M^2)}{(E \cdot G - F^2)} \tag{22}$$

hvor symbolerne E, F, G, L, M og N har den sædvanlige betydning:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^2 & F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v & G &= \vec{r}_v^2 \\ L &= \vec{N} \cdot \vec{r}_{uu} & M &= \vec{N} \cdot \vec{r}_{uv} & N &= \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv} \end{aligned}$$

Øvelse 1.13

Færdiggør beviset for sætning 2

Øvelse 1.14 **Beregning af den maksimale og minimale krumning**

Hvis vi har beregnet de to størrelser H og K så giver formlen (20), at vi umiddelbart kan beregne κ_{\max} og κ_{\min}

Øvelse 1.15 **Beregning af i hvilken retning vi har den maksimale og minimale krumning**

Hvis vi kender κ_{\max} og κ_{\min} , så giver (15a) os mulighed for at beregne i hvilken retning vi har maksimal og minimal krumning i et givet punkt. Vis at

$$\kappa_n = \frac{L + M \cdot \lambda}{E + F \cdot \lambda} \quad \text{og} \quad \kappa_n = \frac{N \cdot \lambda + M}{F + G \cdot \lambda} \tag{15a}$$

kan omskrives til:

$$\lambda = -\frac{L-E \cdot \kappa_n}{M-F \cdot \kappa_n} \quad \text{og} \quad \lambda = -\frac{M-F \cdot \kappa_n}{N-G \cdot \kappa_n}$$

Indsæt κ_{\max} og κ_{\min} og beregn λ -værdierne

1.5 To klassiske eksempler: Helikoiden og katenoiden

Vi vil nu illustrere sætning 2 med to af de klassiske flader, som man tidligt indså var minimalflader, nemlig den ordinære vindelflade (helikoiden) og katenoiden som er en omdrejningsflade.

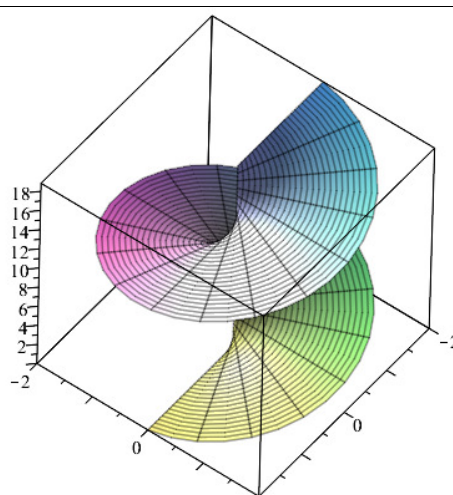
Øvelse 1.16. Miniprojekt: Ordinære vindelflader er minimalflader

En *vindelflade* er defineret som den flade der aftegnes i rummet, når en (uendelig) ret halvlinje drejes cirkulært med jævn fart om en vindelakse, fx z-aksen, alt i mens det punkt, hvor halvlinjen er fæstet på vindelaksen, glider langs vindelaksen. I det normale eksempel, vi vil se på her, glider punktet med jævn hastighed på vindelaksen. Dette kalder vi en *ordinær vindelflade*. Det kan også bevæge sig på andre måder.

Har man taget turen op i Rundetårn, har man bevæget sig på en ordinær vindelflade. I matematisk litteratur kaldes en sådan flade for en *helikoide*.

En jævn bevægelse i xy -planen på en cirkel med radius u kan beskrives med vektorfunktionen:

$$\vec{s}(v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}, \text{ hvor } v \text{ angiver drejningsvinklen.}$$



Hvis vi også lader u være en variabel, har vi beskrevet hele planen i såkaldte polære koordinater:

$$\vec{s}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Kombinerer vi nu denne bevægelse med en opadgående jævn bevægelse får vi en vektorfunktion som:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(\alpha \cdot v) \\ u \cdot \sin(\alpha \cdot v) \\ v \end{pmatrix}, \tag{23}$$

hvor α er en parameter, der bestemmer drejningshastigheden.

- Man kunne også indføre en proportionalitetskonstant på z-koordinaten, $z = \beta \cdot v$. Vis, at et parameterskifte ville kunne føre denne over i (23), hvor parameteren α blev ændret.
- Bestem nu \vec{r}_u og \vec{r}_v .
- Bestem enhedsnormalvektoren $\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$.
- Udregn størrelserne:

$$E = \vec{r}_u^2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$$

$$G = \vec{r}_v^2$$

$$L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uu}$$

$$M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uv}$$

$$N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv}$$

- e) Vis, at middelkrumningen er 0, dvs den ordinære vindelflade er en minimalflade.
- f) Vis, at det Gaussiske krumningsmål er lig med $\frac{-\alpha^2}{(\alpha^2 \cdot u^2 + 1)^2}$.
- g) Forestil dig, at du bevæger dig rundt på en sådan ordinær vindelflade:
 - Hvad sker der med krumningsmålet, når du bevæger dig *bort fra vindelaksen*.
 - Kommenter dette ud fra din intuition om, hvad krumning er.
- h) Hvad sker der med krumningsmålet, når du *skruer op og ned for parameteren α* . Kommenter dette ud fra din intuition om, hvad krumning er.
- i) Vis, at fladen *frembringes af vandrette rette linjer* ved at foretage følgende omskrivninger: Lad $y = k \cdot x$ være en ret linje l i xy -planen. Om punktet $P(x, y)$ på linjen l gælder: $\frac{y}{x} = k$. Et punkt på fladen lodret over dette punkt $P(x, y)$, har koordinaterne:

$$\begin{pmatrix} u \cdot \cos(\alpha \cdot v) \\ u \cdot \sin(\alpha \cdot v) \\ v \end{pmatrix}, \text{ hvor } x = u \cdot \cos(\alpha \cdot v), \quad y = u \cdot \sin(\alpha \cdot v), \quad z = v.$$

- Vis, at relationen $\frac{y}{x} = k$ giver: $k = \frac{y}{x} = \tan(\alpha \cdot v)$

- Vis, at alle punkter på fladen, der ligger lodret over linjen l opfylder: $z = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1}(k)$,

og begrund ud fra dette, at fladen frembringes af vandrette rette linjer.

- j) Vindelfladen er givet ved en parameterfremstilling, og det er indlysende ud fra illustrationen ovenfor, at denne vindelflade ikke er graf for en funktion. Men samtidig så vi i sidste pind, at der gælder følgende ligning:

$$z = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Giv en forklaring på den tilsyneladende modstrid her.

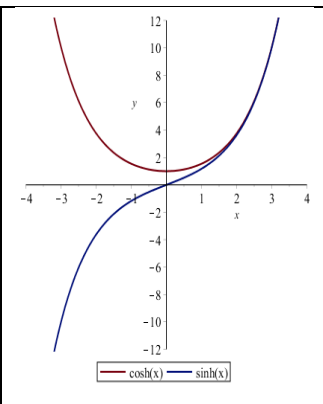
Øvelsen 1.17. Kædelinjen og hyperbolsk cosinus og sinus

Den kurve, som en kæde, der hænger frit mellem to punkter, følger, kaldes for en *kædelinje*. I *Hvad er matematik?* A vises i kapitel 8, at en sådan kædelinje er graf for en funktion af typen: $y = \frac{\alpha}{2} \cdot (e^{x/\alpha} + e^{-x/\alpha})$.

Alene dette begrundes, hvorfor det er interessant at studere funktionerne.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funktionerne kaldes for henholdsvis *hyperbolsk cosinus* og *hyperbolsk sinus*. De mærkelige navne vil blive begrundet i det følgende.



a) Vis: $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ og $(\sinh(x))' = \cosh(x)$

b) $(\cosh(x))'' = \cosh(x)$ og $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$

Sammenlign med de tilsvarende formler for differentiation af cosinus og sinus.

c) Vis: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Kender du en formel, der involverer cosinus og sinus, og som minder om denne?

d) Repeter kort følgende: I et almindeligt koordinatsystem har vi, at:

– Ligningen $x^2 + y^2 = r^2$ fremstiller en *circle* med centrum i $(0,0)$ og radius r .

– Ligningen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2$ fremstiller en *ellipse* med centrum i $(0,0)$ og a og b som de to halvaksler.

– Ligningen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = r^2$ fremstiller en *hyperbel* med centrum i $(0,0)$ og a og b som de to halvaksler.

e) (Du kan finde materialer om ellipser og hyperbler en del steder i lærebogssystemet *Hvad er matematik?*, fx om ellipsers egenskaber i B-bogens kapitel 0, og om hyperblens egenskaber i C-bogens projekt 8.10).

f) Betragt vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$

g) Vis, at banekurven (grafen for vektorfunktionen) er en hyperbel.

Resultaterne i øvelsen begrundes betegnelserne hyperbolsk cosinus og sinus

Øvelse 1.18 Omdrejningsflader – Katenoiden er en minimalflade

I integralregningen indføres begrebet omdrejningslegemer. Den *flade* der dannes, når grafen for en funktion f drejes 360° om 1.-aksen, og som er overfladen af omdrejningslegemet, kaldes for en omdrejningsflade. Det er en enkel sag at give en parameterfremstilling for en omdrejningsflade, idet ethvert snit gennem omdrejningslegemet og vinkelret på 1.-aksen danner en cirkel.

- a) Betragt det ortogonale snit, hvor 1. koordinaten er x , og begrund, at dette er en cirkel med radius $f(x)$.
- b) Lad v være en parameterværdi, der angiver hvor meget planen med grafen er drejet i forhold til udgangsstillingen i xy -planen, og argumenter for, at omdrejningsfladen har parameterfremstillingen:

$$\vec{r}(x, v) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cdot \cos(v) \\ f(x) \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

- c) Omdrejningsfladen hørende til en kædelinje kaldes for en katenoide. Vis, at en katenoide har en parameterfremstilling af formen:

$$\vec{r}(x, v) = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \cdot \cosh(x/\alpha) \cdot \cos(v) \\ \alpha \cdot \cosh(x/\alpha) \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

- d) Bestem nu \vec{r}_x og \vec{r}_v

- e) Bestem enhedsnormalvektoren $\vec{N} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_v|}$

- f) Udregn størrelserne:

$$\begin{array}{lll} E = \vec{r}_x^2 & F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_v & G = \vec{r}_v^2 \\ L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{xx} & M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{xv} & N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv} \end{array}$$

- g) Vis, at middelkrumningen er 0, dvs katenoiden er en minimalflade.

- h) Vis, at det Gaussiske krumningsmål for katenoiden er overalt negativ og er uafhængig af vinklen v . Hvordan stemmer dette resultat med din intuition om formen af en omdrejningsflade? (*Hint*: Husk, at det Gaussiske krumningsmål i et givet punkt er lig med produktet af den maksimale og minimale krumning i punktet).

1.6 Middelkrumningen for flader, der er givet ved en ligning

Ofte er en flade givet som grafen for en funktion af to variable, dvs givet ved en ligning:

$$z = f(x, y)$$

Derfor vil vi oversætte formelen i sætning 2 til en formel der umiddelbart referer til en forskrift for en funktion f . Vi skal grundlæggende oversætte definitionerne på E, F, G, L, M og N fra vektorfunktioner til almindelige reelle funktioner af to variable. Betegnelserne stod for følgende:

Praxis: Tradition for betegnelser i krumningsformlerne

For en vektorfunktion $\vec{r}(u, v)$ indfører vi betegnelserne

$$\begin{array}{lll} E = \vec{r}_u^2 & F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v & G = \vec{r}_v^2 \\ L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uu} & M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uv} & N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv} \end{array}$$

hvor $\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ er en enhedsvektor i normalens retning

Grafen for en funktion af to variable kan betragtes som grafen for vektorfunktionen:

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

De partielt afledede og deres krydsprodukt bestemmes:

Øvelse 1.17

a) Bestem \vec{r}_u og \vec{r}_v og vis:

$$E = \vec{r}_u^2 = 1 + f_x^2, \quad G = \vec{r}_v^2 = 1 + f_y^2, \quad F = f_x \cdot f_y$$

b) Bestem $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$, og vis:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Bestem \vec{r}_{uu} , \vec{r}_{uv} og \vec{r}_{vv} , og vis

$$\vec{r}_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{xx} \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{xy} \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$L = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad M = \vec{N} \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad N = \vec{N} \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

Vis nu:

Sætning 3. Formlen for middelkrumningen og for Gauss-krumningen for flader givet ved en ligning

Middelkrumningen i et punkt, der er givet ved $\frac{1}{2} \cdot (\kappa_{\max} + \kappa_{\min})$ kan beregnes ud fra formlen:

$$H = \frac{(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy}}{2 \cdot (1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (23)$$

Det Gaussiske krumningsmål i et punkt, der er givet ved $\kappa_{\max} \cdot \kappa_{\min}$ kan beregnes ud fra formlen

$$K = \frac{f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} \quad (24)$$

Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

Øvelse 1.18

Færdiggør beviset for sætning 3

Øvelse 1.19

Betragt funktionen:

$$f(x, y) = \cos(x) + \sin(y) - 2$$

a) Vis:
$$H = -\frac{\cos(x) \cdot (1 + \sin^2(y)) + \cos(y) \cdot (1 + \sin^2(x))}{2 \cdot (1 + \sin^2(x) + \sin^2(y))}$$

$$K = \frac{\cos(x) \cdot \cos(y)}{(1 + \sin^2(x) + \sin^2(y))^2}$$

- b) Tegn grafen af f .
- c) Udregn middelkrumningen og Gauss krumningen i punktet $(0, 0)$.
- d) Bestem ved hjælp af formel (20) den maksimale og minimale krumning i punktet $(0, 0)$. Hvilken konklusion vil du drage om fladens forløb omkring dette punkt?

2. Nogle klassiske minimalflader

Sætning 3 giver os et værktøj til at ”gå på jagt” efter flader med konstant middelkrumning og specielt efter minimalflader, dvs. flader med konstant middelkrumning lig 0. Vi får umiddelbart følgende sætning, hvor vi har byttet om på to af leddene:

Sætning 4. Minimalflader karakteriseret gennem en partiel differentialligning

Antag en flade er givet eksplicit som graf for en funktion af to variable: $z = f(x, y)$. Så gælder, at fladen er en minimalflade, hvis

$$(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0 \quad (25)$$

Man kan også møde den i en anden symbolsk form:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (25a)$$

Vi foretrækker (25), da det her er lettere at se de partielle afledede som selv værende funktioner, og ikke blot værdier. For at finde en minimalflade skal vi altså løse den partielle differentialligning (25).

Tilbage i starten af 1800-tallet havde man ingen metoder til at løse sådanne ligninger med. Så de klassiske minimalflader blev til dels fundet ved rent held: Man kendte allerede en række vigtige flader og udregnede Gauss-krumningen og middelkrumningen for disse og fandt derved nogle gode eksempler på minimalflader blandt de klassiske flader. Blandt disse var den ordinære vindelflade (helikoiden) og katenoiden, som vi behandlede i afsnit 1.4

Vi viser metoden med et særligt simpelt og ikke særligt interessant eksempel, men ideen fremstår tydeligere på den måde

Lad os tage udgangspunkt i en sædvanlig funktion $g(x)$ og udvide den til en funktion af to variable

$$f(x, y) = g(x) .$$

Da vi har fjernet afhængigheden af y vil enhver ændring alene i y -koordinaten (dvs. vi bevæger os parallelt med y -aksen) bevare højden af grafen. Fladen er derfor en retlinjet flade med frembringere, der er indbyrdes parallelle med y -aksen.

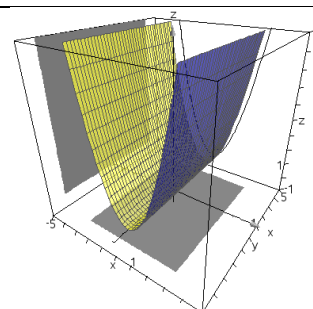
Øvelse 2.1

Hvis $g(x) = x^2$, er grafen for g standardparablen.

Grafen for $f(x, y) = x^2$ fremkommer som en parabel, der glider langs y -aksen

Grafen kaldes en parabolisk cylinder.

Udregn middelkrumningen og Gauss-krumningen i et vilkårligt punkt. Er det en minimalflade?



I Øvelse 2.1 viste du forhåbentlig, at den paraboliske cylinder ikke er en minimalflade. Men kan en sådan flade givet ved $f(x, y) = g(x)$ overhovedet være en minimalflade? Vi udregner de afledede

$$f_x = g'(x) \quad f_{xx} = g''(x)$$

Alle andre afledede er nul. Differentialligningen for minimalflader forenkles derfor til

$$\begin{aligned} (1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} &= 0 \\ (1 + g'(x)^2) \cdot 0 - 2 \cdot g'(x) \cdot 0 \cdot 0 + (1 + 0) \cdot g''(x) &= 0 \\ g''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Denne ligning er et stamfunktionsproblem, og løsningen er:

$$g(x) = a \cdot x + b$$

Fladen kan altså kun være en minimalflade, hvis den oprindelige funktion er en lineær funktion, og fladen derfor er en plan. Enhver plan er selvfølgelig en minimalflade, så eksemplet er ikke særligt interessant, men det viser dog at der er mulighed for at reducere den partielle differentialligning til en sædvanlig anden ordens differentialligning. Denne vil da typisk være af formen:

$$g'' = h(x, g')$$

Hvis denne differentialligning kan løses, kan det normalt ske ret enkelt med et moderne værktøjsprogram som Maple.

Bemærkning:

Man kan også håndregne sig frem ved at omskrive til et system af koblede første ordens differentialligninger:

$$\begin{aligned} g' &= u \\ u' = g'' &= h(x, g') = h(x, u) \end{aligned} \tag{26}$$

Her er den anden differentialligning en sædvanlig differentialligning i u , der kan løses fx ved separation af de variable (eller ved hjælp af CAS-værktøjet). Og når først, vi har fundet et eksplicit løsningsudtryk for u , kan vi nemt løse den første differentialligning og dermed finde et udtryk for g .

(Denne sammenhæng mellem andenordens differentialligninger og koblede differentialligninger kan du fx finde behandlet i et appendiks til projektmaterialer 2 til Susanne Ditlevsens film, og i projekt 8.7 til Hvad er matematik? A)

2.1 Vindelflader som minimalflader

Hvis en vindelflade har z-aksen som vindelakse, vil dens graf bestå af en ret linje vinkelret på akse, der snurres rundt om akse i takt med at den hæves. Højden for vindelflader vil derfor kun afhænge af hvilken af de rette linjer gennem vindelaksen vi er på. Deres projektion i x - y -planen er givet ved en ret linje på formen

$$y = \alpha \cdot x$$

$$\alpha = \frac{y}{x}$$

Forskriften for en vindelflade er derfor givet på formen

$$z = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(\alpha), \quad \text{hvor} \quad \alpha = \frac{y}{x} \quad (27)$$

(Bemærk: I afsnit 1.5 betragtede vi en ordinær vindelflade, hvor bevægelsen op ad z-aksen foregår jævnt, og viste, at dette er en minimalflade. Her betragter vi en vilkårlig bevægelse op af z-aksen).

Vi kan nu spørge: Hvilke vindelflader er også minimalflader. Vi skal da først have styr på de afledede:

Øvelse 2.2. Opstilling af differentialligningen for vindelflader

Vi vil nu indsætte funktionstypen (27) i

$$(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0 \quad (25)$$

Det mest enkle er at udnytte et program som Maple. Se evt. i appendiks.

Man kan også håndregne det efter følgende opskrift:

- a) Gør rede for at der gælder

$$f_x = g'(\alpha) \cdot \alpha_x$$

$$f_y = g'(\alpha) \cdot \alpha_y$$

$$f_{xx} = g''(\alpha) \cdot (\alpha_x)^2 + g'(\alpha) \cdot \alpha_{xx} \quad f_{xy} = g''(\alpha) \cdot \alpha_x \cdot \alpha_y + g'(\alpha) \cdot \alpha_{xy} \quad f_{yy} = g''(\alpha) \cdot (\alpha_y)^2 + g'(\alpha) \cdot \alpha_{yy}$$

- b) Vis, at: $\alpha_x = -\frac{y}{x^2}$ $\alpha_y = \frac{1}{x}$ $\alpha_{xx} = 2\frac{y}{x^3}$ $\alpha_{xy} = -\frac{1}{x^2}$ $\alpha_{yy} = 0$

- c) Opstil differentialligningen for vindelfunktionen g , dvs. indsæt ovenstående i:

$$(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0$$

og reducer.

Under alle omstændigheder skulle du nu gerne have vist den følgende sætning:

Sætning 5a. Vindelflader som minimalflader I

En vindelflade $z = f(x, y) = g(\alpha)$, $\alpha = \frac{y}{x}$ er en minimalflade, netop når vindelfunktionen $g(\alpha)$ løser differentialligningen:

$$g''(\alpha) \cdot (1 + \alpha^2) + 2 \cdot g'(\alpha) \cdot \alpha = 0 \quad (28)$$

Løs denne differentialligning med dit værktøjsprogram – se evt appendiks - og vis:

Sætning 5b. Vindelflader som minimalflader II

En vindelflade $z = f(x, y) = g(\alpha)$, $\alpha = \frac{y}{x}$ er en minimalflade, netop når vindelfunktionen g har forskriften:

$$g(\alpha) = c_1 \cdot \tan^{-1}(\alpha) + c_2 \quad (29)$$

Tilfældet $c_1 = 0$ giver at g er konstant (svarende til at fladen er en vandret plan)

Tilfældet $c_1 \neq 0$ giver en helikoide.

Bemærkning: Vil man foretrække at løse ved håndregning kan man følge teknikken i 26, se evt. appendiks

I afsnit 1.5 beviste vi, at helikoiden faktisk er en minimalflade.

2.2 Omdrejningsflader som minimalflader

Hvis en omdrejningsflade har z -aksen som omdrejningsakse, vil dens graf bestå af cirkler rundt langs akse. Højden for omdrejningsfladen vil derfor være den samme for alle punkter med afstanden ρ ind til omdrejningsaksen. Denne afstand er givet ved:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Højden fastlægges af en funktion g af én variabel. Tegner vi grafen for g i fx zx -planen, hvor z er den uafhængige variabel, så fremkommer omdrejningsfladen ud fra det sædvanlige omdrejningslegene, genereret af grafen for g .

Forskriften for omdrejningsfladen er derfor givet på formen

$$z = f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(\rho), \quad \text{hvor } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30)$$

Vi kan nu spørge om der findes omdrejningsflader, der også er minimalflader. Vi skal da først have styr på de afledede:

Øvelse 2.3. Opstilling af differentialligningen for omdrejningsflader

Indsæt funktionstypen (30) i

$$(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0 \quad (25)$$

Det mest enkle er at udnytte et program som Maple. Se evt. i appendiks.

Man kan også håndregne det efter samme opskrift som i øvelse 2.2

Under alle omstændigheder skulle du nå frem til følgende:

Sætning 6a. Omdrejningsflader som minimalflader II

En omdrejningsflade $z = f(x, y) = g(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ er en minimalflade, netop når omdrejningsfunktionen $g(\rho)$ løser differentialligningen

$$g''(\rho) \cdot \rho + g'(\rho) \cdot (1 + g'(\rho)^2) = 0 \quad (31)$$

Løs denne differentialligning med dit værktøjsprogram (se evt. appendiks) og vis:

Sætning 6b. Omdrejningsflader som minimalflader II

En omdrejningsflade $z = f(x, y) = g(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ er en minimalflade, netop når omdrejningsfunktionen g har forskriften:

$$g(\rho) = c_1 \cdot \ln \left(\frac{\rho}{c_1} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{c_1}\right)^2 - 1} \right) + c_2 \quad (32)$$

Tilfældet $c_1 = 0$ giver en konstant funktion, svarende til at fladen er en vandret plan

Tilfældet $c_1 \neq 0$ giver en katenoide

Den sidste påstand kan vi se, hvis vi løser (32) mht ρ :

Øvelse 2.4. Kædelinjen og katenoiden.

$z = g(\rho)$ angiver afstanden i z -aksens retning, over punktet (x, y) . Vi begrænser os til at se på xz -planen. Her er $z = g(x)$ afstanden i z -aksens retning, over punktet x . Udfør selv en tegning af situationen: Vi drejer nu xz -planen så z -aksen ligger vandret, og x -aksen er lodret. I denne tiltede plan ligger den kurve, der er drejet om z -aksen som en graf, men vi har udtrykt z om funktion af x . Vi skal have udtrykt x , der her er den afhængige variabel, som en funktion af z .

Vis at vi ved at løse $z = c_1 \cdot \ln \left(\frac{x}{c_1} + \sqrt{\left(\frac{x}{c_1}\right)^2 - 1} \right) + c_2$ mht. x får en løsning, der kan reduceres til

$$x = c_1 \cdot \frac{e^{\frac{c_2 - z}{c_1}} + e^{-\frac{c_2 - z}{c_1}}}{2} \quad (33)$$

hvilket netop er ligningen for en kædelinje. Hvis $c_2 = 0$ ligger kædelinjen traditionelt, symmetrisk om 0. Generelt ligger den symmetrisk om c_2 .

Dvs blandt de ikke trivielle omdrejningsflader er katenoiden den eneste minimalflade.

I afsnit 1.5 så vi, at den faktisk er en minimalflade.

2.3 Forskydningsflader som minimalflader

Som vi tidligere har set er den hyperbolske parabeloide

$$z = x^2 - y^2$$

ikke en minimalflade. Den hyperbolske parabeloide er en forskydningsflade, dvs. den kan frembringes af en parabel, der glider langs en anden parabel. Spørgsmålet er nu om der findes forskydningsflader som rent faktisk er minimalflader. Vi ser derfor på forskydningsflader på formen

$$z = f(x, y) = g(x) - g(y) \quad (34)$$

For at svare på, om der findes forskydningsflader, der også er minimalflader, skal vi først have styr på de afledede.

Øvelse 2.5. Opstilling af differentialligningen for forskydningsflader

Vi vil nu indsætte funktionstypen (34) i

$$(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0 \tag{25}$$

Det mest enkle er at udnytte et program som Maple. Se evt. i appendiks.

Man kan også håndregne det efter følgende opskrift:

a) Gør rede for at der gælder

d) $f_x = g'(x)$ $f_y = -g'(y)$

e) $f_{xx} = g''(x)$ $f_{xy} = 0$ $f_{yy} = -g''(y)$

b) Indsæt disse udtryk i differentialligningen for minimalflader

f) $(1 + f_x^2) \cdot f_{yy} - 2f_x \cdot f_y \cdot f_{xy} + (1 + f_y^2) \cdot f_{xx} = 0$

c) Omskriv så venstre side kun indeholder x og højre side kun indeholder y, og vis, at vi får ligningen:

g)
$$\frac{g''(x)}{(1 + (g'(x))^2)} = \frac{g''(y)}{(1 + (g'(y))^2)}$$

d) Argumenter for, at hvis dette er opfyldt for alle x og alle y, så er udtrykkene på højre og venstre side begge lig med en konstant:

$$\frac{g''(x)}{(1 + (g'(x))^2)} = k \tag{35}$$

Du skulle nu gerne have vist den følgende sætning:

Sætning 7a: Forskydningsflader som minimalflader

En forskydningsflade $z = f(x, y) = g(x) - g(y)$ er en minimalflade, netop når forskydningsfunktionen $g(x)$ løser differentialligningen $g''(x) = k \cdot (1 + g'(x)^2)$.

Vi ser først, at tilfældet $k = 0$ giver, at $g(x)$ er en lineær funktion.

Vi løser dernæst differentialligningen i det genrelle tilfælde ved først at bestemme $u = g'$ af differentialligningen

$$u' = k \cdot (1 + u^2)$$

og dernæst bestemme g .

Øvelse 2.6. Løsning af differentialligningen for forskydningsfunktionen.

a) Løs differentialligningen $u' = k \cdot (1 + u^2)$ og vis:

$$u(x) = \tan(k(1 + c_1 \cdot x))$$

b) Løs derefter differentialligningen $g'(x) = \tan(k(1 + c_1 \cdot x))$ og vis:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\tan(k(1 + c_1 \cdot x)) \right)^2 \right) + c_2$$

c) Ved at anvende formlen: $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$ kan vi omskrive:

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{(\cos(k(1 + c_1 \cdot x)))^2} \right) + c_2$$

d) Udnyt logaritmeregnereglerne og omskriv til:

$$g(x) = -\ln(\cos(k(1 + c_1 \cdot x))) + c_2$$

e) Indsæt nu i (34): $z = f(x, y) = g(x) - g(y)$ og vis:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(x) - g(y) \\ &= -\ln(\cos(k(1 + c_1 \cdot x))) + c_2 + \ln(\cos(k(1 + c_1 \cdot y))) - c_2 \\ &= \ln \left(\frac{\cos(k(1 + c_1 \cdot y))}{\cos(k(1 + c_1 \cdot x))} \right) \end{aligned}$$

Vi sammenfatter i følgende sætning:

Sætning 7b: Forskydningsflader som minimalflader

En forskydningsflade $z = f(x, y) = g(x) - g(y)$ er en minimalflade, netop når *forskydningsfunktionen* g - enten er lineær (svarende til at fladen er en vandret/skrå plan)

- eller har forskriften $g(x) = -\ln(\cos(k(1 + c_1 \cdot x))) + c_2$

I det sidste tilfælde har forskydningsfladen ligningen:

$$f(x, y) = \frac{1}{k} \cdot \ln \left(\frac{\cos(k \cdot y + c)}{\cos(k \cdot x + c)} \right)$$

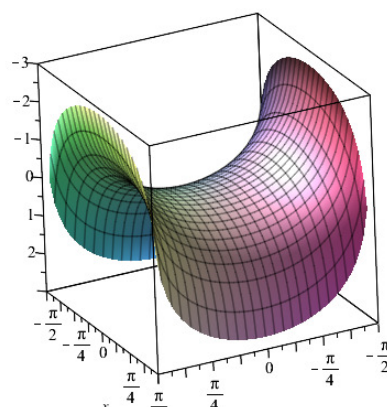
Denne minimalflade fandt Heinrich Scherk i 1834. På illustrationen er indtegnet versionen med $k = 1$ og $c = 0$. Det udspændte net antyder, at middelkrumningen, der er gennemsnittet af den maksimale og minimale krumning, overalt er 0, altså at det er en minimalflade.

Scherks flade var den tredje ikke-trivielle minimalflade der blev fundet, de første to er de, vi har gennemgået ovenfor:

Katenoiden, der blev fundet så tidligt som i 1744 af Euler, var det første eksempel på en minimalflade, der blev opdaget.

Helikoiden, der blev fundet i 1774 af Euler, og uafhængigt af ham i 1776 af Meusnier var det andet eksempel på en minimalflade, der blev opdaget.

I dag kender man et væld af minimalflader, og det er et vigtigt forskningsfelt med mange praktiske og erkendelsesmæssige resultater. Prøv at søge på *minimal surfaces* i din browser.



Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

3. Roulettefigurer

(I tilknytning til dette kapitel kan du hente nogle slides samt en filmsekvens med Steen Markvorsen, hvor han introducerer disse roulettefigurer i sin fortælling om skumstrukturer.)

Når vi ruller et bestemt geometrisk objekt langs en akse, så kan vi spørge, hvilken kurve tegnes af et punkt, vi har markeret på det geometriske objekt, mens dette ruller? Denne kurve kaldes en roulettefigur. De mest interessante roulettekurver fremkommer ved at rulle de såkaldte keglesnit (cirkler og ellipser, parabler og hyperbler) langs en akse og så lade keglesnittets brændpunkt tegne en kurve. Det viser sig nemlig, at lader vi disse kurver rotere om aksens og frembringe omdrejningslegemer, så vil omdrejningsfladerne have konstant middelkrumning! Og ikke nok med det – det er de eneste omdrejningsflader, der har konstant middelkrumning!

Dette resultat blev vist af den franske matematiker Charles-Eugene Delaunay (1816-1872) i 1841, og fladerne er i dag opkaldt efter ham – de kaldes Delaunay flader. Så vi udvider perspektivet i dette afsnit fra minimalflader til flader med konstant middelkrumning. Minimalfladerne er klart nok en delmængde heraf.

Delaunays resultat motiverer, at vi studerer disse roulettefigurer nærmere. Den simpleste af disse fremkommer ved at lade en cirkel rulle, og undersøge den kurve, som brændpunktet, dvs cirkelens centrum tegner. Det er jo en ret linje, der altså er en roulettefigur.

Når vi drejer linjen om aksens fremkommer en cylinder. Og cylinderfladen har, som Steen Markvorsen omtaler i filmen, konstant middelkrumning. Er cirkelens radius r , så bliver dette også radius i cylinderen. Cylinderens krumning i længdeaksens retning er klart lig med 0. Krumningen vinkelret herpå er som krumningen for en cirkel med radius r , dvs $\frac{1}{r}$. Middelkrumningen i et tilfældigt punkt er derfor $\frac{1}{2} \cdot \left(0 + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2r}$.

Cirklen er én måde en ellipse kan udarte på: Her er de to brændpunkter smeltet sammen til ét. En anden måde, en ellipse kan udarte på er, at lilleaksen bliver 0, så ellipsen bliver til en ret linje. Når vi lader en ret linje rulle på en anden linje, og spørger hvilken kurve linjens endepunkt tegner, så er det klart en række cirkelbuer. Roterer vi dem får vi en række kugleflader. På en kugleflade vil to vilkårlige ortogonale retninger hver være en del af cirkler med krumning lig med $\frac{1}{r}$, så kuglefladen har, som omtalt i filmen, konstant middelkrumning lig med $\frac{1}{r}$.

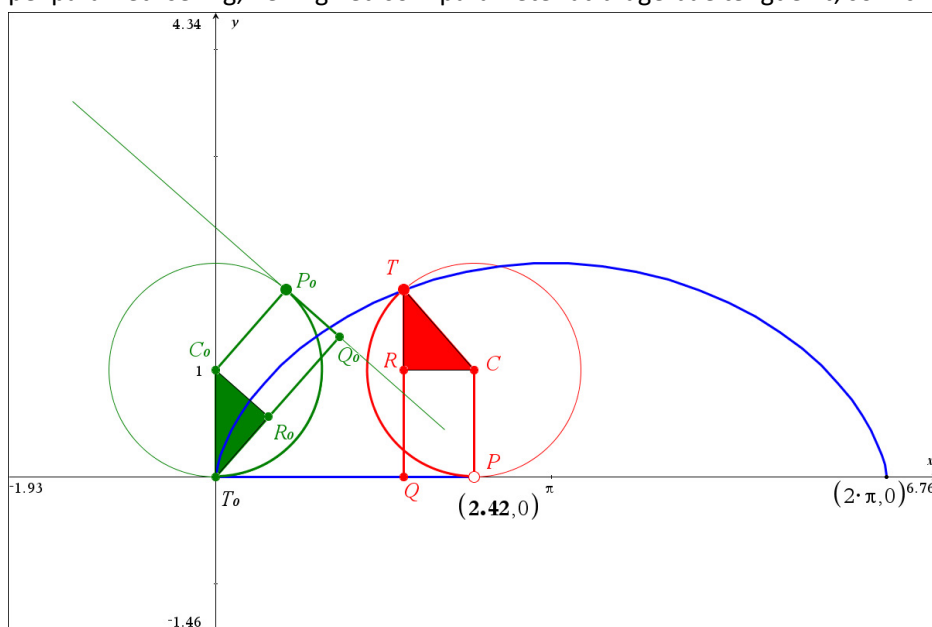
Det bliver straks vanskeligere, når vi ser på de "almindelige" keglesnit, parabler, ellipser og hyperbler. I det følgende vil vi undersøge Delaunay fladerne hørende til parabler (*katenoider*) og til ellipser (*unduloider*). Vi vil her lade hyperblens Delaunay flade (*nodoiden*) ligge. Som opvarmning til de geometriske og analytiske metoder, vi vil anvende, ser vi på den mest kendte roulette figur, nemlig cykloiden.

Cykloiden fremkommer når man følger et randpunkt på en cirkel (et hjul), der ruller langs en ret linje. Vi har behandlet cykloiden i forbindelse med vektorfunktioner. Det er forholdsvis nemt at konstruere disse rouletter geometrisk. Det er lidt sværere at holde styr på dem analytisk, så det vil vi også kigge på.

Den generelle teknik består i at opretholde et *dobbelt perspektiv på rouletten*. Vi kan enten se på den fra *den rette linjes perspektiv*, hvor den rette linje holdes fast, og hvor den rette linje er en tangent til *den rullende figur*. Men vi kan også se på den *fra figurens perspektiv*, dvs. holde figuren fast og i stedet lade linjen, der er en tangent, rulle langs figuren. I begge tilfælde kan vi regne på, hvor det frembringende punkt er i forhold til de relevante koordinataksler. Det er nemmest at forklare de to ækvivalente synsvinkler ud fra de konkrete eksempler.

3.1 Cykloiden

I dette tilfælde har vi en cirkel, der ruller langs en ret linje. På randen af cirklen er der et fast punkt. Hvilken kurve tegner dette punkt, mens cirklen rulle? Kurven kaldes en *cykloide*. Den undersøger vi nu nærmere. For nemheds skyld bruger vi en enhedscirkel, der ruller langs x-aksen. I dette tilfælde findes der en meget simpel parametrisering, nemlig ved som parameter at bruge buelængden t , som cirklen har rullet.



Cykloidens parameterfremstilling

Cykloiden fremkommer ved at lade randpunktet T afsætte et spor. Vi ser da, at x -koordinaten for randpunktet er givet ved

$$x = \widehat{TP} - PQ$$

Tilsvarende er y -koordinaten givet ved

$$y = TQ$$

Her aflæses buelængder og kordestykker på den røde cirkel. Men de kunne lige så godt være aflæst på den grønne cirkel, noget vi skal udnytte i forbindelse med de mere komplicerede roulettefigurer frembragt af parablenes brændpunkt, henholdsvis ellipsens brændpunkt.

Øvelse 3.1

- a) Gør rede for at korden PQ er givet ved

$$PQ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$$

- b) Gør rede for at korden TR er givet ved

$$TR = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos(t)$$

- c) Gør rede for at parameterfremstillingen for cykloiden derfor er givet ved

$$x = t - \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

- d) Tegn cykloiden både som et geometrisk sted, hvor du lader cirklen rulle, dvs. afbilder randpunktet T som funktion af røringsspunktet P , og som parameterkurve.

Omdrejningslegemet hørende til cykloiden

Øvelse 3.2: Illustration af Cykloiden

Gør rede for at ved drejning om x -aksen får omdrejningslegemet frembragt af cykloiden, netop parameterfremstillingen

$$(t - \sin(t), (1 - \cos(t)) \cdot \cos(u), (1 - \cos(t)) \cdot \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

hvor u er drejningsvinklen omkring x -aksen. Tegn omdrejningslegemet i et 3d-graftegneprogram.

Det er oplagt at cykloiden også kan opfattes som en graf for en funktion f , men forsøger vi at eliminere parameteren t , skal vi løse en transcendent ligning $x = t - \sin(t)$, der ikke har en analytisk løsning. Når vi skal udregne forskellige karakteristika hørende til cykloiden, såsom buelængder, arealer og rumfang kan vi derfor godt tage udgangspunkt i de velkendte formler for grafen for en funktion, men når integralerne skal udregnes sker det ved substitution af parameterfremstillingen. Undervejs får vi brug for nogle simple trigonometriske formler: Den pythagoræiske identitet og formlerne for de dobbelte vinkler:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

$$\sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

Øvelse 3.3. Buelængde og areal for cykloiden

- a) Gør rede for, at der gælder de følgende formler for buelængden og find herved buelængden hørende til cykloiden:

$$s = \int_{x=0}^{x=2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

- b) Gør rede for, at der gælder de følgende formler for arealet og find herved arealet hørende til cykloiden:

$$A = \int_{x=0}^{x=2\pi} y \, dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} y \cdot \frac{dx}{dt} \, dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)^4 \, dt$$

Giv en passende geometrisk tolkning af arealformlen.

Øvelse 3.4: Overfladeareal og rumfang af omdrejningslegemet

- a) Gør rede for, at der gælder de følgende formler for overfladearealet og find herved overfladearealet hørende til cykloidens omdrejningslegeme:

$$O = \int_{x=0}^{x=2\pi} 2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \cdot \int_{t=0}^{t=2\pi} y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt = 8\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)^3 \, dt$$

- b) Gør rede for, at der gælder de følgende formler for rumfanget og find herved rumfanget hørende til cykloidens omdrejningslegeme:

$$V = \int_{x=0}^{x=2\pi} \pi \cdot y^2 \, dx = \pi \cdot \int_{t=0}^{t=2\pi} y^2 \cdot \frac{dx}{dt} \, dt = 8\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)^6 \, dt$$

3.2 Kædelinjen

Vi skal bruge en snedig parameterfremstilling for parabelen. Vi tager udgangspunkt i enhedsparabelen, hvor afstanden mellem brændpunktet F og toppunktet T netop er 1. Der er tradition for at lægge den vandret i koordinatsystemet. Ligningen for enhedsparabelen er da givet ved $y^2 = 4 \cdot x$.

Lidt grundlæggende hyperbolsk trigonometri:

Du får brug for at kunne regne på de *hyperbolsk-trigonometriske funktioner*, noget dit CAS-program kun i et vist omfang vil være dig behjælpeligt med.

Definition. Lige og ulige funktioner

En funktion f kaldes *lige*, hvis grafen er symmetrisk omkring y -aksen, dvs. $f(-x) = f(x)$.

En funktion kaldes *ulige*, hvis grafen er symmetrisk omkring Origo $(0,0)$, dvs. $f(-x) = -f(x)$.

Betegnelsen lige og ulige kommer fra potensfunktionerne:

Øvelse 3.5. Potensfunktioner

- a) Gør rede for at en potensfunktion x^n er lige netop når potensen n er lige.
 b) Gør rede for at en potensfunktion x^n er ulige netop når potensen n er ulige.

- c) Gør rede for at et polynomium er lige, netop når det kun indeholder lige potenser, dvs. det er på formen: $p(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + \dots + a_{2k} \cdot x^{2k}$
- d) Gør rede for at et polynomium er ulige, netop når det kun indeholder ulige potenser, dvs. det er på formen: $p(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + a_5 \cdot x^5 + \dots + a_{2k+1} \cdot x^{2k+1}$

Det sidste kan udvides til taylorrækker og potensrækker, dvs. til alle analytiske funktioner, noget vi ikke vil følge nærmere her. Ud fra øvelsen er det oplagt at ethvert polynomium kan spaltes entydigt som en sum af et lige polynomium og et ulige polynomium. Men det gælder faktisk for enhver funktion at den kan spalts entydigt som en sum af en lige funktion og en ulige funktion:

Øvelse 3.6. Enhver funktion er sum af en lige og en ulige

Gør rede for at funktion f kan spaltes entydigt som summen af den lige funktion og den ulige funktion:

$$f_{\text{lige}}(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + f(-x)) \quad f_{\text{ulige}}(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) - f(-x))$$

Nogle funktioner er født lige eller ulige. Det gælder fx de sædvanlige trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$. Mens andre er født blandede. Det gælder fx den naturlige eksponentialfunktion e^x . Det fører til definitionen af de hyperbolske trigonometriske funktioner:

Definition. De hyperbolske trigonometriske funktioner

Den lige del af den naturlige eksponentialfunktion kaldes $\cosh(x)$ (læses: cosinus hyperbolsk af x), dvs.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Grafen for $\cosh(x)$ kaldes en **kædelinje**.

Den ulige del af den naturlige eksponentialfunktion kaldes $\sinh(x)$ (læses: sinus hyperbolsk af x), dvs.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Endelig defineres den hyperbolske tangensfunktion som kvotienten mellem $\sinh(x)$ og $\cosh(x)$, dvs.

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Øvelse 3.7:

- a) Tegn graferne for $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ og $\tanh(x)$.
- b) Vis de grundlæggende hyperbolske-trigonometriske formler:

$$\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$$

$$\cosh(2t) = \cosh(t)^2 + \sinh(t)^2 = 2\cosh(t)^2 - 1 = 1 + 2\sinh(t)^2$$

$$\sinh(2t) = 2 \cdot \sinh(t) \cdot \cosh(t)$$

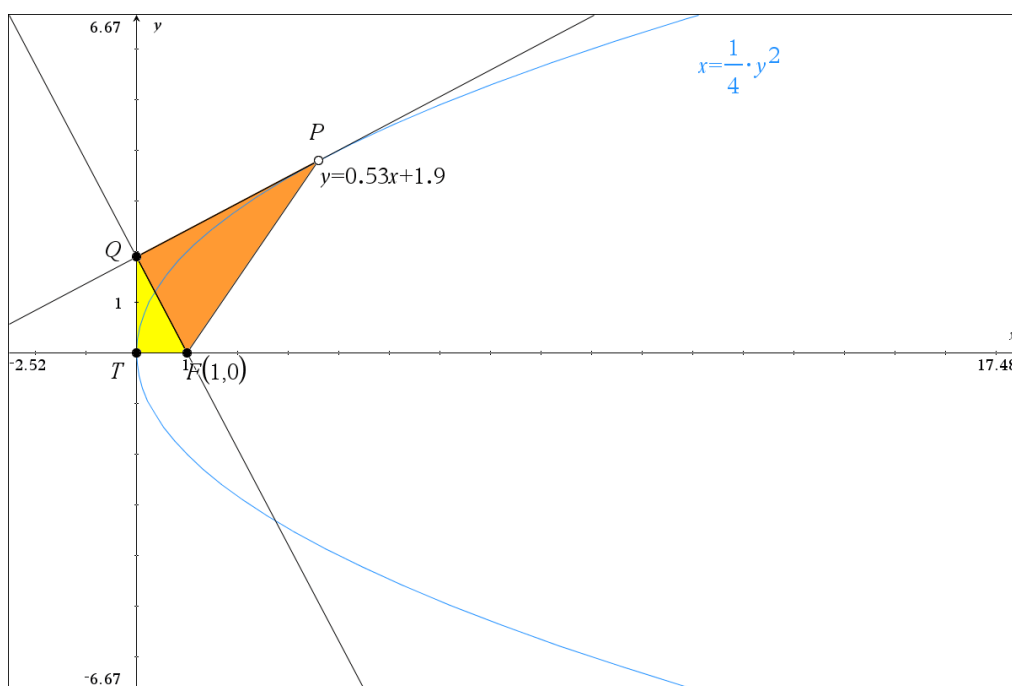
- c) Vis de grundlæggende regler for differentiation af de hyperbolsk trigonometriske funktioner:

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

Parablens geometri

Med dette i baghovedet går vi nu i gang med at undersøge enhedsparablen $y^2 = 4 \cdot x$ nærmere. Vi starter rent geometrisk med at prøve at forstå de vigtigste egenskaber ved brændpunktet.

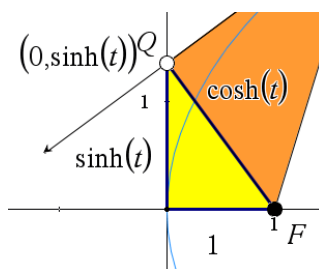


Øvelse 3.8:

- Tegn enhedsparablen og afsæt et frit punkt P på enhedsparablen. Afsæt også brændpunktet $F(1,0)$, toppunktet $T(0,0)$. (I TI-Nspire CAS kan enhedsparablen tegnes ud fra brændpunkt og toppunkt).
- Afsæt tangentlinjen gennem P . Den skærer y -aksen i punktet Q .
- Undersøg nu eksperimentelt de to trekanter FTQ og FQP . Hvilke slags trekanter er der tale om og hvordan er de forbundne?
- Tegn også den vandrette linje gennem punktet P . Det svarer til en lysstråle, der kommer vandret ind fra højre. Den rammer parablen og spejles i tangentlinjen. Hvad observerer du?

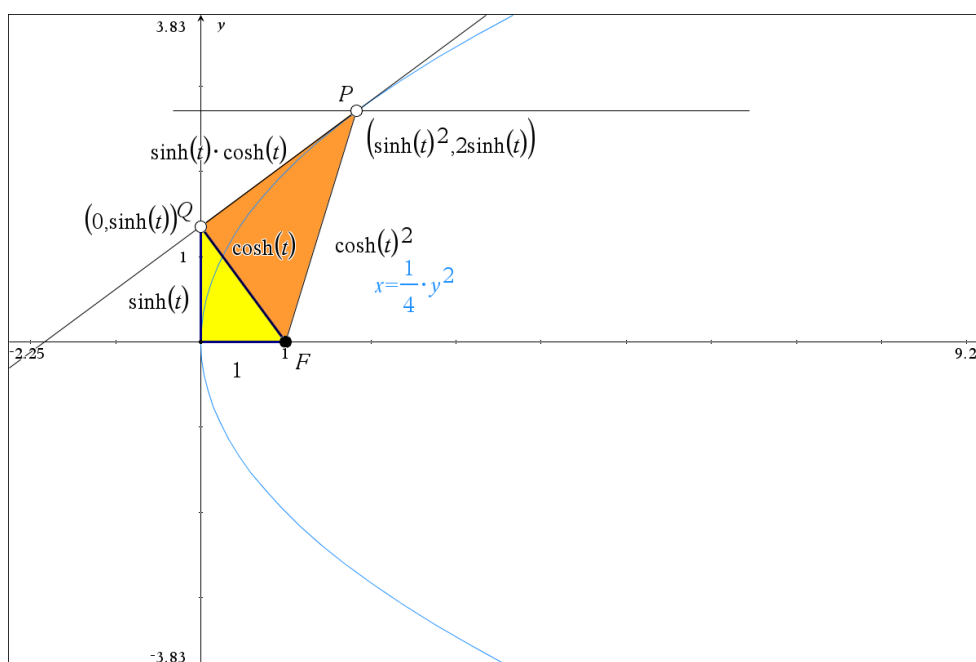
Du skulle nu gerne have fundet en masse egenskaber ved den ovenstående figur. For at bevise dem får vi brug for en parametrisering af enhedsparablen. Udgangspunktet er da den lille gule retvinklede trekant FTQ med

den vandrette katete 1. Vi trækker da på den pythagoræiske sætning hørende til de hyperbolske trigonometriske funktioner: $1 + \sinh(t)^2 = \cosh(t)^2$



Parablens parameterfremstilling

Hvis vi lader den lodrette katete være $\sinh(t)$, bliver hypotenusen altså netop $\cosh(t)$. Udnytter du nu de fundne egenskaber ved trekantene kan du nu trævle den orange trekant FQP op, hvorved du gerne skulle finde:



Vi har altså nu fundet den følgende parametrisering af enhedsparablen $y^2 = 4x$:

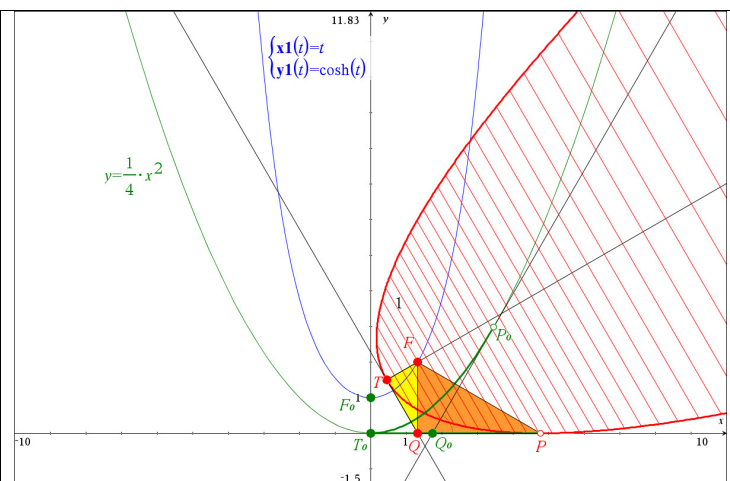
$$(x, y) = (\sinh(t)^2, 2 \cdot \sinh(t))$$

På basis af denne parametrisering kan vi nu først finde hastighedsvektoren og dermed en passende tangentvektor. Dernæst kan vi finde tangentens ligning og endelig diverse afstande. Vi kan derfor nu analytisk godtgøre *alle* de eksperimentelt fundne resultater:

Øvelse 3.9. Pedalafstanden FQ og brændpunktsafstanden FP

- a) Gør rede for at hastighedsvektoren er givet ved: $\vec{v}(t) = (2 \cdot \sinh(t) \cdot \cosh(t), 2 \cdot \cosh(t))$
- b) Gør rede for at farten er givet ved: $\|\vec{v}(t)\| = 2 \cdot \cosh(t)^2 = 1 + \cosh(2t)$
- c) Gør rede for at normalvektoren kan vælges til: $\vec{n}(t) = (1, -\sinh(t))$
- d) Gør rede for at længden af denne normalvektor er givet ved: $\|\vec{n}(t)\| = \cosh(t)$
- e) Gør rede for at tangentligningen er givet ved: $(x - \sinh(t)^2) - \sinh(t) \cdot (y - 2 \cdot \sinh(t)) = 0$, der kan forenkles til: $x - \sinh(t) \cdot y + \sinh(t)^2 = 0$.
- f) Gør rede for at afstanden fra brændpunktet $F = (1, 0)$ til tangenten er givet ved: $|FQ| = \cosh(t)$.
- g) Gør tilsvarende rede for at afstanden fra brændpunktet $F = (1, 0)$ til røringsspunktet P for tangenten er givet ved: $|FP| = \cosh(t)^2$.
- h) Gør endeligt rede for at afstanden fra røringsspunktet P til fodpunktet Q på tangenten er givet ved: $PQ = \sinh(t) \cdot \cosh(t)$.

Vi har nu samlet ammunition nok til, at vi kan finde parameterfremstillingen for rouletteen. Først skal vi have fat i buelængden. Dernæst kan vi beregne koordinaterne til roulettepunktet, dvs. brændpunktet i det faste koordinatsystem, hvor x -aksen er en tangent. Denne gang starter vi altså med at lade enhedsparablen stå lodret op og derefter rulle til højre som vist på figuren. Alle beregninger udføres på den grønne parabel, dvs. for at finde koordinaterne til roulettepunktet drejes den røde parabel tilbage, så den ligger oveni den grønne parabel. Derved svinger x -aksen over i tangenten til punktet P_0 .



Kig nøje på figuren - du kommer selv til at tegne en lignende om et lille øjeblik.

Parameterfremstillingen for roulettefiguren: Kædelinjen

Øvelse 3.10. Roulettekurven

- a) Gør rede for at buelængden er givet ved $s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\vec{v}(t)\| dt = \int_0^{t_0} 1 + \cosh(2t) dt = t_0 + \sinh(t_0) \cdot \cosh(t_0)$
- b) Gør rede for at x -koordinaten er givet ved $x = s(t_0) - |PQ| = t_0$

- c) Gør rede for at y -koordinaten er givet ved $y = |FQ| = \cosh(t_0)$
- d) Gør rede for at rouletten netop må være kædelinjen: $y = \cosh(x)$!

Vi mangler nu kun at illustrere den rullende parabel med den tilhørende roulettekurve. Men hertil kan vi jo trække på de fundne parameterfremstillinger!

Øvelse 3.11. Animation af roulette figuren

- a) Tegn en lodret enhedsparabel med tilhørende toppunkt T_0 og brændpunkt F_0 .
- b) Tegn en tangentlinje med et frit røringsspunkt P_0 og det vinkelrette fodpunkt Q_0 for brændpunktet F_0 .
- c) Find parameterværdien t_{var} hørende til røringsspunktet, idet du ved $x_0 = 2 \cdot \sinh(t_{\text{var}})$.
- d) Find værdien af buelængden $\widehat{T_0P_0}$, idet du ved at buelængden er givet ved $t_{\text{var}} + \sinh(t_{\text{var}}) \cdot \cosh(t_{\text{var}})$
- e) Afsæt buelængden ud af x -aksen, så du får konstrueret røringsspunktet P for den rullende parabel.
- f) Overfør nu trekanten $\triangle F_0Q_0P_0$ til den rullende parabel.
- g) Konstruer centrum for den drejning, der fører trekanten $\triangle F_0Q_0P_0$ over i trekanten $\triangle FQP$ og udmål drejningsvinklen v .
- h) Drej nu den lodrette parabel, så den overføres i den rullende parabel og kontrollér, at det drejede brændpunkt F , netop løber langs kædelinjen $y = \cosh(x)$.

Omdrejningslegemet hørende til kædelinjen

Øvelse 3.12. Illustration af Katenoiden

Gør rede for at ved drejning om x -aksen får katenoiden, dvs. omdrejningslegemet frembragt af kædelinjen, netop parameterfremstillingen:

$$(t, \cosh(t) \cdot \cos(u), \cosh(t) \cdot \sin(u)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

hvor u er drejningsvinklen omkring x -aksen. Tegn katenoiden i et 3d-graftegneprogram.

Øvelse 3.13. Buelængder og arealer og rumfang hørende til kædelinjen.

Da vi kender forskriften for kædelinjen som en funktion kan vi bruge de klassiske formler til at udregne de tilhørende buelængder, arealer hørende til kædelinjen, samt overfladearealer og rumfang af omdrejningslegemer:

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$A(t_0) = \int_0^{t_0} f(x) dx$$

$$O(t_0) = 2\pi \cdot \int_0^{t_0} f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$V(t_0) = \pi \cdot \int_0^{t_0} f(x)^2 dx$$

Gør dette!

Ekspirerter med katenoider

I det foregående har vi taget udgangspunkt i en enhedsparabel, hvor afstanden mellem brændpunkt og toppunkt er 1. Men alle parabler er ligedannede, så vi kunne lige så godt have taget udgangspunkt i en vilkårlig parabel, hvor afstanden mellem brændpunkt og toppunkt er b . Den tilhørende kædelinje bliver da også skaleret op med faktoren b .

Øvelse 3.14

- a) Gør rede for at parameterfremstillingen for parablen denne gang er givet ved

$$(x, y) = (b \cdot \sinh(t)^2, 2b \cdot \sinh(t))$$

svarende til forskriften

$$y^2 = 4b \cdot x$$

- b) Gør rede for at parameterfremstillingen for kædelinjen denne gang er givet ved

$$(x, y) = (b \cdot t, b \cdot \cosh(t))$$

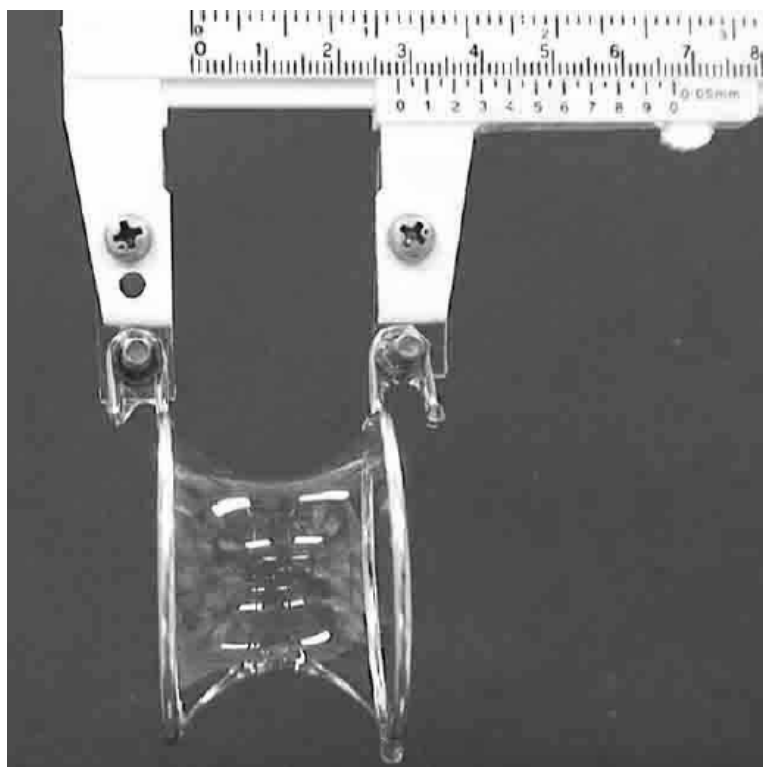
svarende til forskriften

$$y = b \cdot \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

Når man udfører eksperimenter med katenoiden udnytter man at det er en minimalflade, og at den derfor kan fremkomme ved at udspænde en passende sæbehinde, jfr. figuren næste side.

Her er sæbehinden spændt op mellem to cirkelformede metaltråde, der er spændt fast mellem kæberne på en skydelære, så man nemt kan kontrollere afstanden mellem de to cirkler. Tilsvarende kan man nemt opmåle radius for de to cirkler.

Læg mærke til, at når de to cirkelformede metaltråde er åbne er trykket det samme på indersiden og ydersiden, hvorfor middelkrumningen netop er nul.



Figuren er lånt fra artiklen: *In-situ observation of a soap film catenoid - a simple educational physics experiment.*
Masato Ito and Taku Sato, Department of Physics, Aichi University of Education, Kariya, 448-8542, JAPAN

Kaldes højden af katenoiden, dvs. afstanden mellem de to cirkler, for h , og kaldes radius af cirklerne for R , kan vi nu tilpasse katenoidens *formparameter* b , så den går gennem de to cirkler.

Øvelse 3.15

- a) Gør rede for at sammenhængen mellem højden h og radius R er givet ved

$$\frac{h}{R} = 2 \frac{b}{R} \cdot \cosh^{-1} \left(\frac{R}{b} \right)$$

Hvis vi måler med radius R som enhed, dvs. sætter $x = \frac{b}{R}$ og $y_1 = \frac{h}{R}$ gælder derfor

$$y_1 = 2x \cdot \cosh^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

- b) Tegn grafen for den normaliserede højde $y_1 = \frac{h}{R}$ som funktion af den normaliserede formparameter $x = \frac{b}{R}$, og gør rede for at der findes en kritisk højde $y_c \approx 1.3255$, så der for højder mindre end y_c er netop to katenoider, mens der for højder større end y_c ikke er nogen katenoider, der forbinder de to cirkler.

- c) Gør rede for at overfladearealet af katenoiden er givet ved

$$O = 2\pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{b}{R}\right)^2 \cdot \left(\cosh^{-1}\left(\frac{R}{b}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sinh\left(2 \cosh^{-1}\left(\frac{R}{b}\right)\right)\right)$$

$$= 2\pi \cdot R^2 \cdot \left(\frac{b}{R}\right)^2 \cdot \left(\cosh^{-1}\left(\frac{R}{b}\right) + \frac{R}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^2 - 1}\right)$$

- d) Hvis vi igen måler med radius som længdeenhed på x -aksen, dvs. sætter $x = \frac{b}{R}$, og denne gang bruger det dobbelte cirkelareal $2\pi \cdot R^2$ som arealenhed på y -aksen, dvs. sætter $y_2 = \frac{O}{2\pi \cdot R^2}$ kan dette omskrives til formen

$$y_2 = x^2 \cdot \left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right)$$

$$= x^2 \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{1 - x^2}$$

- e) Tegn grafen for det normaliserede overfladeareal $y_2 = \frac{O}{2\pi \cdot R^2}$ som funktion af den normaliserede formparameter $x = \frac{b}{R}$ i det samme koordinatsystem som den normaliserede højde $y_1 = \frac{h}{R}$.
- f) Argumentér nu ud fra graferne, for at den brede katenoide (stor b -værdi) har mindre overfladeareal end den tynde katenoide (lille b -værdi). Argumentér også for, at den brede katenoide indtil en vis kritisk værdi $x_0 = \frac{h_0}{R}$ har et mindre overfladeareal end det dobbelte cirkelareal $y_2 = 1$, men at den efter den kritiske værdi har et større overfladeareal end det dobbelte cirkelareal, hvorfor den ikke længere repræsenterer en stabil sæbehinde, idet sæbehinden med fordel kan bryde og i stedet dække de to metalcirkler. Lav passende illustrationer undervejs.

3.3 Unduloiden

Ellipsens geometri

Unduloiden er roulettekurven hørende til en ellipse. Så først vil vi prøve at forstå de vigtigste egenskaber ved en ellipse. Vi går ud fra at du allerede er fortrolig med ellipsen som en fladtrykt cirkel og ellipsen som det geometriske sted for de punkter, hvor summen af afstandene til to brændpunkter F_1 og F_2 er konstant:

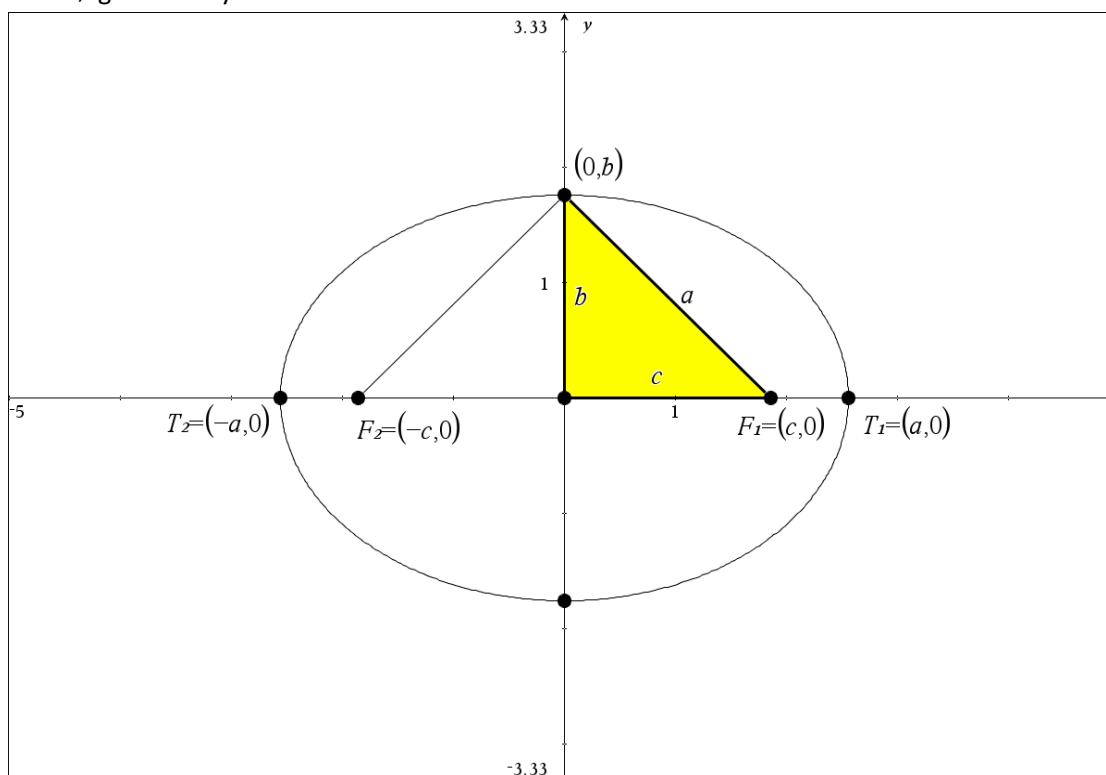
$$F_1P + F_2P = 2a$$

hvor a betegner den halve storakse. Ellipsens geometri og ligning kan du finde behandlet i *Hvad er Matematik?* B, kapitel 0, samt i en række forskellige projekter, du kan finde i registrene.

Der findes forskellige notationer i forbindelse med ellipsen. Ofte indfører man den såkaldte excentricitet e , hvorved afstanden fra centrum til brændpunkt er givet ved $a \cdot e$.

Men lige så ofte benytter man den såkaldte a - b - c -notation, hvorved afstanden fra centrum til brændpunkt er givet ved c . Koordinaterne til brændpunkterne er da givet ved $F_1 = (c, 0)$ og $F_2 = (-c, 0)$.

I det følgende benytter vi a - b - c -notationen.



Læg mærke til at a , b og c netop er siderne i en retvinklet trekant, men læg også mærke til at det er den halve storakse a , der er hypotenusen, dvs.

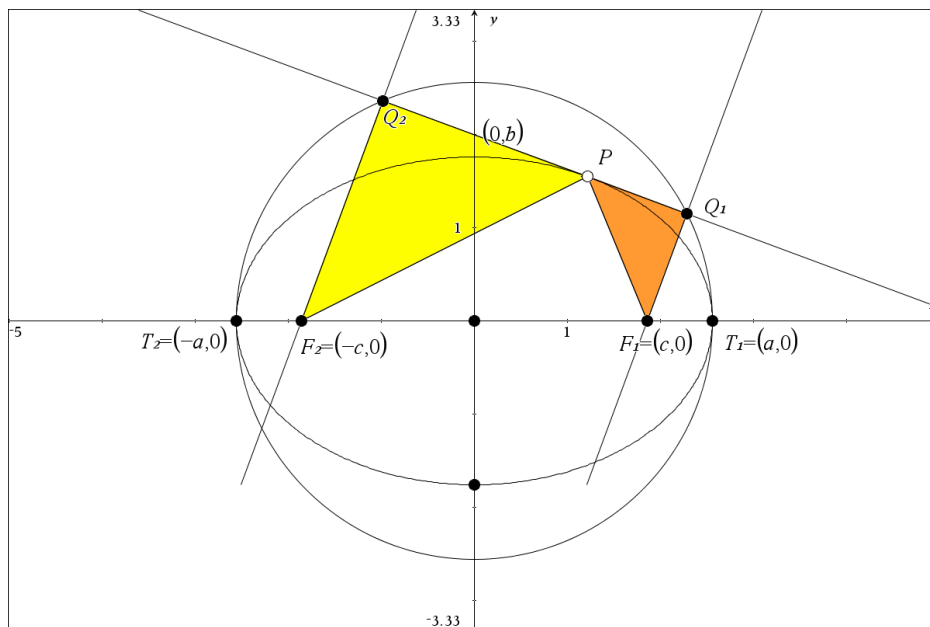
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vi lægger igen rent geometrisk ud med en undersøgelse af brændpunkternes rolle i ellipsen.

Øvelse 3.16. De karakteristiske trekanter

- Tegn ellipsen og afsæt et frit punkt P på randen. Afsæt også brændpunkterne $F_1(c, 0)$ og $F_2(-c, 0)$, samt toppunkterne $T_1(a, 0)$ og $T_2(-a, 0)$. (I TI-Nspire CAS kan ellipsen tegnes ud fra de to brændpunkter og et toppunkt – se figuren næstte side). Tilføj den omskrevne cirkel.
- Afsæt tangentlinjen gennem P og konstruer fodpunkterne Q_1 og Q_2 for normalerne gennem brændpunkterne.
- Undersøg nu eksperimentelt de to trekanter $\triangle F_1PQ_1$ og $\triangle F_2PQ_2$. Hvilke slags trekanter er der tale om og hvordan er de forbundne?

- d) Brændstrålen F_2P svarer til en lysstråle, der udgår fra det ene brændpunkt. Den rammer ellipsen og spejles i tangentlinjen. Hvad observerer du?



Ellipsens parameterfremstilling

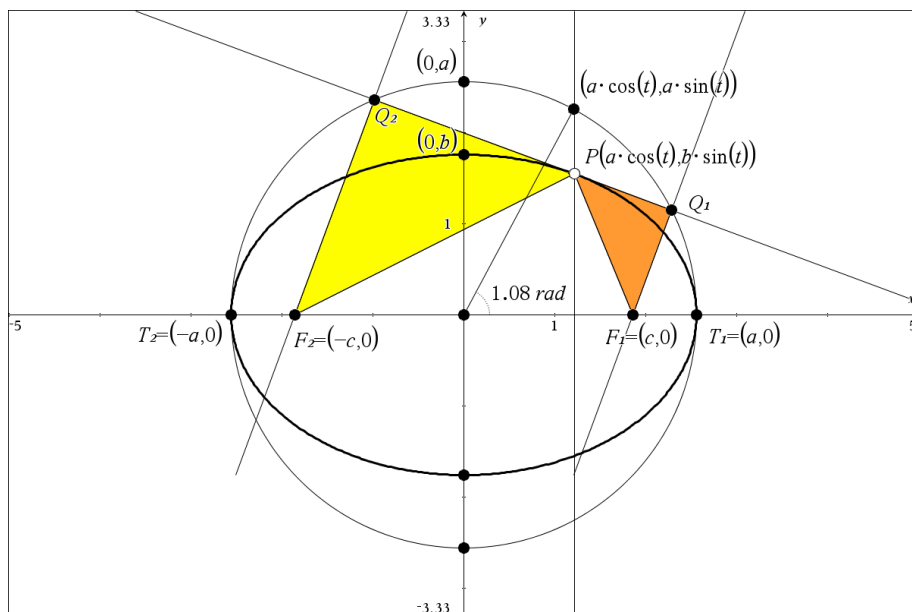
Du skulle nu gerne have fundet en masse egenskaber ved den ovenstående figur. For at bevise dem får vi brug for en parametrisering af ellipsen. Udgangspunktet er da karakteriseringen af ellipsen som en fladtrykt cirkel. Den omskrevne cirkel har som bekendt parameterfremstillingen

$$(x, y) = (a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t))$$

Øvelse 3.17. Ellipsens parameterfremstilling

Gør rede for at ellipsen dermed får parameterfremstillingen (se den følgende figur)

$$(x, y) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$$



Vi tager nu fat på at finde analytiske udtryk for de forskellige trekantsider. Vi lægger ud med brændstrålerne:

$$r_1 = F_1P \text{ og } r_2 = F_2P,$$

hvor vi jo på forhånd ved at summen af brændstrålerne netop er ellipsens storakse:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Øvelse 3.18. Brændstrålerne

a) Gør rede for at

$$r_2^2 - r_1^2 = 4 \cdot a \cdot c \cdot \cos(t)$$

b) Udnyt en kvadratsætning til at vise at det ovenstående kan reduceres til

$$r_2 - r_1 = 2 \cdot c \cdot \cos(t)$$

c) Gør rede for at længderne af brændstrålerne er givet ved

$$r_1 = F_2P = a - c \cdot \cos(t) \text{ og } r_2 = F_1P = a + c \cdot \cos(t)$$

Herefter er vejen banet til at finde pedalafstandene $d_1 = F_1Q_1$ og $d_2 = F_2Q_2$ og den vigtige sammenhæng:

$$d_1 \cdot d_2 = b^2$$

Der spiller samme rolle som summen af brændstrålernes længde.

Øvelse 3.19. Pedalafstandene F_1Q_1 og F_2Q_2

- a) Gør rede for at hastighedsvektoren er givet ved: $\vec{v}(t) = (-a \cdot \sin(t), b \cdot \cos(t))$
- b) Gør rede for at normalvektoren kan vælges til: $\vec{n}(t) = (-b \cdot \cos(t), -a \cdot \sin(t))$
- c) Gør rede for at længden af denne normalvektor er givet ved: $\|\vec{n}(t)\| = \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$
- d) Gør rede for at tangentligningen er givet ved: $-b \cdot \cos(t) \cdot (x - a \cdot \cos(t)) - a \cdot \sin(t) \cdot (y - b \cdot \sin(t)) = 0$, der kan forenkles til: $-b \cdot \cos(t)x - a \cdot \sin(t) \cdot y + a \cdot b = 0$.
- e) Gør rede for at afstanden fra brændpunkterne $F_1 = (c, 0)$ og $F_2 = (-c, 0)$ til tangenten er givet ved:
- $$d_1 = |F_1Q_1| = \frac{b \cdot (a - c \cdot \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos(t)^2}} = \frac{b \cdot r_1}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} \quad \text{og} \quad d_2 = |F_2Q_2| = \frac{b \cdot (a + c \cdot \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos(t)^2}} = \frac{b \cdot r_2}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}.$$
- f) Gør rede for at produktet af de to afstande fra brændpunkterne til tangenten er konstant:
- $$d_1 \cdot d_2 = b^2.$$

Øvelse 3.20 Tangentstykkerne PQ_1 og PQ_2 .

Gør rede for at tangentstykkerne PQ_1 og PQ_2 er givet ved

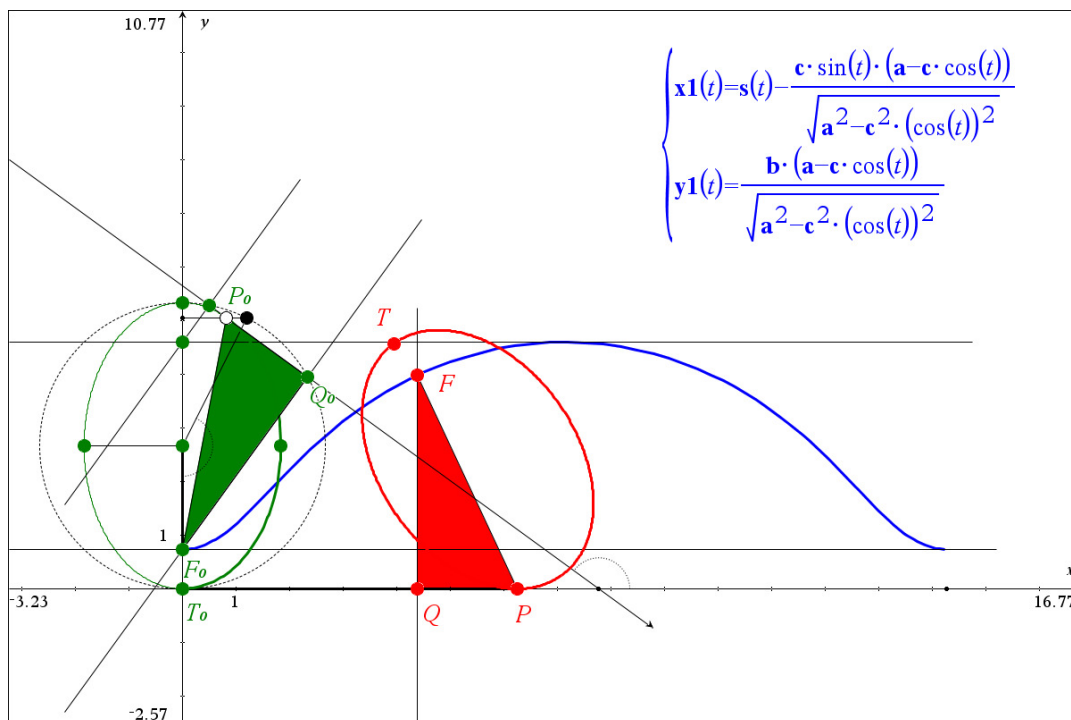
$$PQ_1 = \frac{c \cdot \sin(t) \cdot (a - c \cdot \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2}} = \frac{c \cdot \sin(t) \cdot r_1}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} \quad \text{og} \quad PQ_2 = \frac{c \cdot \sin(t) \cdot (a + c \cdot \cos(t))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2}} = \frac{c \cdot \sin(t) \cdot r_2}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

Parameterfremstillingen for roulettefiguren

Vi har nu samlet ammunition nok sammen til, at vi kan finde parameterfremstillingen for rouletteen. Først skal vi have fat i buelængden. Dernæst kan vi beregne koordinaterne til roulettepunktet, dvs. brændpunktet i det faste koordinatsystem, hvor x-aksen er en tangent, dvs. denne gang starter vi altså med at lade ellipsen stå lodret op og derefter rulle til højre som vist på figuren. Alle beregninger udføres på den grønne ellipse, dvs. for at finde koordinaterne til roulettepunktet drejes den røde ellipse tilbage, så den ligger oveni den grønne ellipse.

Derved svinger x-aksen over i tangenten til punktet P_0 .

Kig nøje på figuren på næste side - du kommer selv til at tegne en lignende om et lille øjeblik.



Øvelse 3.21. Roulettekurven

- a) Gør rede for at buelængden er givet ved $s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\vec{v}(t)\| dt = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2} dt$.
NB! Denne buelængde kan **ikke** udtrykkes ved hjælp af de almindelige standardfunktioner!

- b) Gør rede for at x-kordinaten er givet ved

$$x = s(t_0) - |PQ| = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2} dt - \frac{c \cdot \sin(t_0) \cdot (a - c \cdot \cos(t_0))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t_0)^2}}$$

- c) Gør rede for at y-kordinaten er givet ved $y = |FQ| = \frac{b \cdot (a - c \cdot \cos(t_0))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t_0)^2}}$

- d) Tegn parameterkurven for rouletten, idet du som parameterinterval bruger $[0; 2\pi]$

Vi mangler nu kun at illustrere den rullende ellipse med den tilhørende roulettekurve. Men hertil kan vi jo trække på de fundne parameterfremstillinger!

Øvelse 3.22. Animation af roulette figuren

- a) Tegn en lodret ellipse med tilhørende toppunkter og brændpunkter.
b) Tegn en tangentlinje med et frit røringspunkt P_0 og det vinkelrette fodpunkt Q_0 for brændpunktet F_0 .
c) Mål parameterværdien t_{var} hørende til røringspunktet, idet du udnytter den omskrevne cirkel.

Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

- d) Find værdien af buelængden $\widehat{T_0P_0}$, idet du ved at buelængden er givet ved

$$s(t_{\text{var}}) = \int_0^{t_{\text{var}}} \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \cos(t)^2} dt$$

- e) Afsæt buelængden ud af x -aksen, så du får konstrueret røringpunktet P for den rullende ellipse.
f) Overfør nu trekanten $\Delta F_0Q_0P_0$ til den rullende ellipse.
g) Konstruer centrum for den drejning, der fører trekanten $\Delta F_0Q_0P_0$ over i trekanten ΔFQP og udmål drejningsvinklen v .
h) Drej nu den lodrette ellipse, så den overføres i den rullende ellipse og kontrollér, at det drejede brændpunkt F , netop løber langs unduloiden.

Ekspirerter med Delaunay-fladen hørende til unduloiden

Når man drejer unduloiden omkring sin symmetriakse fremkommer en **Delaunay-flade**, der er naturligt forekommende som en sæbehinde med konstant middelkrumning svarende til at der er konstant trykforskel mellem det indre og ydre af sæbehinden.



Her ses den fotograferet fra et elevbesøg på DTU. Den kan ikke tegnes direkte i et program som TI-Nspire CAS, fordi parameterfremstillingen ikke kan udtrykkes ved standardfunktioner, så her må man nøjes med profilkurven altså roulettekurven. Parametrene for ellipsen aflæses eksperimentelt der, hvor Delaunay-fladen er smaltest og bredest, dvs. minimum og maksimum for roulettekurven. De må nemlig være givet ved $a - c$ og $a + c$.

4. Appendiks

4.1 Løsning af sætning 5b ved håndregning

Sætning 5a. Vindelflader som minimalflader I

En vindelflade $z = f(x, y) = g(\alpha)$, $\alpha = \frac{y}{x}$ er en minimalflade, netop når vindelfunktionen $g(\alpha)$ løser differentialligningen:

$$g''(\alpha) \cdot (1 + \alpha^2) + 2 \cdot g'(\alpha) \cdot \alpha = 0 \quad (28)$$

Denne differentialligning løses ved at anvende teknikken med omskrivning til to førsteordens differentialligninger: Vi indfører hjælpevariablen $u = g'$ hvorved andenordens differentialligningen omformes til det følgende system af koblede differentialligninger:

$$\begin{aligned} g' &= u \\ u' &= -\frac{2 \cdot u \cdot \alpha}{1 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (29)$$

Øvelse

- a) Vis at differentialligningen $g''(\alpha) \cdot (1 + \alpha^2) + 2 \cdot g'(\alpha) \cdot \alpha = 0$ kan omskrives til:

$$\frac{du}{d\alpha} = u \cdot \left(-\frac{2 \cdot \alpha}{1 + \alpha^2} \right)$$

- b) Løs differentialligningen ved hjælp af separation af variable, og vis, at:

$$u = \frac{c_1}{1 + \alpha^2}$$

- c) Løs derefter differentialligningen $g' = u$ hvor du indsætter det fundne udtryk for u .

(Hint: Slå op i en tabel over stamfunktioner, hvis du ikke kender stamfunktioner til $\frac{1}{1+x^2}$)

Du skulle nu gerne have vist den følgende sætning:

Sætning 5b. Vindelflader som minimalflader II

En vindelflade $z = f(x, y) = g(\alpha)$, $\alpha = \frac{y}{x}$ er en minimalflade, netop når vindelfunktionen g har forskriften:

$$g(\alpha) = c_1 \cdot \tan^{-1}(\alpha) + c_2$$

Tilfældet $c_1 = 0$ giver, at g er konstant (svarende til at fladen er en vandret plan).

Tilfældet $c_1 \neq 0$ giver en helikoide.

4.2 Løsning af sætning 5.b ved brug af Maple

Øvelse 2.2 - Opstilling af differentialligningen for vindelfladen

For at lette skrivarbejdet defineres.

$$z := g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

Vi kan kontrollere, at maple faktisk differentierer sammensat:

$$\frac{\partial}{\partial x} z$$

$$-\frac{D(g)\left(\frac{y}{x}\right)y}{x^2} \tag{2}$$

Nu kan vi på én gang få udregnet og reduceret udtrykket:

$$\text{simplify}\left(\text{expand}\left(\left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} z\right)^2\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} z - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} z \cdot \frac{\partial}{\partial y} z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z + \left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} z\right)^2\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} z\right)\right)$$

$$\frac{D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right)x^2 + D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right)y^2 + 2D(g)\left(\frac{y}{x}\right)yx}{x^4} \tag{3}$$

Dvs ligningen er:

$$\frac{D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right)x^2 + D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right)y^2 + 2D(g)\left(\frac{y}{x}\right)yx}{x^4} = 0$$

Gange med x^2 :

$$D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right) + D^{(2)}(g)\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2D(g)\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Indfør α :

$$D^{(2)}(g)(\alpha) + D^{(2)}(g)(\alpha)(\alpha)^2 + 2D(g)(\alpha)(\alpha) = 0$$

som er den ønskede andenordens differentialligning.

Løsning af differentialligningen:

$$\text{dsolve}\left(D^{(2)}(g)(\alpha) + D^{(2)}(g)(\alpha)(\alpha)^2 + 2D(g)(\alpha)(\alpha) = 0\right) \\ g(\alpha) = _C1 + \arctan(\alpha) _C2 \tag{4}$$

4.3 Løsning af sætning 6b ved håndregning

Sætning 6a. Omdrejningsflader som minimalflader I

En omdrejningsflade $z = f(x, y) = g(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ er en minimalflade, netop når omdrejningsfunktionen $g(\rho)$ løser differentialligningen

$$g''(\rho) \cdot \rho + g'(\rho) \cdot (1 + g'(\rho)^2) = 0.$$

Denne differentialligning løses ved at anvende teknikken med omskrivning til to førsteordens differentialligninger: Vi indfører hjælpevariablen $u = g'$ hvorved andenordensdifferentialligningen omformes til det følgende system af koblede differentialligninger:

$$\begin{aligned} g' &= u \\ u' &= -\frac{u \cdot (1 + u^2)}{\rho} \end{aligned}$$

Øvelse

Løs differentialligningen $u' = -\frac{u \cdot (1 + u^2)}{\rho}$ ved hjælp af separation af variable.

Løs derefter differentialligningen $g' = u$ hvor du indsætter det fundne udtryk for u .

Du skulle nu gerne have vist den følgende sætning:

Sætning 6b: Omdrejningsflader som minimalflader II

En omdrejningsflade $z = f(x, y) = g(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ er en minimalflade, netop når omdrejningsfunktionen g er konstant (svarende til at fladen er en vandret plan) eller har forskriften

$$g(\rho) = \frac{\ln\left(c_1 \cdot \left(\sqrt{\rho^2 - 1} + \rho\right)\right)}{c_1} + c_2 = \frac{1}{c_1} \cdot \cosh^{-1}(c_1 \cdot \rho) + c_2 \quad (\text{svarende til at fladen er en katenoid})$$

Også denne gang fangede vi altså en ikke-triviell omdrejningsflade nemlig katenoiden.

4.4 Løsning af øvelse 2.3 og sætning 6b ved brug af Maple

Øvelse 2.3 - Opstilling af differentiaalligningen for omdrejningsfladen

$$\rho := \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho; \frac{\partial}{\partial y} \rho; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \rho;$$

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{2}$$

$$z := g(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{3}$$

Vi kan kontrollere, at maple faktisk differentierer sammensat:

$$\frac{\partial}{\partial x} z \tag{4}$$

$$\frac{D(g)(\sqrt{x^2 + y^2}) x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4}$$

Nu kan vi på én gang få udregnet og reduceret udtrykket:

$$\begin{aligned} & \text{simplify} \left(\text{expand} \left(\left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} z \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} z - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} z \cdot \frac{\partial}{\partial y} z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z + \left(1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} z \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \right) \right) \\ & \frac{D(g)(\sqrt{x^2 + y^2})^3 + D^{(2)}(g)(\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2} + D(g)(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

Dvs ligningen er:

$$\frac{D(g)(\sqrt{x^2 + y^2})^3 + D^{(2)}(g)(\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2} + D(g)(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Gange med $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$D(g)(\sqrt{x^2 + y^2})^3 + D^{(2)}(g)(\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{x^2 + y^2} + D(g)(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

$$\text{Indsæt } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D(g)(\rho)^3 + D^{(2)}(g)(\rho)\rho + D(g)(\rho) = 0$$

eller:

$$D^{(2)}(g)(\rho)\rho + D(g)(\rho)(1 + D(g)(\rho)^2) = 0$$

Løsning af differentiaalligningen:

Vi har ovenfor defineret ρ , så vi skriver den variable som x :

$$\text{dsolve}(D^{(2)}(g)(x) \cdot x + D(g)(x) \cdot (1 + D(g)(x)^2) = 0, g(x))$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{-C1} + \sqrt{\frac{x^2}{-C1^2} - 1}\right) \cdot -C1 + -C2, g(x) = -\ln\left(\frac{x}{-C1} + \sqrt{\frac{x^2}{-C1^2} - 1}\right) \cdot -C1 + -C2 \quad (6)$$

$z = g(x, y)$ angiver højden over xy -planen. Lad os begrænse os til at se på xz -planen. g er højden over x . Vi ønsker nu at få udtrykt sammenhængen som en funktion af z . Dvs få udtrykt x som en funktion af z .

Ovenfor har vi defineret z , så vi indfører betegnelsen y for denne variable, $y=g(x)$, og vi vil isolere x . Vi kan forestille os, at vi drejer xz -planen, så x er opad, z vandret. For overskuelighedens skyld omdefinerer vi konstanterne:

$$\text{solve}\left(y = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) \cdot a + b, x\right) \quad \frac{1}{2} \frac{a \left(\left(e^{-\frac{b-y}{a}} \right)^2 + 1 \right)}{e^{-\frac{b-y}{a}}} \quad (7)$$

$$\text{simplify}\left(\text{expand}\left(\frac{1}{2} \frac{a \left(\left(e^{-\frac{b-y}{a}} \right)^2 + 1 \right) \cdot e^{\frac{b-y}{a}}}{e^{-\frac{b-y}{a}} \cdot e^{\frac{b-y}{a}}}\right)\right) \quad \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{b-y}{a}} + e^{-\frac{b-y}{a}} \right) \quad (8)$$

Dette er jo en kædelinje, symmetrisk om $y=b$

Matematisk forskning

10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger

Projektmateriale 2 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader



STEEN MARKVORSEN
*professor ved DTU
Compute, Institut for
Matematik og Computer
Science.*

Serien *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger* henvender sig til gymnasieelever med interesse for matematik. Hensigten med serien er at åbne nogle vinduer ind i matematikkens mange spændende verdener, og dermed give et indtryk af, hvad matematisk forskning er.

Til hver film udarbejdes projektmaterialer, der kan anvendes i arbejdet med udvalgte problemstillinger, som vi præsenteres for i filmen. Projektmaterialerne er skrevet, så de både kan anvendes i kortere eller længere forløb på et hold, og være udgangspunkt for studieretningsprojekter.

I Steen Markvorsens film får vi først fortællingen om sæbeboblers og andre skumstrukturers lokale geometri, og efter en introduktion til krumningsbegrebet viser Steen Markvorsen hvorledes dette begreb kan løftes fra en lokal definition knyttet til kurver i 2D til et begreb, der kan udtrykke krumningsforhold globalt for flader i 3D. Derved tager han os med frem til en introduktion af et af de centrale emner i differentialgeometri, *studiet af flader med konstant middeldkrumning* og specielt: *minimalflader*.

Til den første del af filmen foreligger *projektmaterialer 1*, med indledende emner fra vektorregning og krumningsteori, frem til beviset for Eulers formel for middeldkrumningen i et punkt. Til den anden del af filmen foreligger *projektmaterialer 2*, der tilbyder en fordybelse i teorien bag og en eksemplificering af netop emnet: *flader med konstant middeldkrumning*, specielt minimalflader, der defineres som flader med middeldkrumning 0.

gymportalen.dk

