

STEEN MARKVORSEN

Indledende emner:
Geometri, vektorregning
og krumningsteori

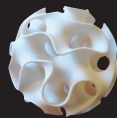
MATEMATISK FORSKNING

10

DANSKE MATEMATIKERE

10

MATEMATISKE FORTÆLLINGER



Film og tilhørende projektmateriale er produceret af lærebogssystemet

HVAD ER MATEMATIK?

Indledende emner

Geometri, vektorregning og krumningsteori

Projektmaterialer

Bjørn Grøn (red.)

© 2015 Konceptet: Matematisk forskning - 10 Danske matematikere - 10 Matematiske fortællinger er udviklet af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun & Olav Lyndrup

© 2015 Filmene og de tilhørende projektmaterialer er produceret af lærebogssystemet *Hvad er matematik?*

Forsideillustrationer: Ulla Korgaard, Designeriet

Filmene og de tilhørende projektmaterialer kan frit downloades og anvendes til selvstudium og i undervisningen. Hverken film eller projektmaterialer må gøres til genstand for kommerciel udnyttelse.

Projektmateriale 1 i tilknytning til Steen Markvorsen: Skumstrukturer og minimalflader

Indledende emner fra geometri, vektorregning og krumningsteori

faglig redaktion: Bjørn Grøn

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om op-havsret. Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret, som om der var indgået en aftale.

Film og tilhørende materialer er produceret med støtte fra bla. Undervisningsministeriets udlodningsmidler, IKV, SDU og Cryptomathic

Projektmateriale 1 i tilknytning til Steen Markvorsens video, Skumstrukturer og minimalflader.

Indledende emner fra geometri, vektorregning og krumningsteori

Indhold

0. Indledning.....	4
1. Vektorers beskrivelseskraft	5
1.1 Hvor kommer vektorerne fra?.....	5
1.1.1 De komplekse tal og deres geometriske repræsentation	5
1.1.2 Findes der tal i højere dimensioner?	6
1.1.3 Vektorbegrebet graves ud af kvaternionerne.....	6
1.2 Vektorer i gymnasiet	7
1.3 Linjestykker og parallelogrammer	7
1.4 Midtnormaler og højder i en trekant	11
1.5 Medianerne i trekanter og i tetraedre	14
2. Skummets lokale struktur og tetraederets egenskaber	18
2.1 Den lokale struktur	18
2.2 Vinklen mellem kanterne er $\arccos(-\frac{1}{3})$	19
2.3 Sammenhængen mellem middelkrumningerne i en dobbelt-bobbel.....	21
3. Krumning af kurver	24
3.1 Kurver har en krumning, hvis de er lokalt cirkulære	24
3.2. Krumningen for en banekurve.....	27
3.3. Krumning for en kurve i rummet.....	30
4. Krumning af en flade	35
4.1. Udledning og analyse af Eulers formel.....	38
5. Historien bag middelkrumningen.....	42
6. Appendiks 1: Bestemmelse af kurvelængde.....	45
7. Appendiks 2: Koordinatskifte transformationer	47

0. Indledning

Disse projektmaterialer er skrevet i tilknytning til filmen *Skumstrukturer og minimalflader*, der indgår i serien om matematisk forskning: *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger*.

I filmen fortæller professor ved DTU, Steen Markvorsen dels om sæbeboblers og andre skumstrukturers lokale geometri og dels om hvorledes krumningsbegrebet kan løftes fra en lokal definition knyttet til kurver i 2D til et begreb, der kan udtrykke krumningsforhold globalt for flader i 3D. Derved tager han os med frem til en introduktion af det centrale begreb i differentialgeometri, *minimalflader*. Til den sidste del af filmen foreligger *projektmaterialer 2*, mens det foreliggende materiale knytter sig til de indledende emner inden for geometri, vektorregning og krumningsteori, som der fortælles om i filmen.

Projektmateriale er opdelt i en række kapitler, der kan gennemgås hver for sig. Det enkelte kapitel bygger således ikke på de foregående.

Den første aktivitet handler om vektorer i 2D og 3D og disses beskrivelseskraft. Dermed menes, at vektorerne ofte tilbyder bevismetoder, der er mere ligetil og måske også mere enkle, end de traditionelle fra den klassiske geometri. Kapitlet er skrevet, så det både kan indgå som en perspektivering af den tidlige geometriundervisning i 1.g, og kan indgå som et forløb om matematikkens indre struktur.

Man kan også vælge at springe direkte til det sidste afsnit om tetraederet, som en model for den lokale struktur af skummet. Og herfra arbejde videre med kapitel 2.

Den næste aktivitet knytter sig meget direkte til filmens præsentation af Plateaus opdagelser. Matematisk bevæger vi os stadig inden for gymnasiets kernestof, men kapitel 2 kan give en fin og lidt usædvanlig perspektivering af den traditionelle trigonometri.

Vektorfunktioner er en del af kernestoffet på htx, men ikke i stx. I kapitel 3 er der givet en meget kort introduktion hertil, så man hurtig kommer frem til at tale om krumning. I *Hvad er matematik? er differentiability* af funktioner af én reel variabel knyttet til begrebet *lokalt lineær*. Derfor følger det naturligt at knytte krumning til begrebet *lokalt cirkulær*. Dette udfoldes i kapitlet, hvor vi udleder krumningsformler, som man umiddelbart kan regne på. Kapitlet er velegnet som supplerende stof, og rummer store muligheder for perspektivering

Den sidste aktivitet knytter sig til hovedsporet i Steen Markvorsens fremstilling: Fladers krumning, udledning af Eulers formel for middelkrumningen i et punkt frem mod introduktionen af begrebet: flader med konstant middelkrumning. Her bevæger vi os væk fra det lokale og hen til det globale perspektiv på en flade. Det sidste er emnet for projektmaterialer 2. Det første rummer godt stof til eksempelvis srp – fx med inddragelse af et af den lineære algebras mest benyttede værktøj – koordinatskiftetransformationer.

1. Vektorers beskrivelseskraft

Dette kapitel er identisk med projekt 5.1 i *Hvad er matematik? A*. De forsøger på at udvide talbegrebet til højere dimensioner, der er omtalt i første afsnit, er også behandlet i *A* bogens projekt 0.3, der handler om udvidelseslegemer og deres anvendelser i kodningsteori. Materialet i dette afsnit kan fx anvendes til at udbygge et geometrisk forløb i 1. g med en vektortilgang. Man kan også vælge alene at fokusere på det sidste afsnit om medianer og tetraedre, da det er dette vi ser en anvendelse af i filmen.

Er man interesseret i at fordybe sig yderligere i vektor-regningens historie, så kan Kirsti Andersens lille bog med netop titlen: *'Hvor kommer vektorerne'*, udgivet af Steno Museet anbefales. Den indeholder henvisninger til den vigtigste litteratur.

1.1 Hvor kommer vektorerne fra?

Vektorbegrebet er et af de mest produktive begreber i hele matematikkens historie. I moderne matematik har man generaliseret vektorbegrebet, så det er løsrevet både fra koordinatrepræsentationen og fra den geometriske repræsentation med pile osv. Vektorer defineres i moderne matematik ud fra de fundamentale regneregler, som vi også kender fra vektorerne i fx 3D. Tilsvarende generaliseres skalarproduktet af to vektorer ud fra de fundamentale egenskaber ved det skalarprodukt mellem to geometriske vektorer, som vi kender. Det generaliserede skalarprodukt kaldes af og til for et "indre produkt".

Ved at løfte vektorbegrebet og skalarproduktet op til mere abstrakte begreb, løsrevet fra de geometriske vektorer, viser det sig, at matematiske størrelser fra helt andre verdener, fx bestemte funktionsklasser, også kan opfattes som vektorer. I et sådant *vektorrum* af funktioner bliver skalarproduktet mellem to funktioner f og g defineret som værdien af et bestemt integral af $f \cdot g$.

Men vejen dertil var mere end almindelig stenet. Hvis vi med vektorer forstår *pile*, dvs. geometriske objekter, der er bestemt af to ting, en retning og en længde, så har de været kendt meget længe som objekter, der kan repræsentere hastigheder eller kræfter. Den geometriske vektoraddition, som ofte beskrives med reglen om *kræfternes parallelogram* har ligeledes en historie der går meget langt tilbage. Kræfternes parallelogram er beskrevet i en græsk bog om *mekanik* fra 300-tallet fvt. Forfatteren til bogen fået navnet "pseudo-Aristoteles". Navnet skyldes at man engang troede det var Aristoteles, der havde skrevet det.

Hvis vektorbegrebet alene drejede sig om geometriske pile, hvor der er tilknyttet en addition, så var det ikke specielt interessant for matematik. Der manglede en operation svarende til et produkt – som skalarproduktet eller vektorproduktet. Og det tog meget lang tid, før de blev udviklet. Derfor ser vi, at vektorer i virkeligheden er et meget nyt begreb i matematikkens verden. Og udviklingen frem til det moderne vektorbegreb kommer fra et helt andet sted, end arbejdet med de geometriske pile: Vektorernes oprindelse stammer fra arbejdet med at forstå *de komplekse tal* og forsøget på at udvide hele vores talbegreb fra én til to og flere dimensioner. Når man taler om at udvide talbegrebet, så ligger implicit heri, at vi tager de 4 regningsarter, $+$, $-$, \cdot og $:$ med os, så vi fx kan løse ligninger.

1.1.1 De komplekse tal og deres geometriske repræsentation

Man havde kendt og anvendt komplekse tal siden midt i 1500-tallet, hvor Cardano opdager formlen til at bestemme visse løsninger til tredjegradsligningen. Sådanne løsninger kunne skrives på formen $a + b \cdot \sqrt{-1}$. Disse tal blev kaldt for umulige tal. Det virkede imidlertid, men man manglede en geometrisk repræsentation for bedre at kunne forstå de nye tal.

Den første der åbnede porten til denne nye matematiske verden, var den norsk-danske matematiker og landmåler, Casper Wessel (1745-1818). Vi har i flere projekter til C-bogen beskrevet, hvordan Caspar Wessel midt i sine mange trigonometriske beregninger af sidelængder og vinkler i det net af trekanter, de første landmålere spændte ud over landet, fik den ide, at man burde kunne forenkle beregningerne ved at indføre en måde at gange trekantens sider på. Og Casper Wessel fandt en sådan repræsentation af siderne og en sådan multiplikation, der både er bestemt af sidernes længde og af hvilken retning de peger, i forhold til en bestemt fastlagt retning. Da multiplikationen blandt andet indebærer, at sidernes længder ganges, så er det faktisk en *udvidelse* af den multiplikation, vi har af tal på den reelle tallinje. Og Casper Wessel indfører sin multiplikation, så man også har den modsatte regningsart, altså division.

Selv om hans mål egentlig var det omvendte, nemlig *at finde tal, der kunne repræsentere geometriske objekter*, så opdagede han derigennem som den første *en geometrisk repræsentation af de komplekse tal*. Men han skrev på dansk! Så den afhandling han indleverede og fik udgivet af Videnskabernes Selskab i København fik ingen udbredelse.

Mange andre matematikere var også på jagt efter en geometrisk repræsentation af de komplekse tal, og nogle få årtier inde i 1800-tallet var dette en kendt teknik. Men selv om komplekse tal kan repræsenteres som pile i planen, så var forbindelsen til vektorer alligevel ikke etableret. For hvad med vektorer i 3D? Addition af 3D vektorer kan foretages præcis som med 2D. Men kan man finde en måde at gange dem på? Spørgsmålet svarer til følgende: Findes der tredimensionelle "komplekse tal"?

1.1.2 Findes der tal i højere dimensioner?

Det er et af de spørgsmål, hvor vi kan datere hvor og hvornår svaret blev fundet. Det skete 16. oktober 1843 på en vandring langs Royal Canal i Dublin. William Hamilton (1805-1865), der havde bakset med problemet i mange år, var den dag på vej til et møde i det irske Royal Academy. Hans kone fulgte ham og han gik og talte lidt fraværende med hende, indtil hans matematiske hjerne pludselig tog over og i et glimt gav ham svaret: Nej der findes ikke tredimensionelle komplekse tal - men der findes fire dimensionelle! Hamilton blev så overvældet, at han med en kniv ridsede de formler, han så for sig, ind i murværket på Brougham Bridge, som de netop passerede.

De nye tal, Hamilton havde opdaget, kaldte han kvaternioner, på dansk: kvaternioner. Hamilton viede resten af sit liv til at udvikle teorien om kvaternioner, og han var overbevist om, at de var et universalt værktøj til at løse mange problemer i matematik og fysik. Hamilton var imidlertid ikke verdensmester i formidlingens kunst, så de værker han skrev om kvaternioner blev kun læst af få – selv nogle af de største matematikere gav op over for Hamiltons komplicerede fremstilling.

1.1.3 Vektorbegrebet graves ud af kvaternionerne

Men nogle af de største fysikere, som James Clark Maxwell (1831-1879) og Oliver Heaviside (1850-1925) så mulighederne. Det gik op for Maxwell, at hvis man betragter to tredimensionelle pile (*vektorer*), \vec{a} og \vec{b} som kvaternioner med 4. koordinat 0, så giver Hamiltons regneregler for multiplikation af kvaternioner en 4-dimensionel størrelse, der med fordel kan brydes op i to dele: et tal (en *skalar*), som findes som første koordinat, og en tredimensionel vektor, som findes som de tre resterende koordinater. Skalaren er det vi i dag kalder *skalarproduktet* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, og den tredimensionelle vektor er det vi i dag kalder for *vektorproduktet*

$\vec{a} \times \vec{b}$. Så begyndte matematikerne også at se mulighederne, ikke mindst efter at en af samtidens store, Josiah Gibbs (1839-1903) i 1884 udsendte matematikhistoriens første bog om vektorregning, *Elements of Vector Analysis*.

Så vektorerne har vi fået fra fysikernes tolkning af matematikeres forsøg på at generalisere de komplekse tal til flere dimensioner. Man kunne måske umiddelbart tro, at tredimensionelle vektorer udstyret med "krydsproduktet" kunne repræsentere tredimensionelle tal. Men der findes ikke en modsat operation til krydsproduktet - man kan ikke dividere: Hvis $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ kan vi ikke slutte, at $\vec{b} = \vec{c}$. Hvorfor ikke?

Hamiltons store opdagelse var, at hvis yderligere skalarprodukterne er ens: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, så kan vi slutte, at $\vec{b} = \vec{c}$. Hvorfor det? Vi skal altså op i 4 dimensioner for at få en division med. Men vektorerne viste sig at være et så produktivt begreb, at de gav grundlag for en omfattende og selvstændig udvikling inden for matematikken teori og anvendelser.

1.2 Vektorer i gymnasiet

I den klassiske plangeometri kendes en række sætninger om egenskaber ved linjer og cirkler knyttet til trekanter, som fx at de tre midtnormaler altid vil skære hinanden i ét punkt, og at dette er centrum for den såkaldte omskrevne cirkel. Dvs. enhver trekant ABC har den egenskab, at der findes en cirkel, der går gennem A, B og C. Det er bestemt ikke indlysende, at dette må være tilfældet. Men lige præcis denne sætning er forholdsvis let at bevise i den klassiske geometri. For andre sætninger er beviset lidt mere tricket. Det gælder fx sætningen om, at de tre højder altid vil skære hinanden i ét punkt. Eller sætningen om, at medianerne i en trekant skærer hinanden i ét punkt, og at dette punkt deler hver median i forholdet 2:1. Med indførelsen af vektorer får vi ofte et mere ligetil – og mere elegant – argument for påstanden.

Geometri i det tredimensionelle rum forekommer os i dag nærmest utænkelig uden anvendelse af vektorer, men naturligvis er det muligt. Vektorer har først vundet udbredt anvendelse inden for de sidste 100 år, og før den tid var man også i stand til at bestemme afstande mellem objekter i rummet, at projicere et punkt på en linje osv. Også mere komplicerede sammenhænge kunne man håndtere – fx er kronen på værket i Euklids Elementer behandlingen af de 5 regulære polyedre. Her i bog 13 beviser han dels eksistensen af dem - ved at konstruere dem - og dels udleder han en række af deres egenskaber. Men den slags argumenter krævede altid gode færdigheder i at tegne og forestille sig tingene i det tredimensionelle rum. Med vektorer går det ofte lettere, og den helt store fordel ved anvendelsen af vektorer i matematikken viser sig, når man går op i højere dimensioner, og når man generaliserer vektorbegrebet. Dette er omtalt i projektet om lineær algebra.

Her vil vi holde os til plangeometriens to dimensioner og først til sidst tage et skridt ud i rummet. Vi vil for hver af sætningerne gennemføre både et geometrisk og et vektorielt argument.

1.3 Linjestykker og parallelogrammer

Sætning 1: Midtpunktet mellem punkterne A og B

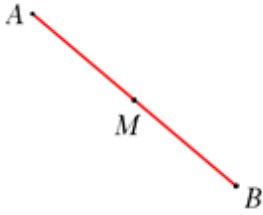
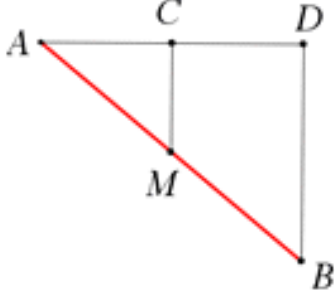
Koordinaterne til midtpunktet M mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan bestemmes som:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

På vektorform: Midtpunktet M mellem punkterne A og B opfylder:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$$

Bevis inden for den klassiske geometri

<p>Lad M være midtpunktet af linjestykket AB.</p> 	<p>Tegn gennem A en linje parallel med 1. akser, og tegn gennem M og B linjer parallelle med 2. akser.</p> <p>Skæringspunkterne mellem linjerne kaldes C og D – se figuren:</p> 
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Da M er midtpunkt, er $|AM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$.

1. Argumenter for, at trekkanterne ACM og ADB er ensvinklede.

2. Argumenter for, at $|AC| = \frac{1}{2} \cdot |AD|$, samt for at $|MC| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$

3. Indfør nu koordinaterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ og argumenter for, at med punkternes beliggenhed som på tegningen, så gælder

$$|AD| = x_2 - x_1 \quad \text{og} \quad |BD| = y_1 - y_2$$

4. Med punkternes beliggenhed fås x -koordinaten til M ved at addere $|AC|$ til x -koordinaten til A .

Og y -koordinaten til M fås ved at subtrahere $|MC|$ fra y -koordinaten til A . Udnyt nu dette til at vise formlen:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Bevis med anvendelse af vektorer

Vi udnytter konsekvent, at koordinaterne til et punkt P er lig med koordinaterne til punktets stedvektor \overrightarrow{OP} . Derved oversættes punkter umiddelbart til vektorer.

Vi udnytter endvidere vektorregnereglen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, der kommer fra indskudssætningen.

Vi starter næsten som før, men nu med en vektorligning:

	Angiv selv hvad der sker
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$	
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$	
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$	
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}$	
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$	

Nu har vi en ligning kun med stedvektorer, så her kan vi indsætte koordinaterne og får formelen, idet vektor-koordinater adderes koordinatvis.

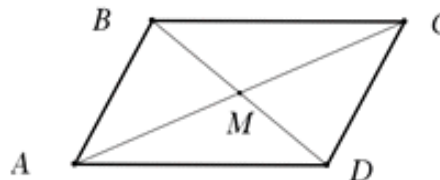
Det er nok svært at argumentere for at den sidste version er meget lettere end den første. Men vi ser, at den store forskel på, de to metoder er, at i den geometriske version skal man få en "god ide", og hvor kommer den lige fra? (Her var den nok ret ligetil). I den vektorversionen opløses vektorerne ofte i de simplest mulige former og så "regner man bare" som i ligninger eller reduktioner.

Efter hver af de følgende sætninger opfordres holdet til at drøfte – i grupper – hvad der er kernen i hver af beviserne og så sammenligne sværhedsgrad, "elegance" og andet I synes adskiller bevisetyperne.

Sætning 2: Diagonalerne i et parallelogram

I ethvert parallelogram gælder, at diagonalerne halverer hinanden

Tegn et parallelogram $ABCD$ og tegn diagonalerne.
De skærer hinanden i punkter M .



Bevis inden for den klassiske geometri

1. Argumenter for at trekkanterne AMD og BMC er kongruente, ved at påvise, at trekkanterne har én side og de to hosliggende vinkler lige store.
2. Så kan trekkanterne briunges til at dække hinanden. Argumenter nu for at AM er det halve af AC og BM er det halve af BD .

Bevis med anvendelse af vektorer

Vi viser, at $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$. Tilsvarende kan vises, at $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$.

	Angiv selv i de tomme felter, hvad der sker
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$	Indskudssætningen
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OD}$	Anvend sætning 1
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OD}$...
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$...
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$	
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$	

Heller ikke ved disse små beviser kan man se en særlig fordel ved at bruge vektorer. Men i den geometriske verden skal man kende en række specialsætninger, man trækker på. I vektorenes verden er det grundlæggende værktøj indskudssætningen.

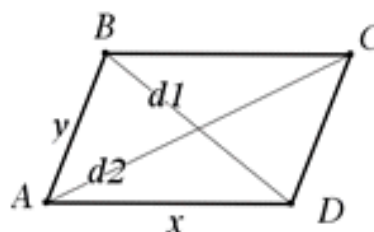
Sætning 3: Kvadratsummen af diagonalerne

Lad $ABCD$ være et parallelogram, lad x og y betegne de to sidelængder, og lad d_1 og d_2 betegne de to diagonaler. Så gælder:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2x^2 + 2y^2$$

Tegn et parallelogram $ABCD$ og tegn diagonalerne.

Sæt betegnelser på sider og diagonaler:



Geometrisk bevis

Her henter vi viden ind fra trigonometrien og anvender cosinusrelationerne.

Læg mærke til, at parallelogrammet kan klippes i trekanter op på to måder, som du ser på figuren.

Cosinusrelationerne i trekant $T1$:

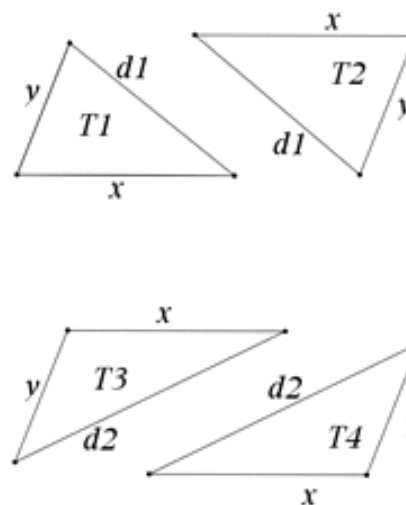
$$d_1^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(v) ,$$

hvor v er vinklen mellem siderne x og y i trekant $T1$.

Cosinusrelationerne i trekant $T3$:

$$d_2^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(w) ,$$

hvor w er vinklen mellem siderne x og y i trekant $T3$.



1. Argumenter nu for, at $w = 180 - v$.
2. Argumenter for, at vi deraf kan slutte, at $\cos(v) = -\cos(w)$
3. Konkluder nu ved at lægge de to ligninger sammen.

Bevis med anvendelse af vektorer

Af tegningen af parallelogrammet ser vi:

$$d_1 = |\overline{BD}| = |\overline{AD} - \overline{AB}|$$

$$d_2 = |\overline{AC}| = |\overline{AD} + \overline{DC}| = |\overline{AD} + \overline{AB}|$$

Kvadratsætningerne for vektorer giver nu:

$$d_1^2 = |\overline{AD} - \overline{AB}|^2 = (\overline{AD} - \overline{AB})^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{AB}|^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$d_2^2 = |\overline{AD} + \overline{AB}|^2 = (\overline{AD} + \overline{AB})^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{AB}|^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

Læg sammen og konkluder.

1.4 Midtnormaler og højder i en trekant

Sætning 4: Midtnormalerne i en trekant

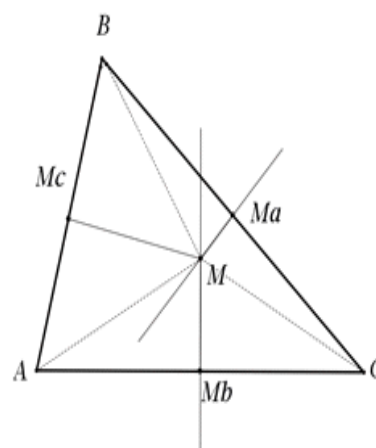
I enhver trekant gælder, at de tre midtnormaler skærer hinanden i samme punkt, og at dette punkt er centrum for en omskreven cirkel.

Vi tegner en trekant ABC , og markerer de tre midtpunkter, M_a, M_b og M_c

Vi oprejser de vinkelrette i punkterne M_a og M_b . Disse to midtnormaler skærer naturligvis hinanden i et punkt M .

Spørgsmålet er nu, om den tredje midtnormal vil gå gennem det samme punkt. Dette kan omformuleres til følgende, der er lettere at undersøge:

Vi trækker linjen fra M til M_c . Spørgsmålet er nu, om denne linje er midtnormal til den sidste side.



Geometrisk bevis

Også her anvender vi en viden om kongruente trekanter:

1. M ligger på midtnormalen gennem M_b . Argumenter for, at heraf kan slutte, at trekkanterne AMM_b og CMM_b er kongruente.
2. Nu ved vi altså, at MA og MC er lige lange. Argumenter på samme måde for at MC og MB er lige lange.
3. Når MA og MC er lige lange, og ligeledes MC og MB er lige lange, så er MA og MB er lige lange.
4. Argumenter for, at trekkanterne BMM_c og AMM_c er kongruente.

5. Argumenter ud fra punkt 4, at så må vinklerne ved M_c være lige store og derved være lig med 90° . Dvs. linjen MM_c er midtnormalen til c . Altså midtnormalen til c går også igennem M .

Vi bemærker, at undervejs i beviset fik vi som et "spinoff" resultatet, at der er lige langt fra M til de tre hjørner, dvs. M er centrum for en cirkel gennem de tre hjørner.

Bevis med anvendelse af vektorer

Hvis M ligger på midtnormalen gennem M_c , så skal gælde, at $\overline{MM_c} \perp \overline{AB}$.

I vektorernes verden undersøges dette ved at se, om skalarproduktet er 0: $\overline{MM_c} \cdot \overline{AB} = 0$?

Vi anvender nu, at M_c er midtpunkt, dvs. sætning 1:

1. Vis, at $\overline{MM_c} \cdot \overline{AB} = 0$ er ensbetydende med: $\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} - \overline{OM}\right) \cdot \overline{AB} = 0$

2. Omskriv denne ligning til: $\frac{1}{2} \cdot (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2) = \overline{OM} \cdot \overline{AB}$

Det er dette vi ønsker at vise. Men nu udtrykker vi blot det vi ved på samme måde:

3. Vis, at

$$\overline{MM_a} \cdot \overline{CB} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} - \overline{OM}\right) \cdot \overline{CB} = 0$$

$$\overline{MM_b} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} - \overline{OM}\right) \cdot \overline{AC} = 0$$

4. Vis, at dette kan omskrives til:

$$\frac{1}{2} \cdot (\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2) = \overline{OM} \cdot \overline{CB}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2) = \overline{OM} \cdot \overline{AC}$$

5. Adder de to ligninger og vis, at vi kan omskrive til det ønskede:

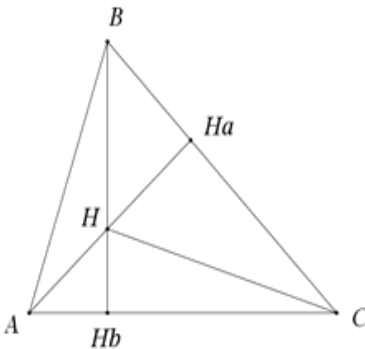
$$\frac{1}{2} \cdot (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2) = \overline{OM} \cdot \overline{AB}$$

Dette udtrykte som vi så ovenfor, at $\overline{MM_c} \perp \overline{AB}$, dvs. M ligger på midtnormalen gennem M_c .

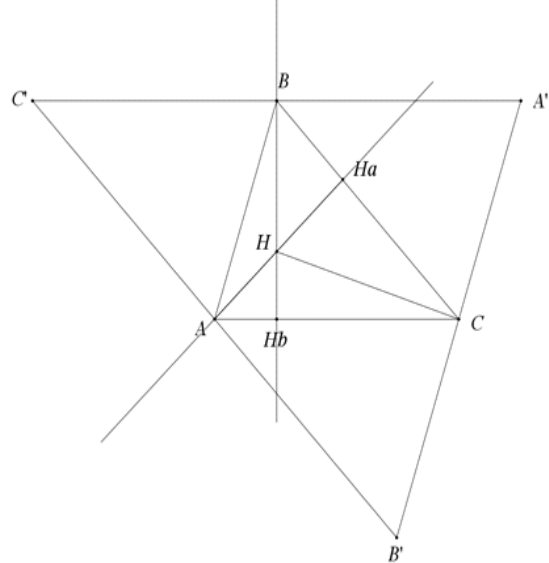
Vi bemærker, at her skal vi tilføje argumentet, at hvis M ligger på alle midtnormaler, er der lige langt til alle hjørner, dvs. M er centrum for en cirkel gennem de tre hjørner.

Sætning 5: Højderne i en trekant

I enhver trekant gælder, at de tre højder skærer hinanden i samme punkt

<p>Tegn en tilfældig trekant, ABC, og tegn højderne fra A og fra B.</p> <p>Højderne skærer de modstående sider i henh. H_a og H_b.</p> <p>Højderne skærer hinanden i et punkt, vi kalder for H.</p> <p>Træk linjen fra H til C. Påstanden er nu, at denne linje ligger på højden fra C.</p>	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------

Geometrisk bevis

<p>En af de centrale erfaringer, man gør sig når man har arbejdet med mange og mange forskellige geometriske problemer er, at man aldrig skal være "bange" for at udvide den givne tegning ved at tilføje nye linjer.</p> <p>At tegne en sådan linje, der fører mod målet, hører til kategorien "at få en god ide". Gode ideer kommer ikke ud af det blå, men bygger på ens viden og erfaring. I dette tilfælde har vi allerede en vis viden om linjer ved trekanter: Sætning 3 siger at <i>midt-normalerne</i> skærer hinanden i et punkt.</p> <p>Hvis vi nu gennem A tegner en linje parallel med a, gennem B tegner en linje parallel med b, og gennem C tegner en linje parallel med c, så får vi en ny trekant $A'B'C'$.</p>	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

1. Argumenter for, at de tre højder i den gamle trekant også står vinkelret på siderne i den nye store trekant.

2. Firkanterne $ABA'C$, $AC'BC$, $ABC'B'$ er ud fra konstruktionen alle parallelogrammer (overvej det!). Anvend dette til at vise, at vise:

$$|C'B| = |BA'| \quad |B'C| = |CA'| \quad |C'A| = |AB'|$$

3. Anvend nu sætningen om midtnormalerne til at konkludere at de tre højder skærer hinanden i samme punkt.

Bevis med anvendelse af vektorer

<p>Vi tegner lige trekanten med de to højder samt linjen fra C til H igen. Vi skal vise, at CH ligger på højden fra C.</p>	
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

<p>1. Vi ved, at</p> $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}, \text{ og derfor: } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}, \text{ og derfor: } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ <p>Omskriv til:</p> $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ <p>2. Vis, at vi ud fra de to ligninger får følgende:</p> $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ <p>3. Vis, at dette kan omskrives til: $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ og konkluder, at CH ligger på højden fra C</p>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Selv om det geometriske bevis rummer et flot argument, så bygger det jo grundlæggende på, at man får den gode ide med at tegne den store trekant. Vektorbeviset er derimod helt ligetil.

1.5 Medianerne i trekanter og i tetraedre

Sætning 6: Medianerne i en trekant

I enhver trekant gælder, at de tre medianer skærer hinanden i samme punkt, og at dette punkt deler hver af medianerne i forholdet 2:1

På vektorform: punktet M er bestemt ved:

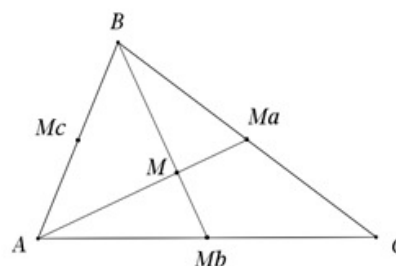
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OC}$$

Tegn en tilfældig trekant, ABC , og tegn medianerne fra A og fra B .

Medianerne skærer de modstående sider i henh.

M_a og M_b .

Medianerne skærer hinanden i et punkt, vi kalder for M .



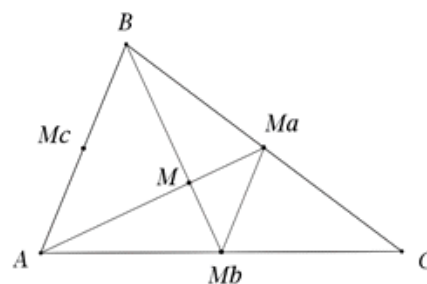
Geometrisk bevis

Vi skal vise, at punktet M deler medianerne i forholdet 2:1, dvs. vise, at $|BM| = 2 \cdot |MM_b|$ og $|AM| = 2 \cdot |MM_a|$. Kan vi vise det, så ville vi få samme resultat, hvis vi startede med medianerne M_a og M_c . Men det må betyde, at punktet M både er skæringspunkt for M_a og M_b og for M_a og M_c , dvs. medianerne skærer hinanden i det samme punkt M .

Når vi skal vise noget om et *forhold* mellem siderne, så er metoden normalt at lede efter ensvinklede trekanter.

Hvis vi placerer os i C og herfra skalerer trekant ABC ned med $\frac{1}{2}$, så vil A blive ført over i M_a og B over i M_b , og dermed linjen AB over i linjen fra M_a til M_b .

Heraf får vi, dels at linjerne AB og MM_a er parallelle, dels at $|M_aM_b| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$.



1. Vis at trekanterne MAB og MM_aM_b er ensvinklede.

2. Vis at $|AM| = 2 \cdot |MM_a|$ og $|BM| = 2 \cdot |MM_b|$

3. Forklar, hvordan vi med en anden tegning tilsvarende kunne nå frem til, at $|BM| = 2 \cdot |MM_b|$ og $|CM| = 2 \cdot |MM_c|$.

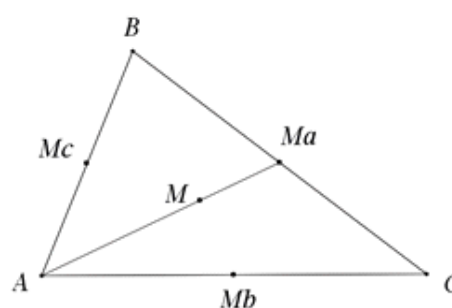
3. afslut nu selv beviset ved at argumentere for, at vi heraf kan slutte det, sætningen siger.

Bevis med anvendelse af vektorer

I trekant ABC tegner vi medianen fra A , og afsætter punktet M på medianen således at $\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$. Vi vil finde et udtryk for M , eller som vektor: for \overline{OM} , og ud fra dette argumentere for, at medianerne skærer hinanden i M .

1. Vis at:

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_a} \\ &= \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot (\overline{OM_a} - \overline{OA}) \end{aligned}$$



2. Udnyt at M_a er midtpunkt, og anvend sætning 1 til at omskrive så vi får følgende udtryk:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OB} + \frac{1}{3} \cdot \overline{OC}$$

3. Argumenter nu for, at uanset hvilken median vi var startet med, så ville vi få samme formel, og for, at dette viser sætningen.

Igen ser vi, at selvom det geometriske bevis kan være smukt i sit ræsonnement, så skal vi her hver gang mobilisere en ny viden om geometri, mens det vektorielle bevis igen hovedsageligt anvender indskudssætningen. Begge beviser bygger på den formodning om forholdet 2:1 som udtrykkes i sætningen. Hvornår man første gang indser dette ved vi ikke, men det er tidligt i den græske matematiks historie, og det er sikkert som meget andet opstået ud fra erfaringen - og derefter prøver man at bevise det.

Øvelse 1.1

Argumenter for, hvorfor medianernes skæringspunkt også kaldes for trekantens tyngdepunkt.
(Hint: Vi forestiller os, at trekanten er en fysisk genstand med en ensartet masse, fx en pap-trekant. Argumenter først for at en median deler en trekant i to med ens areal. Tegn derefter linjer gennem hver af de to trekanter, der er parallelle med medianen og som har samme afstand til medianen. Vis at disse linjer har samme længde. Konkluder)

Sætning 7: Medianerne i et tetraeder

I et vilkårligt tetraeder $ABCD$ skærer de 4 medianer hinanden i samme punkt M .

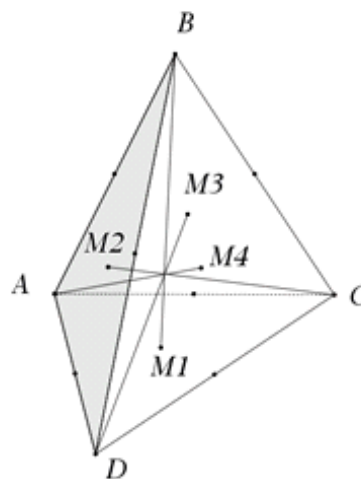
Punktet M er bestemt ved:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{OD}$$

Vi tegner et tetraeder $ABCD$ (en trekantet pyramide), og skal altså forestille os, at i trekanten i bunden rager punktet D ud af fladen, ud mod os.

Hver af de 4 sideflader er en trekant og for hver af dem bestemmer vi medianernes skæringspunkt. Det er på figuren markeret som M_1, M_2, M_3 og M_4 .

Tetraederets medianer er linjerne fra et hjørne til den modstående trekants medianpunkt (tyngdepunkt). Se figuren. Den ene påstand i sætningen er nu, at disse 4 linjer går gennem samme punkt. Den anden påstand er at dette punkt er "gennemsnittet" af de 4 hjørnerpunkter.



Vi vil kun gennemføre et vektorielt bevis, da det geometriske bliver for indviklet i det generelle tilfælde. Vi vender tilbage til det geometriske bevis i tilfældet med et regulært tetraeder (alle sider har samme længde).

Lad M være bestemt ved at punktet ligger på medianen AM_4 , og at det deler denne i forholdet 3:1. Dvs.

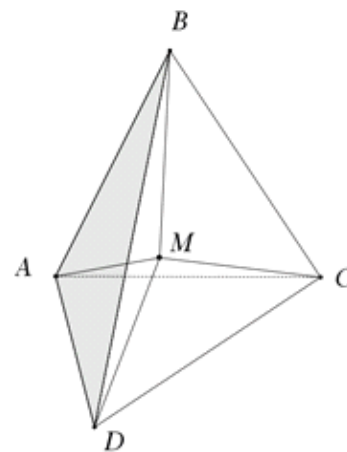
$AM = \frac{3}{4} \cdot AM_4$. Dette skriver vi på vektorform og finder et udtryk for \overrightarrow{OM} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AM_4} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \cdot (\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Øvelse 1.2

a) Argumenter for omskrivningerne og fuldfør selv disse, ved at udnytte sætning 6.

b) Argumenter for, at når vi har fundet dette udtryk for \overline{OM} , så vil punktet M være et fælles skæringspunkt for de fire medianer.



Vi vil i næste kapitel studere det regulære tetraeder nærmere, specielt "skelettet" med de 4 ben ud fra M .

2. Skummets lokale struktur og tetraederets egenskaber

I filmen fortæller Steen Markvorsen om Plateaus observationer fra 1873 om skumstrukturer: Lokalt omkring knudepunkter er strukturen lineær. I knudepunkterne mødes altid fire kanter, og det sker på en måde, så vinklen parvis mellem kanterne altid er den samme, nemlig $\arccos(-\frac{1}{3})$. I dobbeltbobler er vinklen mellem fladerne altid 120° . Og i dobbeltbobler, der er bygget af stykker af tre kugleflader, gælder der en særlig smuk relation mellem kuglernes krumning – dvs også mellem deres radier. At skumstrukturer lokalt faktisk opfører sig sådan blev som fortalt i filmen først vist i henh. 1976 og 2002.

I dette kapitel antager vi, at tetraederet faktisk er en korrekt matematisk model for den lokale struktur, og lægger op til, hvordan man ud fra dette kan argumentere for de omtalte egenskaber.

Bemærk, at det konsekvent drejer sig om et regulært tetraeder, dvs en trekantet pyramide, hvor kanterne har samme længde, som vi af nemheds grunde sætter til 1.

Da hver af de fire sideflader således er ligesidede trekanter, så er medianen og højden sammenfaldende. Det gør det forholdsvis enkelt at udregne de forskellige størrelser i tetraederet.

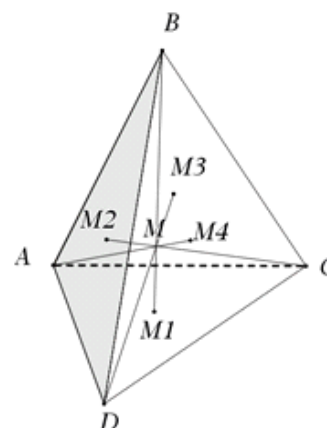
2.1 Den lokale struktur

Vi tegner et regulært tetraeder $ABCD$, og skal altså forestille os, at i trekanten i bunden rager punktet D ud af fladen, ud mod os.

Hver af de 4 sideflader er en ligesidet trekant og for hver af dem bestemmer vi medianernes skæringspunkt. Det er på figuren markeret som M_1, M_2, M_3 og M_4 .

Tetraederets medianer er linjerne fra et hjørne til den modstående trekants medianpunkt (tyngdepunkt). Se figuren. I kapitlet om *Vektorernes beskrivelseskraft* har vi vist, at disse 4 medianer altid, i ethvert tetraeder og ikke kun i de regulære, skærer hinanden i et og samme punkt. På figuren er dette betegnet M .

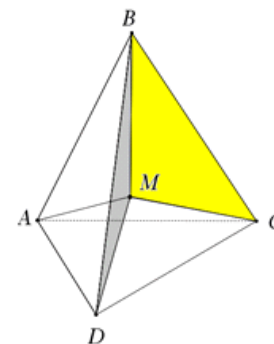
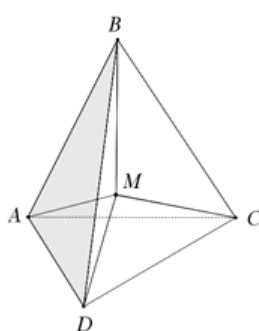
Endvidere har vi der vist, at dette punkt deler hver af tetraederet medianer i forholdet 3:1.



Hvis vi lige for en stund skræller alle "mellemlinjer" væk, så har vi følgende situation:

På den første illustration har vi blot medtaget tetraederets 4 hjørner og midtpunktet, medianernes skæringspunkt, M .

På den næste illustration har vi farvelagt to af de flader, som hjørnerne danner sammen med M . Af symmetri Grunde er det klart, at de tre vinkler mellem disse tre flader

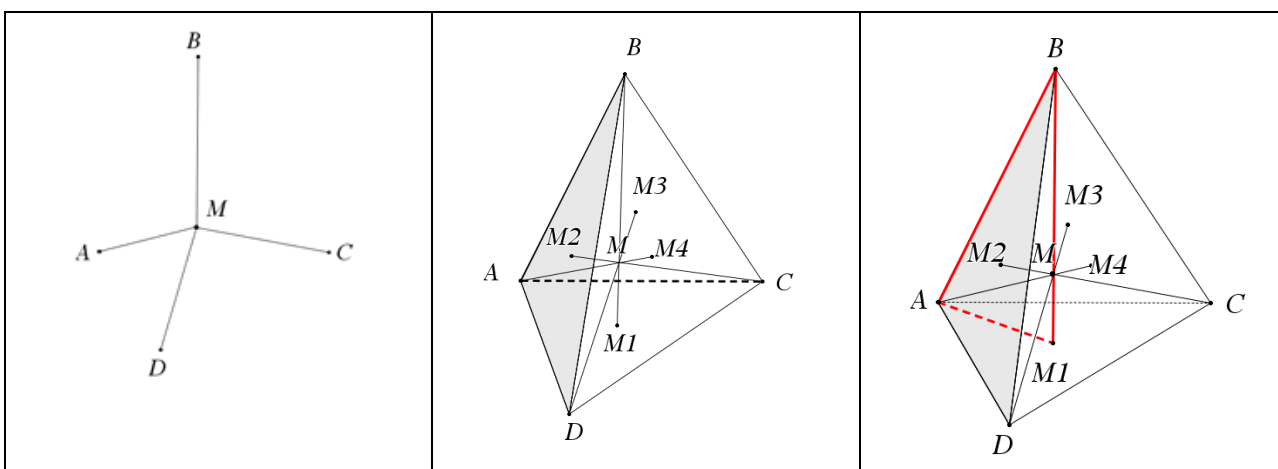


er lige store, og at de derfor hver er 120° .		
------------------------------------------------------	--	--

Dette er den første af Plateaus observationer.

2.2 Vinklen mellem kanterne er $\arccos(-\frac{1}{3})$

Den næste rummer lidt større udfordringer, da det vedrører vinklerne mellem benene fra M og ud til de 4 hjørner. På den første illustration nedenfor, den som Steen Markvorsen kalder "det lineariserede Plateauskelet", er det fx vinklen mellem MA og MB. I filmen fortæller Steen Markvorsen, at denne vinkel altid er $\arccos(-\frac{1}{3})$. Det er den anden af Plateaus observationer.



For at nå frem til at bevise det, må vi tage udgangspunkt i konstruktionen, se den midterste figur. Vi ved, at M deler medianerne i forholdet 3:1, så vi har på den tredje illustration trukket denne median op, og ligeledes tegnet medianstykket fra A til M_1 i trekant ACD. Den røde trekant er en retvinklet trekant, vi kender kantlængden, som vi har sat til 1, så denne trekant må kunne anvendes til at beregne højden H i tetraederet, altså stykket BM_1 . Men vi mangler at kende længden af stykket AM_1 .

<p>Vi klipper trekant ACD ud, og har markeret de kendte sidelængder. Den er jo tegnet i et rumligt perspektiv, så vi husker, at medianen også er højde, da det er ligesidede trekanter, dvs. vi i virkeligheden har en situation som i den højre illustration.</p>		
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--

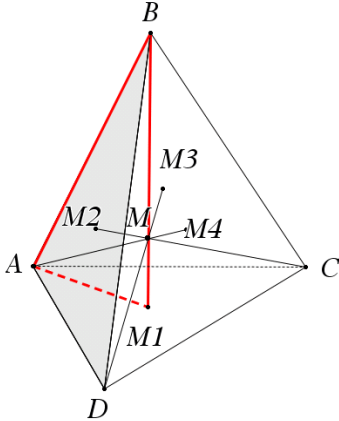
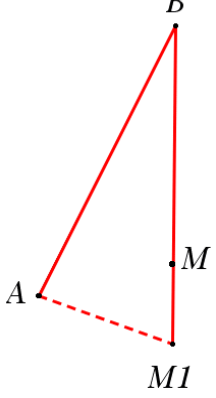
Øvelse 2.1

a) Vis, at $|AE| = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

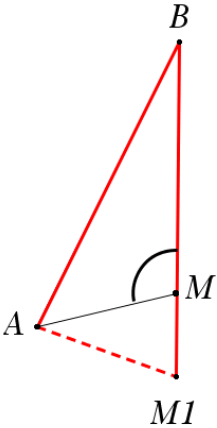
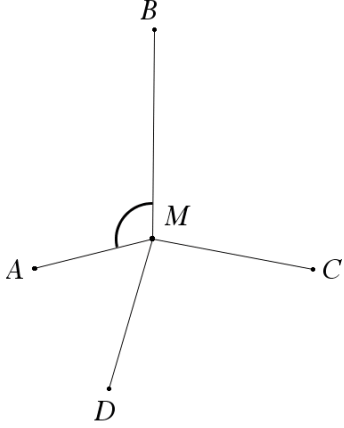
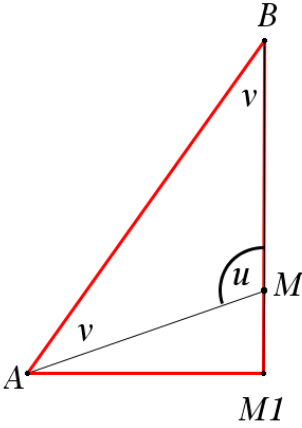
b) Udnyt, at M_1 er skæringspunktet for mediaanerne til at vise, at $|AM_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vi vil nu beregne højden i tetraederet og ud dette beregne længden af stykket BM . Af symmetri svarer dette også til længden af de andre tre ben.

Vi betragter vores oprindelige konstruktion og klipper den røde trekant ud, som det er sket i den højre illustration:

<p>Øvelse 2.2</p> <p>a) Vis, at længden af stykket BM er:</p> $ BM_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ <p>b) Vis, at $BM = \sqrt{\frac{3}{8}}$, og $MM_1 = \sqrt{\frac{1}{24}}$</p> <p>(Hint: Anvend, at M deler medianerne i forholdet 3:1)</p>		
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Vi trækker nu linjen fra A til M i trekanten. Vinklen mellem MA og MB er den søgte vinkel i "det lineariserede Plateau-skelet": Trekanten er set i et lidt skævt perspektiv, så vi drejer den lige, så vi har den i front – se den tredje figur.

		
-------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------

Trekant ABM_1 er retvinklet, og trekant ABM er ligebenet. Vi kalder den søgte vinkel u og de to andre i ABM_1 for v . Der er nu to lidt forskellige metoder til at vise det søgte resultat.

Øvelse 2.3 Metode: Anvendelse af de trigonometriske additionsformler

a) Argumenter for, at trekant ABM_1 giver os:

$$\cos(v) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{og} \quad \sin(v) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Argumenter for, at $u = 180 - 2v$, samt at $\cos(u) = -\cos(2v)$.

c) Anvend additionsformlen for cosinus, eller mere direkte: formelen for cosinus til den dobbelte vinkel til at få resultatet: $\cos(u) = 1 - 2 \cdot \cos^2(v)$.

d) Kombiner nu resultaterne så du når frem til: $u = \arccos(-\frac{1}{3})$.

Øvelse 2.4 Metode: Anvendelse af cosinusrelationerne

a) I trekant ABM kender vi siderne: $AB = 1$ og $AM = BM = \sqrt{\frac{3}{8}}$

b) Vis, at cosinusrelationerne for trekant ABM giver følgende

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(u) \\ &= 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 \cdot (1 - \cos(u)) \end{aligned}$$

c) Argumenter for, at dette giver os:

$$\cos(u) = -\frac{1}{3}, \text{ dvs } u = \arccos(-\frac{1}{3})$$

Vi har hermed argumenteret for, at den matematiske tetraeder model for sæbeskumets opførsel ved knudepunkterne opfylder de første to af plateaus tre regler:

1. De tre flader, der mødes, danner parvis vinkler på 120° .
2. I et knudepunkt er vinklen mellem hvert par af kanter lig med $\arccos(-\frac{1}{3})$.

2.3 Sammenhængen mellem middelkrumningerne i en dobbelt-bobbel

Plateaus 3. regel rummer en karakteristik af cellevæggene, samt relationerne mellem dem, hvor de mødes.

En cellevæg er altid en flade med konstant middelkrumning – men ikke nødvendigvis et stykke af en kugleflade. Denne del vender vi tilbage i et materiale om "rullefigurer". Men yderligere gælder der, at hvor cellevæggene mødes, der hersker der en slags "ohms lov" mellem deres middelkrumninger.

Dette behandler vi her i det næst-simpleste tilfælde, nemlig for en dobbelt-bobbel. Dobbeltbobler består af to bobler, der er "svejset sammen". Hvor de to bobler er "svejset sammen", er der en tredje cellevæg, der holder de to boblekamre adskilt. I dobbelt-bobbel tilfældet er fladerne faktisk dele af kugleflader.



Vi tegner et lodret snit gennem en dobbelt-bobbel.

De to bobler her centrum i henholdsvis C_1 og C_2 , med radier henholdsvis R_1 og R_2 .
Boblerne mødes i en ring, der er kanten af et stykke af en kugleflade, og denne store kugle, som i filmen kaldes *den virtuelle kugle*, har centrum i C_0 og radius R_0 .

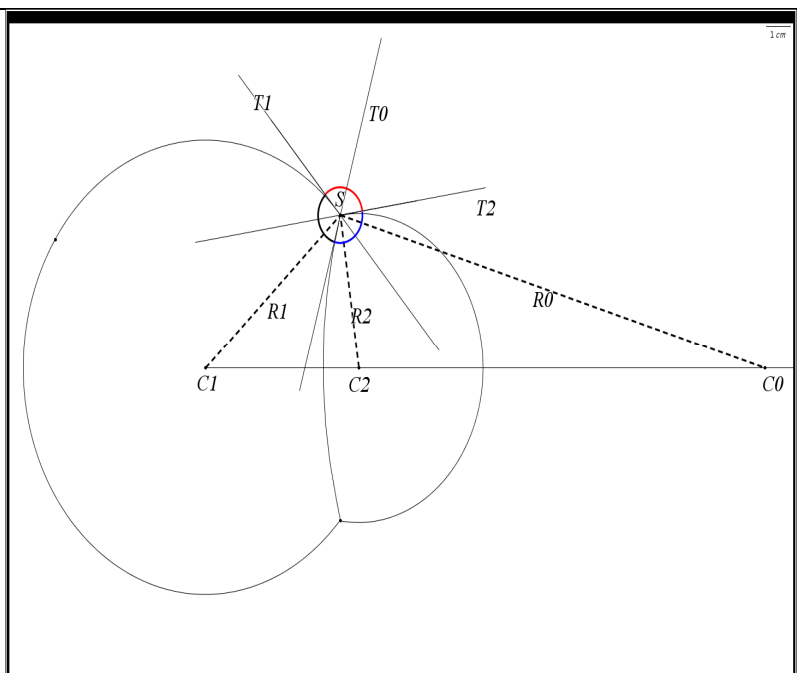
Påstanden er nu, at der gælder følgende relation mellem de tre radier:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \quad (*)$$

Kuglerne har konstant krumning,

$H_i = \frac{1}{R_i}$, så (*) kan også udtrykkes:

$$H_0 = H_2 - H_1$$



Den position radierne og krumningerne i de to "rigtige" bobler indgår på i de to relationer er naturligvis bestemt af, hvilken der er den mindste. På tegningen er kugle nr. 2 den mindste, så den har den største krumning.

På en lille ekstra filmstrimmel, du kan hente [her](#) gennemfører Steen Markvorsen et intuitivt simpelt og elegant argument for formelen, der inddrager en viden om de fysiske forhold vedrørende tryk og radius.

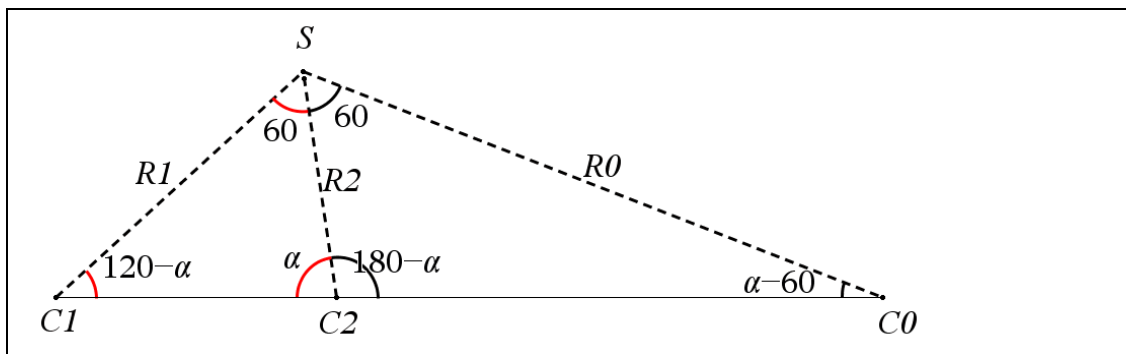
Vi vil her gennemføre et argument, der bygger på vores trigonometriske viden. Vi betragter de to trekanter C_1SC_2 og C_2SC_0 . På tegningen har vi indtegnet tangenterne til de tre cirkler (snittet af kugleskallerne), henh. T_1, T_2 og T_0 . En tangent står vinkelret på radius i cirklen. Samtidig ved vi fra Plateaus første observation, at vinklerne mellem tangenterne, som jo er vinklerne, hvor kugleskallerne mødes, er 120° . Vi kender altså de tre vinkler, der på tegningen er angivet med en sort, en blå og en rød vinkelbue.

Øvelse 2.5 Vinklerne mellem de tre radier

Vis, at vinklerne mellem radierne R_1 og R_2 og mellem R_2 og R_0 begge er 60° .

Øvelse 2.6 Trekanternes vinkler

Vi giver vinklen $\angle C_1C_2S$ navnet α . Argumenter så for, at trekanternes vinkler er som angivet på tegningen:



Øvelse 2.7 Anvendelse af sinusrelationerne

Vis, at sinusrelationerne for de to trekanter giver følgende ligninger:

- a) venstre: $H_1 \cdot \sin(\alpha) = H_2 \cdot \sin(120 - \alpha)$
 b) højre: $H_2 \cdot \sin(\alpha - 60) = H_0 \cdot \sin(180 - \alpha)$

Øvelse 2.8 Anvendelse af enhedscirklen

Argumenter med brug af enhedscirklen for følgende identiteter:

- a) $\sin(180 - \alpha) = \sin(\alpha)$
 b) $\cos(60) = \frac{1}{2}$
 c) $\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) $\cos(120) = -\frac{1}{2}$
 e) $\sin(120) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Øvelse 2.9 Anvend additionsformlerne

For sinus og cosinus gælder en række formler, der binder funktionerne sammen og som gør det muligt at bryde sammensatte udtryk op i mere simple bestanddele. Blandt disse er de såkaldte *additionsformler*, og en af disse kan skrives på formlen:

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \sin(y) \cdot \cos(x)$$

Udnyt nu denne samt resultaterne i øvelse 8, til at omskrive de to ligninger øvelse 7 til følgende:

- a) $H_1 \cdot \sin(\alpha) = H_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot H_2 \cdot \sin(\alpha)$
 b) $\frac{1}{2} \cdot H_2 \cdot \sin(\alpha) - H_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\alpha) = H_0 \cdot \sin(\alpha)$

Isoler udtrykket $H_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\alpha)$ i de to ligninger og vis, at vi herved kan udlede:

c) $\left(\frac{1}{2}H_2 - H_0\right) \cdot \sin(\alpha) = \left(H_1 - \frac{1}{2}H_2\right) \cdot \sin(\alpha)$

- d) Udled nu det ønskede resultat:

$$H_0 = H_2 - H_1$$

3. Krumning af kurver

Materialerne i dette kapitel er hentet fra kapitel 6 i *Hvad er matematik? A*.

3.1 Kurver har en krumning, hvis de er lokalt cirkulære

En kurve i planen eller i rummet, der kan betragtes som den bane kurve en partikel gennemløber i løbet af en vis tid, kaldes for en parameterkurve. Det punkt P_t som partiklen befinder sig i til tiden t , kan beskrives ved stedvektoren $\vec{r}(t) = OP_t$, og $\vec{r}(t)$ kaldes en *vektorfunktion*. Når $\vec{r}(t)$ skrives således:

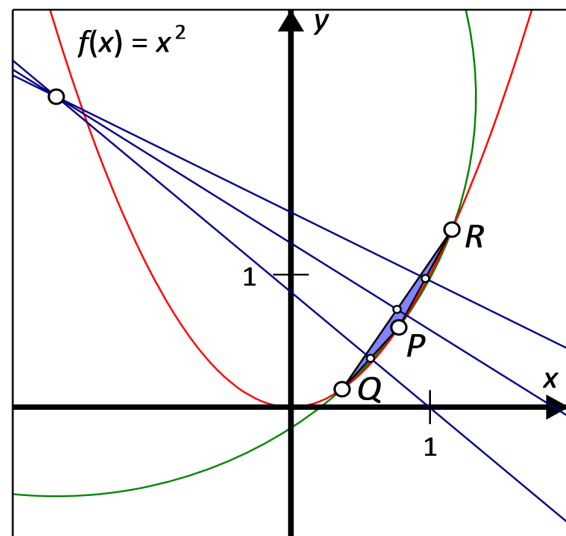
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

kaldes $x(t)$ og $y(t)$ for koordinatfunktioner.

I teorien for vektorfunktioner lærer man at bestemme differentialkvotienter ved at differentiere koordinatvis. Som med reelle funktioner angiver hastighedsvektoren $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ retningen for tangenten til kurven,

mens den dobbelt afledede, accelerationsvektoren $\vec{r}''(t)$ er et mål for, hvordan tangenten varierer - og variation er både mht. størrelse og retning. Men vi skal passe på med direkte at overføre metoder fra teorien for reelle funktioner, for selv om bane kurverne tegnes op i et almindeligt 2D koordinatsystem, så er der en tredje variabel i spil, tiden t . Eksempelvis skal krumningen af en given cirkel naturligvis ikke afhænge af, hvor hurtigt vi gennemløber den. Når vi måler krumning skal vi altså i en vis forstand "nulstille" måden vi gennemløber kurven på, og alene se den som en geometrisk figur.

Vi vil forsøge at trække på erfaringen fra reelle funktioner, hvor vi sagde, at en funktion er differentiable, hvis den er lokalt lineær, og hvor vi knyttede den første afledede til en ret linje, nemlig tangenten. Linjer er de mest simple geometriske figurer. Den næst mest simple geometriske figur er en cirkel. *Krumningen* af en kurve i et bestemt punkt P vil vi derfor søge at knytte til en cirkel, der lokalt i punktet P følger bane kurven. Geometrisk kan vi forestille os det således: Nærmere vi os punktet P fra begge sider, og vælger vi P og to punkter tæt ved P , så vil disse tre punkter bestemme en trekant, der har en omskrevet cirkel. I kapitel 1 om vektorer og trekanters egenskaber, var et af resultaterne, at midtnormalerne skærer hinanden i samme punkt, de er centrum for den omskrevne cirkel. På figuren har vi derfor konstrueret midtnormalerne. Når vi således triller ind mod P , vil disse cirkler nærme sig en bestemt cirkel, der kaldes krumningscirklen i punktet P



Når nabopunkterne Q og R nærmer sig grafpunktet P , vil den omskrevne cirkel for trekanten PQR nærme sig den bestemte cirkel, der kaldes krumningscirklen. Man siger også at denne cirkel "kysser" kurven i punktet P . Det engelske navn er *osculating circle*. På hjemmesiden af *Hvad er matematik? A* kan du finde en interaktiv version af figuren.

Cirklerne er altså byggeklodserne, hvormed vi skaber alle andre kurver. For at få en bedre fornemmelse af krumningsmålet vil vi derfor betragte en prototype på en kurve, nemlig en cirkel med radius R . Cirklen er placeret i et koordinatsystem, og kan her beskrives ved parameterfremstillingen:

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\theta) \\ R \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (*)$$

hvor θ er vinklen - målt i radianer - som retningsvektoren til punktet er drejet i forhold til 1. akse. Der er tale om en *jævn cirkelbevægelse*, da der blot indgår θ .

Vi vil nu bestemme den første og anden afledede af $\vec{r}(\theta)$, men som omtalt ovenfor skal vi "nulstille" måden vi gennemløber kurven på, og alene se den som en geometrisk figur. Angiver θ fx tiden kan vi se, at alle cirkler gennemløbes på samme tid, så farten på store cirkler er meget større end farten på små cirkler. Skal vi kunne sammenligne krumninger, skal farten være den samme. Dette sikrer vi ved en såkaldt *om-parametrisering*, hvor parameteren θ erstattes af en ny s , der angiver længden af buen, vi gennemløber.

Hvis s betegner det stykke på cirklen et punkt har bevæget sig siden starten, så har vi:

$$s = R \cdot \theta \quad \text{Overvej selv dette!}$$

$$\theta = \frac{s}{R} \quad \text{Roker rundt}$$

Indsæt og differentier mht s :

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ R \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}, \text{ der giver: } \vec{r}'(s) = \begin{pmatrix} R \cdot \frac{1}{R} \cdot -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ R \cdot \frac{1}{R} \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix}$$

Øvelse 3.1: Hastigheds- og accelerationsvektor for omparametriseret cirkelbevægelse

a) Beskriv retning og længde for hastighedsvektoren $\vec{r}'(s)$.

b) Vis at accelerationsvektoren $\vec{r}''(s)$ er lig med $\frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$

c) Beskriv retning og længde for vektoren $\begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$.

Denne lille øvelse giver os allerede nu to helt centrale erkendelser, som i en vis forstand er grundlaget for al krumningsteori: Når vi omparametriserer en cirkelbevægelse til buelængde, så er:

a) Længden af hastighedsvektoren $\vec{v} = \vec{r}'(s) = 1$

b) Længden af accelerationsvektoren $\vec{a} = \vec{v}' = \vec{r}''(s) = \frac{1}{R}$

Dette vil vi gerne generalisere:

Hastighedsvektor for en banekurve.

Lad os betragte en generel banekurve beskrevet af vektorfunktionen $\vec{r}(t)$. Hastighedsvektoren er $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$. Vi ønsker at omparametrisere til buelængde s . Buelængden kan betragtes som en funktion $s(t)$, og længden af stykket, der er gennemløbet fra t_0 til t er givet ved:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(x)| dx = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(x)| dx$$

(En nærmere redegørelse for dette kan du finde i appendiks 1)

Analysens hovedsætning fortæller os, at:

$$s'(t) = |\vec{r}'(t)| = |\vec{v}(t)| \tag{*}$$

Udnyt dette til at løse følgende:

Øvelse 3.2: Hastighedsvektoren på en omparametriseret bane er en enhedsvektor

For en generel banekurve beskrevet ved vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ gælder, at når man omparametriserer til buelængde: $\vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$, så får hastighedsvektoren længde 1, dvs farten bliver konstant 1:

$$\vec{r}'(s) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \text{ hvoraf } |\vec{v}(s)| = |\vec{r}'(s)| = 1$$

(Hint: Anvend sammensat differentiation: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$)

Krumning for en banekurve.

Tallet $\frac{1}{R}$ er et godt mål for krumningen af cirkler - overvej selv hvorfor.

I øvelse 1.1 så vi, at tallet $\frac{1}{R}$ optræder som en konstant der er ganget på *enhedsvektoren* $\begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$, og

denne enhedsvektor er vinkelret på hastighedsvektoren. Dette er karakteristisk for cirkler. For generelle banekurver, vil accelerationsvektoren altid kunne skrives som en sum af to vektorer, en i hastighedsvektorens retning, og en vinkelret herpå:

$$\vec{r}''(t) = \vec{r}''_s(t) + \vec{r}''_{\perp}(t) \tag{**}$$

Den første vektor, der følger banekurvens retning, kaldes for den *geodætiske krumning*. Den sidste vektor, der er vinkelret herpå, repræsenterer *generaliseringen af cirkelns krumningsmål*, og det er denne, der skal give os det generelle mål for krumning, den såkaldte *normalkrumning*.

Hastighedsvektoren bliver en *enhedsvektor*, når vi omparametriserer. Dette giver os metoden til at generalisere cirkelns krumningsmål. Lader vi nemlig \vec{e} betegne en enhedsvektor i hastighedsvektorens (dvs. tangentens) retning så gælder:

$(\vec{e})^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$	Udnyt formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v)$
$2 \cdot \vec{e}' \cdot \vec{e} = 0$	Differentier på begge sider
$\vec{e}' \perp \vec{e}$	Udnyt sætning om orthogonalitet

Dvs. betragter vi en enhedsvektor \vec{e} i tangentens retning, så vil den afledede \vec{e}' af denne stå vinkelret på tangenten, eller sagt med andre ord: være parallel (og proportional) med \hat{e} . Bemærk, at dette resultat er uafhængigt af, om vi differentierer mht. s eller t .

Øvelse 3.3. Tilfældet hvor $\vec{e}' = 0$

Ovenfor sluttede vi fra $2 \cdot \vec{e}' \cdot \vec{e} = 0$ til $\vec{e}' \perp \vec{e}$. Men der er jo også et andet tilfælde, nemlig $\vec{e}' = 0$.

Da \vec{e} er en enhedsvektor, så kan den kun variere mht. retning, ikke mht. længde.

Argumenter nu for, at dette tilfælde svarer til at banekurven er en ret linje.

Har vi omparametriseret til buelængde s , så er $\vec{e} = \vec{r}'(s)$, og $\vec{e}' = \vec{r}''(s)$. Dvs. er kurven parametriseret med buelængde, er den geodætiske krumning 0. Og hele krumningsmålet er udtrykt gennem *normalkrumningen*, som det derfor giver god mening blot at kalde for *krumningen*.

Undersøgelsen af krumningsbegrebet konkluderer vi derfor med følgende definition:

<p>Definition: Krumning for en vilkårlig differentiabel banekurve</p> <p>Givet en banekurve. <i>Krumningen</i> i et punkt P er proportionalitetskonstanten κ i formlen: $\frac{d\vec{e}}{ds} = \kappa \cdot \hat{e}$,</p> <p>hvor \vec{e} er en enhedsvektor med samme retning som tangenten i P, og s er den gennemløbne strækning (kurvelængden). <i>Krumningscirklen</i> i punktet P er cirklen med samme tangent i P og med radius bestemt af $\kappa = \frac{1}{R}$.</p>	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

3.2. Krumningen for en banekurve

Vi har nu defineret et krumningsbegreb, der generaliserer vores intuitive opfattelse af cirklers krumning. Læg mærke til at vi differentierer med hensyn til buelængden, så krumningen alene afhænger af banekurvens form og ikke af fx hvor hurtigt vi gennemløber den. Men det betyder også at formlen er lidt vanskelig at udnytte i praksis. Vi har jo normalt ikke et simpelt udtryk for buelængden s . Vi vil derfor udlede en formel for krumningen, som vi umiddelbart kan regne på.

Lad os betragte den fysiske situation, hvor en bil skifter retning, fx fordi den går ind i et sving. Bilen udsættes for en centripetalacceleration, og der skal derfor være en kraft, der hindrer udskridning. Denne kraft kommer fra gnidningen mellem dæk og vejbane. Hvis der er meget glat på vejbanen, kan gnidningen ikke levere den fornødne kraft, og bilen skrider ud. Med en given fart er det radius i svinget, der bestemmer størrelsen af centripetalaccelerationen. Gnidningen sætter altså grænser for hvor kraftigt bilen kan svinge. Det samme gælder for vejsving, hvor radius er fast. Her sætter gnidningen en grænse for hvor hurtigt man kan køre rundt i svinget. Da gnidningskræfter af denne slags typisk er proportionale med genstandens masse betyder det i praksis at der er en øvre grænse for hvor stor centripetalaccelerationen må blive.

Bevægelsen er bestemt af to faktorer - retning og fart. For at få det klart frem skriver vi:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}$$

hvor \vec{e} er en enhedsvektor i bevægelsens retning. Denne enhedsvektor \vec{e} rummer altså informationen om bevægelsens retning, hvor vi er på vej hen, mens farten v rummer informationen om hvor hurtigt vi bevæger os, dvs. hvor hurtigt vi kommer frem.

Ved differentiation af hastigheden fås accelerationen:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{e})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e} + v \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} = v'(t) \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \vec{e}'(t)$$

Her peger det første led netop i bevægelsens retning.

Det andet led står vinkelret på bevægelsen, som vi så i afsnit 1. For at få krumningen i fokus skal vi differentiere mht. s .

Ved brug af reglen for sammensat differentiation fås:

$$\vec{e}'(t) = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa \cdot \hat{e} \cdot v = v \cdot \kappa \cdot \hat{e}$$

(her har vi dels udnyttet *definitionen* på krumning, dels formelen (*) fra afsnit 1)

Vi indsætter i formelen for accelerationen:

$$\vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{e} + v \cdot \vec{e}'(t) = v'(t) \cdot \vec{e} + v^2 \cdot \kappa \cdot \hat{e}$$

Vi er nu klar til at udlede en formel for krumningen, som vi umiddelbart kan regne på:

Sætning 1: Formel for krumningen af en baneurve

Krumningen for en kurve med parameterfremstillingen $\vec{r}(t)$ er givet ved:

$$\kappa = \frac{\vec{a} \cdot \hat{v}}{v^3} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Bevis

Vi prikker med \hat{v} , for at fjerne første led

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = v \cdot (\vec{a} \cdot \hat{e})$$

Udnyt, at $\vec{v} = v \cdot \vec{e}$ giver $\hat{v} = v \cdot \hat{e}$

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = v \cdot (v'(t) \cdot \vec{e} + v^2 \cdot \kappa \cdot \hat{e}) \cdot \hat{e}$$

Indsæt udtrykket for \vec{a}

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = v \cdot (v'(t) \cdot \vec{e} \cdot \hat{e} + v^2 \cdot \kappa \cdot \hat{e} \cdot \hat{e})$$

Udnyt regneregler og prik ind i parentesen

$$\vec{a} \cdot \hat{v} = v \cdot (v^2 \cdot \kappa)$$

Udnyt, at \vec{e} og \hat{e} er ortogonale enhedsvektorer

$$\kappa = \frac{\vec{a} \cdot \hat{v}}{v^3}$$

Isoler κ - størrelserne er jo blot reelle tal

Hermed er første del af sætningen vist.

Øvelse 3.4

Vis anden del af formlen.

Grafer for reelle funktioner er også banekurver. Vi får derfor følgende version af sætningen for reelle grafer:

Sætning 2: Krumningen for en graf

Hvis en kurve er givet som grafen for en funktion $y = f(x)$ er krumningen givet ved $\kappa = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1 + f'(x)^2})^3}$.

Specielt vil der i et stationært punkt, hvor $f'(x) = 0$, gælde $\kappa = f''(x)$.

Øvelse 3.5

- Opskriv grafen som en parameterfremstilling.
- Bevis sætningen ved brug af formlen i sætning 1

Øvelse 3.6

- Bestem krumningen i et vilkårligt punkt af grafen for $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.
Bestem krumningen i $x = 2$
Hvor er krumningen 0? Tegn grafen og undersøg hvad dette er for et punkt.
Hvad sker der med krumningen, når $x \rightarrow \infty$?
- Bestem krumningen i et vilkårligt punkt af grafen for $f(x) = x^2 + 2x + 1$
Bestem krumningen i $x = 1$.
Hvad sker der med krumningen, når $x \rightarrow \infty$?
- Bestem krumningen i et vilkårligt punkt af grafen for $f(x) = \sqrt{x}$.
Bestem krumningen i $x = 2$.
Hvad sker der med krumningen, når $x \rightarrow 0$?

Når bevægelsen er 2-dimensional kan retningen for bevægelsen identificeres med en retningsvinkel θ (i forhold til en fast retning, fx 1. akse). Vi kan derfor skrive:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (*)$$

Sætning 3: Krumningen udtrykt ved retningsvinklen θ

Krumningen for en kurve i planen er givet ved $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$,

hvor θ er vinklen mellem hastighedsvektoren og en fast retning.

Bemærkning: I nogle fremstillinger anvendes denne formel som definition på krumning, hvorefter man udleder formlen i vores definition som en sætning.

Bevis:

Vi har pr definition: $\frac{d\vec{e}}{ds} = \kappa \cdot \hat{e}$

Vi udregner nu den afledede ud fra formlen (*) og sammenligner:

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cdot \frac{d\theta}{ds} \\ \cos(\theta) \cdot \frac{d\theta}{ds} \end{pmatrix}$$

Udnyt sammensat differentiation

$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \hat{e}$$

Udnyt regneregler for vektorer

Ved at sammenligne de to formler får vi den ønskede formel i sætningen.

Øvelse 3.7. Bevægelser med konstant krumning er præcis cirkelbevægelserne

a) Vis, at hvis bevægelsen foregår på en cirkel med radius R , så er $s = \theta \cdot R$

b) Udnyt sætningen til at vise, at for en cirkel med radius R gælder: $\kappa = \frac{1}{R}$.

c) Hvis der omvendt gælder, at retningsvinklen er proportional med buelængden, dvs. $\theta = k \cdot s$, så kan man vise, at bevægelsen er cirkelbevægelse på en cirkel med radius $R = \frac{1}{k}$. Vis den ene dekl af detet, nemlig at krumningen er konstant.

3.3. Krumning for en kurve i rummet

En kurve i rummet er defineret som en kurve i planen, blot med en ekstra dimension:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Vi finder hastighedsvektor og accelerationsvektor som i planen. Kurvelængde bestemmes som i planen, og som det er beskrevet i afsnit 1 og i appendiks. Vi omparametriserer til buelængde, som vi har gjort i planen, og vi får de samme resultater, som vi så i afsnit 1.

Øvelse 3.8

Vis, at hastighedsvektoren på en omparametriseret rumkurve er en enhedsvektor.

Øvelse 3.9

I afsnit 1 betragtede vi en enhedsvektor parallelt med tangenten til en kurve (man kan tænke på hastighedsvektoren efter en om-parametrisering), og gennemførte udregningerne:

$$(\vec{e})^2 = \vec{e} \cdot \vec{e} = 1 \quad \text{Udnyt formlen } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

$$2 \cdot \vec{e}' \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{Differentier på begge sider}$$

$$\vec{e}' \perp \vec{e} \quad \text{Udnyt sætning om ortogonalitet}$$

- a) Overvej om disse udregninger også holder i rummet.
- b) I afsnit 1 behandlede vi særligt tilfældet, hvor $\vec{e}' = 0$
Gør det også her – hvad er din konklusion?
- c) I afsnit 1 konkluderede vi på tilfældet $\vec{e}' \neq 0$, at:
 \vec{e}' er ortogonal til \vec{e} og derfor er parallel (og proportional) med \hat{e} .
Hvilken konklusion kan vi drage når vi er i 3D?

Den grundlæggende egenskab, vi opdagede i planen, er, at den omparametriserede accelerationsvektor er ortogonal til \vec{e} . I rummet kan vi imidlertid ikke danne tværvektoren \hat{e} , her er det en hel plan, der er ortogonal til \vec{e} . Vi vil nu gå lidt dybere ind i dette ved at vende tilbage til den oprindelige bevægelse, før omparametriseringen.

Bevægelsen i rummet er som i planen bestemt af to faktorer - retning og fart. For at få det klart frem skriver vi:

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}(t)$$

hvor $\vec{e}(t)$ er en enhedsvektor i bevægelsens retning. Denne enhedsvektor $\vec{e}(t)$ rummer altså informationen om bevægelsens retning, hvor vi er på vej hen, mens farten $v(t)$ rummer informationen om hvor hurtigt vi bevæger os, dvs. hvor hurtigt vi kommer frem.

Ved differentiation af hastigheden fås accelerationen:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t) \cdot \vec{e}(t))}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \frac{d\vec{e}(t)}{dt} = v'(t) \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \vec{e}'(t) \quad (*)$$

Accelerationsvektoren er altså en linearkombination af de to vektorer $\vec{e}(t)$ og $\vec{e}'(t)$

Øvelse 3.10

Vi undersøger først om et af de to led kan være $\vec{0}$, dvs om $\vec{a}(t)$ kunne være parallel med en af de to vektorer $\vec{e}(t)$ og $\vec{e}'(t)$.

- c) Hvis $v(t) \cdot \vec{e}'(t) = \vec{0}$ er enten $v(t) = 0$ eller $\vec{e}'(t) = \vec{0}$. Analyser de to muligheder.
- d) Hvis $v'(t) \cdot \vec{e}(t) = \vec{0}$, så er $v'(t) = 0$, da enhedsvektoren naturligvis ikke er nulvektoren. Analyser muligheden $v'(t) = 0$.

Konklusionen på øvelse 3.10 a) er, at hvis vi ser bort fra tilfældet, hvor farten er 0, eller hvor bevægelsen foregår langs en ret linje, så vil accelerationsvektoren ikke være parallel med tangenten. Bortset fra dette tilfælde vil accelerationsvektoren og tangenten altså være lineært uafhængige og udspænde en plan.

Vi skriver nu lidt videre på udtrykket (*) for at komme nærmere et udtryk for krumningen af rumkurven:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \frac{d\vec{e}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \frac{d\vec{e}(s(t))}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v'(t) \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \vec{e}'(s) \cdot v(t)$$

For kurver i planen fandt vi et udtryk for krumningen ved at ”prikke med” tværvektoren til \vec{v} . I rummet kan vi få samme effekt ved at krydse med vektor \vec{v} , fordi hastighedsvektoren følger tangenten, dvs den er parallel med \vec{e} , og dermed er krydsproduktet af de to lig med 0:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= v'(t) \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \vec{e}'(s) \cdot v(t) \\ \vec{a}(t) \times \vec{v}(t) &= (v'(t) \cdot \vec{e}(t) + v(t) \cdot \vec{e}'(s) \cdot v(t)) \times \vec{v}(t) \\ \vec{a}(t) \times \vec{v}(t) &= v^2(t) \cdot \vec{e}'(s) \times \vec{v}(t) \end{aligned}$$

Vi ved fra øvelse 1.8, at $\vec{e}'(s) \perp \vec{v}$. Ser vi alene på længderne af vektorerne i den sidste ligning, så får vi:

$$\begin{aligned} |\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)| &= v^2(t) \cdot |\vec{e}'(s) \times \vec{v}(t)| \\ |\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)| &= v^2(t) \cdot |\vec{e}'(s)| \cdot |\vec{v}(t)| && \text{her bruger vi } \vec{e}'(s) \perp \vec{v} \\ |\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)| &= v^3(t) \cdot |\vec{e}'(s)| \end{aligned}$$

Heraf får vi altså formlen:

$$|\vec{e}'(s)| = \frac{|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)|}{v^3(t)} \quad (2)$$

Øvelse 3.11

Antag vi har en banekurve i xy -planen. Kurven er graf for en vektorfunktion: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Som todimensional kurve: $\vec{r}_{xy}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ giver sætning 1, at krumningen kan beregnes ved formel 1:

$$\kappa = \frac{\vec{a} \cdot \hat{\vec{v}}}{v^3}$$

Vis, at det tal vi får ved at beregne krumningen med denne formel er det samme som det tal vi får ved at udregne formel (2) ovenfor for den tre-dimensionale kurve. (*Hint*: Se fx på den geometriske tolkning af henh. prikprodukt og krydsprodukt som arealer)

Når vi ser bort fra retlinede bevægelser, der har krumning 0, og de særlige singulariteter på en kurve, hvor hastigheden momentant bliver 0, så vil hastigheds og accelerationsvektoren udspænde en plan. En normal til denne plan kaldes for *hovednormalen*, og vi kan bestemme en vektor langs denne således:

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)$$

Normalt er vi interesseret i en enhedsvektor langs hovednormalen. Denne kan fremkomme ved at normalisere:

$$\vec{N} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{|\vec{a} \times \vec{v}|} = \frac{\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)|}$$

Øvelse 3.11 begrundet, at vi kan anvende formel (2) som *en definition af begrebet krumning for rumkurver*. Dette gør vi nu med følgende:

Definition: Krumningen for en rumkurve

Lad $\vec{r}(t)$ være en vektorfunktion og \mathcal{L} være den rumkurve, som vektorfunktionen bestemmer i \mathbb{R}^3 . Med $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$ og $\vec{r}''(t) = \vec{a}(t)$ betegner vi henholdsvis hastighedsvektoren og accelerationsvektoren hørende til vektorfunktionen. Vi betragter et regulært punkt $\vec{r}(t_0) = P_0$, dvs et punkt hvor $\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$ og definerer nu *krumningen* af kurven i punktet P_0 som tallet:

$$\kappa_n = \frac{|\vec{a}(t_0) \times \vec{v}(t_0)|}{v^3(t_0)}$$

Ved krumningsvektoren i punktet P_0 forstås vektoren:

$$\vec{k} = \kappa_n \cdot \vec{N},$$

hvor $\vec{N} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{|\vec{a} \times \vec{v}|} = \frac{\vec{r}''(t_0) \times \vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}''(t_0) \times \vec{r}'(t_0)|}$ er en enhedsvektor i hovednormalens retning.

Bemærkning 1: I andre fremstillinger defineres krumningen som *grænseværdien* af forholdet mellem *vinklen* ν mellem tangenten i punktet P_0 og en tangent i et punkt Q , og *længden af kurvestykket* s fra P_0 til punktet, når Q bevæger sig mod P_0 :

$$\kappa = \lim \frac{\nu}{|\Delta s|}$$

Ud fra denne definition kan man udlede ovenstående som en sætning, så de to tilgange er ækvivalente.

Bemærkning 2: Man kunne tro, at krumningen afhang af parametriseringen, da den defineres ud fra funktioner af t . Men i argumentationen op til definitionen så vi, at $|\vec{e}'(s)| = \frac{|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)|}{v^3(t)}$, hvor s er buelængden. Uanset hvilken parametrisering vi har haft af den givne kurve, så kan formlen for krumningen altså udtrykkes ved banelængden, og er dermed uafhængig af parametriseringen.

Øvelse 3.12

En *skruelinje* eller en *helix* er den rumkurve du følger, hvis du går op i Rundetårn og følger væggen hele vejen. Skruelinjer kan betragtes som sammensat af to bevægelser: en jævn cirkelbevægelse rundt om en symmetriakse og en jævn retlinet lodret bevægelse i symmetriaksens retning. Vi vælger i det følgende af nemheds grunde z-aksen som symmetriakse.

- a) Argumenter for, at en skruelinje kan fremstilles ved følgende parameterfremstilling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(b \cdot t) \\ a \cdot \sin(b \cdot t) \\ h \cdot t \end{pmatrix}, \text{ hvor } a, b \text{ og } h \text{ er bestemte tal}$$

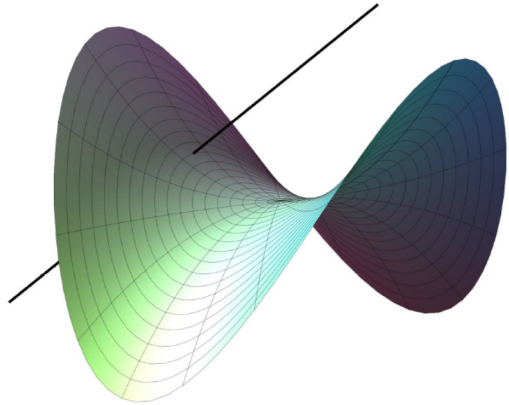
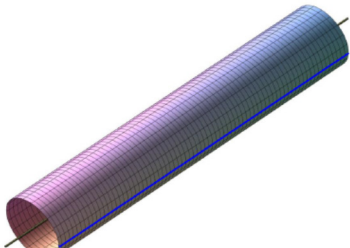
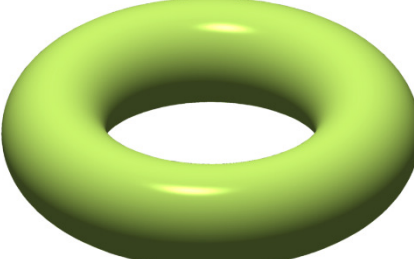
- b) Bestemt hastigheds- og accelerationsvektorerne.
c) Giv en tolkning af tallene a og b .

- d) Vis at vi kan vælge de tre tal a , b og h (på mange måder), så skruelinjen parametriseres med buelængde. (*Hint*: Udnyt, at en parametrisering med buelængde er karakteriseret ved, at hastighedsvektoren konstant har længde 1.)
- e) Vis, at hastighedsvektoren – og dermed tangenten – danner en fast vinkel med skruelinjens symmetriakse. (*Hint*: Udregn cosinus til vinklen mellem to vektorer i de to retninger. Vis $\cos(v)$ er konstant er v det også).
- f) Bestemt krumningen af kurven i et vilkårlig punkt. Vælg selv forskellige værdier for de tre tal, beskriv i hvert tilfælde hvad dit valg medfører mht. Selv skruelinjens forløb og udregn krumningen i de forskellige tilfælde. Giv selv en vurdering af, om du synes der er en god sammenhæng mellem krumningstallet og den tilhørende skruelinjes forløb.
- g) Vi sætter nu $a = 1$. Vi ønsker at tegne en skruelinje fra punktet $P(1,0,0)$ til punktet $Q(2,0,0)$. Du skal bestemme tallene b og h så vi lander i Q efter én omdrejning. Dernæst så vi lander i Q efter 4 omdrejninger. Kan du løse problemet med n omdrejninger.
- h) Løs samme opgave, men nu skal du forbinde punkterne $R(0,1,1)$ og $S(-1,0,6)$.

4. Krumning af en flade

(I dette afsnit inddrager vi differentiation af funktioner af flere variable. Ønsker du at fordybe dig mere i dette emne, så giver projekt 2.7 i A-bogens kapitel 2, muligheder herfor).

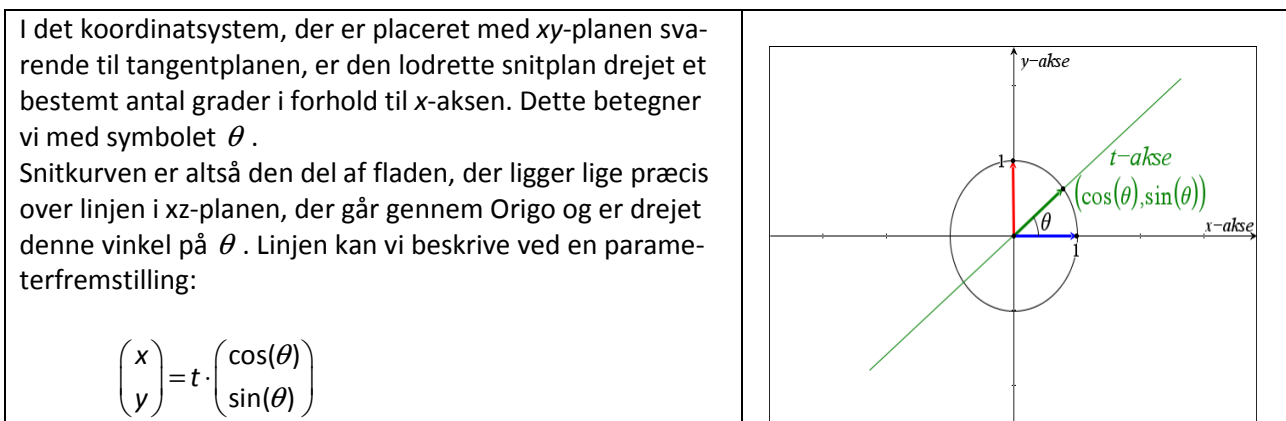
Vi bevæger os nu fra de endimensionelle banekurver – og funktioner af én variabel - ud i rummet, hvor vi vil studere de todimensionelle flader – og funktioner af to variable. Som altid i matematik vil vi som afsæt til det nye føre det tilbage til det vi ved noget om – nemlig krumningsforhold for banekurver i planen – og se om vi kan løfte den indsigt vi har vundet dér til at definere og studere krumningsforhold for flader.

<p>I filmen tager Steen Markvorsen udgangspunkt i en typisk flade, der med det samme illustrerer det nye problem vi står overfor. Står vi på en sådan flade i et tilfældigt punkt, og vandrer vi ud derfra, så vil vejen foran os krumme forskelligt, afhængig af hvilken retning vi bevæger os. På fladen ser vi, at i nogle retninger krummer fladen opad, i andre nedad!</p> <p>Dette problem møder vi ikke på en kugleflade, men på de fleste andre. Hvad skal fx krumningen være i et punkt på en cylinder? I en retning krummer den som en kugle, i en anden er det en ret linje. Hvad skal krumningen være på en torus (en badering)? I et punkt på indersiden ser vi, at den krummer modsat i de to retninger.</p>	 <p>Fladen med en normal-linje</p>
	

I filmen får vi det første forslag til løsning: I det punkt vi betragter forestiller vi os, der ligger en tangentplan. En normalvektor til denne tangentplan er en normal til fladen i dette punkt. Lad os forestille os, at vi lægger et koordinatsystem i rummet således, at xy -planen svarer til tangentplanen og z -aksen svarer til normalen. I dette koordinatsystem betragter vi lodrette planer gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt, dvs planer, der indeholder z -aksen.



Lokalt omkring punktet kan vi betragte fladen som en funktion af to variable, $f(x,y)$. og kurven repræsenterer så en del af denne graf, nemlig den del som fladen skærer ud. Kurven kalder man ”snitkurven”.



Den lodrette snitkurve er derfor givet ved

$$z(t) = f(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta))$$

Dette er en funktion af én variabel t , så grafen kan vi håndtere som i første kapitel om krumning af kurver. For at finde snitkurvernes krumning ønsker vi at anvende sætning 2 i kapitel 1 om krumning af grafer, specielt bemærkningen: *I et stationært punkt, hvor $f'(x)=0$, gælder, at krumningen, $\kappa = f''(x)$.*

Øvelse 4.1

Overvej, hvorfor vi med ovenstående set-up har, at $(0,0)$ (Origo) er et stationært punkt.

Vi skal i gang med at differentiere. Men der er en lille forhindring her, idet $z(t)$ er skrevet som en sammensat funktion, hvor den ”ydre funktion” er en funktion af to variable, og hvor den ”indre funktion” er en vektorfunktion:

”ydre funktion” = $f(x,y)$

”indre funktion” = $\begin{pmatrix} t \cdot \cos(\theta) \\ t \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Øvelse 4.2 – partielle afledede

Når vi differentierer en funktion af flere variable $f(x, y)$ sker det grundlæggende ved, at vi først udregner de såkaldte partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$, hvor $f_x(x, y)$ udregnes ved at differentiere mht. x og opfatte y som en konstant, og tilsvarende $f_y(x, y)$ udregnes ved at differentiere mht. y og opfatte x som en konstant.

Betragt nu funktionerne: $f(x, y) = x \cdot \sin(5y) - \cos(y^3 \cdot x)$ og $g(x, y) = e^{x^2 + 7xy - 2y^3}$

- Bestem de partielle afledede $f_x(x, y)$ og $f_y(x, y)$ samt $g_x(x, y)$ og $g_y(x, y)$
- Evaluer $f_x(0, 0)$ og $f_y(0, 0)$ samt $g_x(1, 0)$ og $g_y(1, 0)$
- Differentier udtrykkene en gang mere, dvs udregn:
 $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)$ og $f_{yx}(x, y)$ samt $g_{xx}(x, y), g_{xy}(x, y), g_{yy}(x, y)$ og $g_{yx}(x, y)$
- Hvilken observation gør du mht. de blandede afledede f_{xy} og f_{yx} , samt g_{xy} og g_{yx}
Den observation, du her gør, gælder helt generelt!

I vores situation har vi tilsyneladende et lidt mere simpelt tilfælde, idet z er en funktion af én variabel, t . Men da det er en sammensat funktion, så sker differentiationen ved at "den ydre" differentieres til en vektorfunktion $\begin{pmatrix} f_x(\cdot) \\ f_y(\cdot) \end{pmatrix}$, "den indre" differentieres som en vektorfunktion, og resultatet får vi ved at udregne skalarproduktet ("prikke dem sammen").

Vi anvender nu denne regel om sammensat differentiation:

$$\begin{aligned} (z(t))' &= (f(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)))' \\ &= \begin{pmatrix} f_x(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \\ f_y(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} && \text{her er " \cdot " skalarprodukt} \\ &= f_x(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \cdot \cos(\theta) + f_y(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Vi er i $(0, 0)$, når $t = 0$. Resultatet i øvelse 2.1 fortæller os altså, at

$$(z(0))' = 0, \text{ dvs at } f_x(0, 0) \cdot \cos(\theta) + f_y(0, 0) \cdot \sin(\theta) = 0$$

Øvelse 4.3 – anden ordens afledede

Anvend udtrykket for $(z(t))'$, samt den viden du har fra øvelse 2.2 om de blandede partielle afledede til at vise følgende resultat:

$$(z(t))'' = f_{xx}(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \cdot \cos^2(\theta) + 2f_{xy}(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) + f_{yy}(t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin^2(\theta)$$

Vi ønsker at bestemme $(z(0))''$, dvs evaluere det udtryk vi fandt i øvelse 2.3 i punktet $(0, 0)$. For at gøre det mere overskueligt indfører vi nogle simple betegnelser:

$$a = f_{xx}(0, 0) \qquad b = f_{xy}(0, 0) \qquad c = f_{yy}(0, 0)$$

Herved kan vi skrive $(z(0))''$ på den mere overskuelige form:

$$(z(0))'' = a \cdot \cos^2(\theta) + 2b \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) + c \cdot \sin^2(\theta) \qquad (*)$$

4.1. Udledning og analyse af Eulers formel

Men dette kan vi forenkle yderligere. For hvor kom egentlig θ fra? θ Det er den vinkel snitplanen danner med 1. akse. Men hvor ligger 1. akse? Den har vi jo i det foregående bare tænkt os liggende et eller andet sted i tangentplanen. Så ovenstående udregninger er korrekte uanset hvor 1. akse ligger. Men så vælger vi at placere 1. akse, så udtrykket (*) bliver så simpelt som muligt.

Udtrykket (*) kan vi betragte således: Det er et udtryk af formen:

$$K = a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2, \quad (**)$$

hvor man har indsat $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$

Udtryk som (**) kaldes for en "kvadratisk form", fordi hvert led indeholder præcis to uafhængige variable som faktorer. Man kan nu vise, at enhver kvadratisk form ved et koordinatskifte kan føres over i et udtryk, hvor der ikke er et blandet led med $x \cdot y$. Et sådant koordinatskifte betyder blot, at vi griber om koordinatsystemets z-akse og roterer xy-akserne indtil vi får et koordinatsystem, hvor (**) er på formen

$$\kappa_0 = \kappa_1 \cdot x_1^2 + \kappa_2 \cdot x_2^2 \quad (***)$$

Koordinatskifte transformationer er en helt grundlæggende teknik inden for den del af matematikken, der hedder *lineær algebra*. Metoden er illustreret i appendiks.

I det nye koordinatsystem kalder vi den vinkel som snitplanen danner med den nye x_1 akse for θ_1 .

Vi indsætter nu $x_1 = \cos(\theta_1)$, $y_1 = \sin(\theta_1)$ i (***), og har således udledt *Eulers formel for snitkrumningen*:

$$\kappa_0 = \kappa_1 \cdot \cos^2(\theta_1) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\theta_1)$$

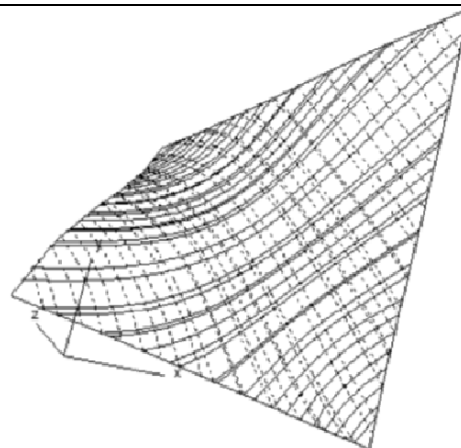
Den drejning, vi udførte, og som resulterede i Eulers formel, afhænger alene af størrelserne a , b og c – se evt. i appendiks for det præcise argument. Og størrelserne a , b og c , som vi indførte ovenfor, afhænger alene af fladens geometri omkring punktet. Den drejning, vi udførte, afhænger altså alene af fladens lokale geometri. Derfor vil Eulers formel være den samme for alle snitflader, det er alene drejningsvinklen der varierer.

κ_1 og κ_2 kaldes for fladens *hovedkrumninger* eller *principale krumninger* i punktet. Vi kan umiddelbart se af Eulers formel, at:

$$\text{Når } \theta_1 = 0, \text{ så er } \kappa_0 = \kappa_1$$

$$\text{Når } \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ så er } \kappa_0 = \kappa_2$$

Dvs, at de principale krumninger findes som krumningerne langs koordinatsystemets akser. Og disse akser ligger faktisk, hvor vi har maksimum og minimum for snitkrumningerne. Dette kan vi fx se således:



De principale krumninger danner et ortogonalt net af kurver hen over fladen

κ_1 og κ_2 kaldes for fladens *hovedkrumninger* eller *principale krumninger* i punktet. Vi kan umiddelbart se af Eulers formel, at:

$$\text{Når } \theta_1 = 0, \text{ så er } \kappa_0 = \kappa_1$$

$$\text{Når } \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ så er } \kappa_0 = \kappa_2$$

Dvs., at de principale krumninger findes som krumningerne langs koordinatsystemets akser. Og disse akser ligger faktisk, hvor vi har maksimum og minimum for snitkrumningerne. Dette kan vi fx se således:

Når normalplanen drejes 360° eller 2π om normalen vil krumningen af snitkurverne hele vejen rundt være bestemt af Eulers formel, og dermed variere kontinuert mellem et minimum og et maksimum.

Øvelse 4.4 – De principale krumninger udgør maksimum og minimum

Lad os fx antage, at $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Vis nu ved brug af Eulers formel for en tilfældig snitkrumning κ , at

$$\kappa_1 \geq \kappa \geq \kappa_2$$

Vi sammenfatter nogle af resultaterne i:

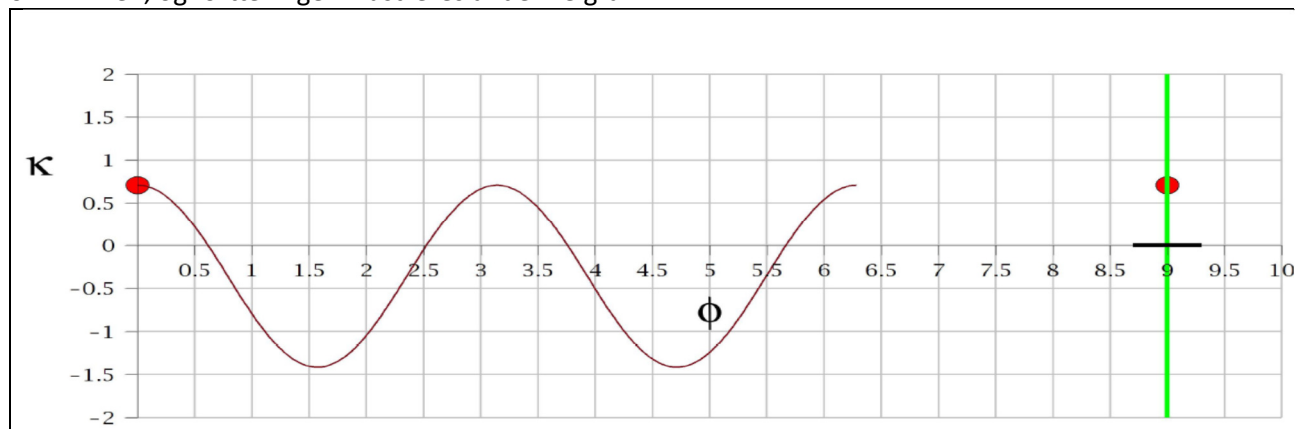
Sætning : Eulers formel for snitkrumningen

En flades snitkrumning med en normalplan kan bestemmes ved formlen:

$$\kappa_0 = \kappa_1 \cdot \cos^2(\theta_1) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\theta_1),$$

hvor κ_1 og κ_2 , der kaldes for fladens *hovedkrumninger* eller *principale krumninger* i punktet, repræsenterer den maksimale og den minimale krumning, og hvor θ_1 er den vinkel fladen er drejet ift. 1. akse i koordinatsystemet bestemt af de principale krumninger.

Hvordan varierer snitkrumningen, når vi drejer fladen om normalaksen? Det fortæller Steen Markvorsen om i filmen, og fortællingen illustreres af denne graf:



Dette er jo graf for en harmonisk svingning – og tilsyneladende med periode π . Det skal du vise i følgende

Øvelse 4.5

Snitkrumningen kan betragtes som en funktion af vinklen, som vi her kalder θ

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 \cdot \cos^2(\theta) + \kappa_2 \cdot \sin^2(\theta)$$

a) Udnyt de trigonometriske formler:

$$\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1$$

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$$

til at omskrive $\kappa(\theta)$ til et udtryk på formen:

$$\kappa(\theta) = B + A \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

- b) Udnyt omskrivningen i a) til at argumentere for det grafiske forløb, der er gengivet i den ovenstående illustration.

I filmen defineres middelkrumningen ved hjælp af et passende integral:

$$H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta$$

Øvelse 4.6

Argumenter for, at med en given kontinuert og positiv $f(x)$, da er $H = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x) dx$ et godt bud på en middelværdi af funktionen over intervallet. Du skal understøtte din argumentation med en tegning af grafen, hvor du illustrerer hvor tallet H kan afsættes.

Øvelse 4.7

Vis, at
$$H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$$

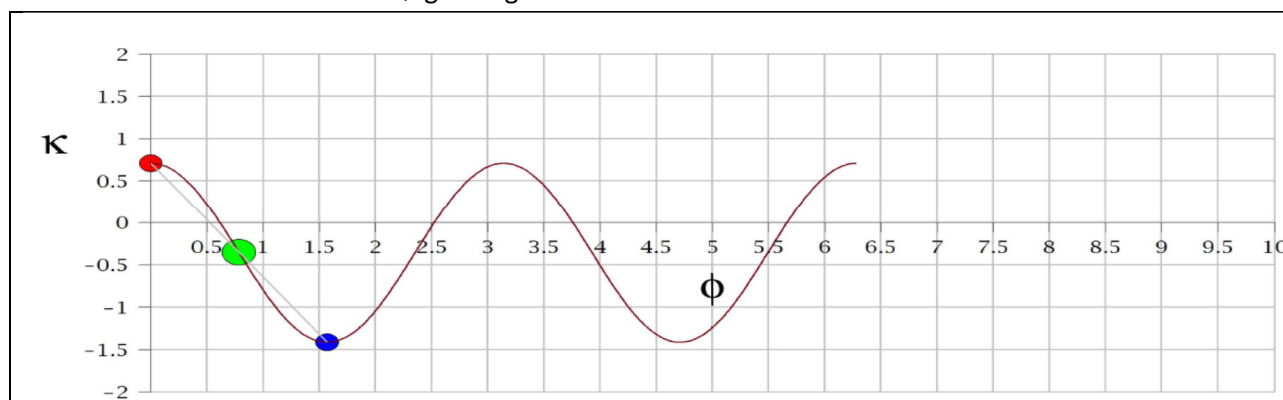
(Hint. Anvend identiteten $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ til at vise $\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \pi$. Eller se filmen igen og find pågældende sted, hvor Steen Markvorsen gennemgår et bevis)

Formlen for *middelkrumningen*:

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$$

anvendes af og til som en definition af begrebet.

I filmen viser Steen Markvorsen følgende graf:



som han fortæller illustrerer sætningen:

Middelkrumningen H er den halve sum af to vilkårlige ortogonale snitkrumninger:

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa(\varphi_0) + \kappa(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}))$$

Øvelse 4.8

Forklar sammenhængen mellem formlen og den grafiske illustration, og bevis formlen.

(Hint. Se filmen igen)

Flader med konstant middelkrumning er særligt interessante, både i ren matematik og i anvendelser. Hvis den konstante middelkrumning ovenikøbet er 0 kaldes de minimalflader. Disse indgår som en central del af Steen Markvorsens fortælling, og i *projektmaterialer 2* vil vi studere nogle af disse nærmere.

5. Historien bag middelkrumningen

Krumningen af kurver og flader har en lang historie bag sig. Først faldt krumningen af en kurve på plads. Hovedideen var at en kurve lokalt ligner en cirkel og krumningen blev så defineret som den reciprokke cirkelradius, dvs.

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

Derved bliver krumningen af en ret linje 0, og krumningen af en enhedscirkel 1. Jo mindre radius, jo større krumning og jo større radius, jo mindre krumning.

Men for flader var det mere indviklet. En flade ligner ikke nødvendigvis lokalt en kugle, så man kan ikke bare tilnærme fladen med en kugle. Se fx på en saddelflade som $z = x \cdot y$, hvor det går helt galt: Dele af fladen krummer den ene vej, dele af fladen den anden vej.

Det er også særligt tydeligt for en torus, hvor man på indersiden af torussen har et punkt med to cirkler, der krummer hver sin vej.

Krumningen for en flade må derfor defineres særskilt. Det faldt på plads i løbet af 1800-tallet, hvor man fandt ud af at en flade faktisk har to forskellige krumningsmål: En middelkrumning H og en total krumning K , og hvor man også endeligt afklarede forbindelsen mellem krumningen af en flade og en tilhørende referencekugle.

Historien om fladers krumning starter med Euler: I 1760 bemærker Euler som indledning til hans epokegørende afhandling om "Undersøgelser af fladers krumning":

Hvis man vil bestemme krumningen for en kurve er den rigtige metode at finde radius for den *approksimerende cirkel* (osculating circle), der til ethvert punkt på kurven knytter en cirkel med den samme krumning. Men når man spørger om krumningen for en flade viser spørgsmålet sig at være temmelig tvetydigt; der findes ikke noget entydigt svar som i det foregående tilfælde. Det er kun for kugleflader man kan finde et entydigt svar, eftersom krumningen for en kugle er den samme som krumningen for dens storcirkler, og kuglens radius kan derfor anses for at være den rette radius hørende til krumningen. Men hvad angår andre flader, er det ikke engang klart hvordan man skal sammenligne krumningen for fladen med den tilsvarende for en kugle, på samme måde som man altid kan sammenligne krumningen af en kurve med den tilsvarende for en cirkel. Årsagen til dette er åbenlys, eftersom der gennem et hvert fladepunkt går en uendelighed af kurver. Man behøver bare tænke på en cylinder, hvor der langs cylindrens akse ikke er nogen krumning, mens tværsnittene, der står vinkelret på akserne, frembringer cirkler med den samme krumning, og alle andre tværsnit, der ligger skævt i forhold til akserne har deres egen værdi for krumningen. Det samme gælder for alle andre flader, hvor det endda kan ske at krumningen i én retning er konveks og i en anden retning konkav, hvilket for eksempel er tilfældet for flader, der ligner en sadel.

Øvelse 5.1

Frembring skitser, der illustrerer Eulers pointer i den ovenstående tekst.

Euler bemærker nu, at hvis man snitter en flade med en plan, fremkommer der en plan kurve med en veldefineret krumning. Gennem formidable udregninger finder han udtrykket for krumningen af en sådan snitkurve. Men han opdager også at snitkrumningen opfører sig særligt simpelt, hvis man vælger et *normalsnit*,

dvs. en snitplan, der står vinkelret på tangentplanen og derfor indeholder normalen til fladen. Når man drejer snitplanen for et normalsnit rundt om normalen varierer krumningen periodisk med perioden π eller 180° , idet snitplanen vender tilbage efter en drejning på 180° om normalen. Undervejs må den have en største-værdi og en mindste-værdi. I almindelighed vil de selvfølgelig være forskellige, men netop for en kugleflade er krumningen fx konstant for alle snitplanerne. Det viser sig nu at største-værdien og mindste-værdien altid indtræffer ved to snitplaner, der står vinkelret på hinanden. De tilhørende krumninger kaldes *hovedkrumningerne* og de tilhørende retninger for snitplanerne kaldes *hovedretningerne*.

Øvelse 5.2

Hvad er hovedretningerne og de tilhørende hovedkrumninger for en cylinderflade?

Så langt har Euler altså analyseret strukturen af snitkrumningerne for en flade og kendskab til såvel hovedretninger som hovedkrumninger fastlægger fladens krumningsforhold. En hver flade har altså i et givet fladepunkt en uendelighed af krumninger, der varierer på en simpel måde mellem de to hovedkrumninger. Euler fastlægger i artiklen "Undersøgelse af fladers krumning", et udtryk for radius til snitkurven, der ser således ud

$$r = \frac{2f \cdot g}{(f+g) - (f-g) \cdot \cos(2\phi)}$$

Her er f den maksimale radius for en krumningscirkel hørende til et normalsnit, mens g er den minimale radius for en krumningscirkel hørende til et normalsnit og ϕ er drejningsvinklen for snitplanen rundt om normalen. En sådan formel er ikke helt nem at afkode.

Øvelse 5.3

- Hvad bliver krumningsradius for $\phi = 0$? Hvad bliver den for $\phi = \pi/2 = 90^\circ$? Frembring en skitse, der viser hvordan man måler drejningsvinklen ϕ .
- Skitser grafen for krumningsradien r som funktion af drejningsvinklen ϕ og beskriv grafens forløb (monotoniforhold)

Eulers formel blev da også forenklet af den franske matematiker Charles Dupin (1784-1873), der i 1813 undersøgte geometrien bag snitkrumningerne på en mere enkel vis end Eulers algebraiske Tour de force. Selve begrebet *middelkrumning* blev første gang introduceret af Sophie Germain (1776-1831) i 1831, det år hun døde.

Øvelse 5.4

- Indfør betegnelserne r_{\max} og r_{\min} i stedet for f og g i Eulers formel og vis at Eulers formel kan omskrives på formen

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{r_{\max}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}} \right) \cdot \cos(2\phi)$$

- Indfør krumningerne $\kappa = \frac{1}{r}$, $\kappa_{\max} = \frac{1}{r_{\min}}$ og $\kappa_{\min} = \frac{1}{r_{\max}}$ og vis at Eulers formel kan omskrives på formen

$$\kappa = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2} - \frac{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}}{2} \cdot \cos(2\phi)$$

Allerede denne formel er væsentligt simplere end Eulers oprindelige formel, idet den viser at snitkrumningen udfører en simpel harmonisk svingning som funktion af drejningsvinklen ϕ . Den viser også at middeldkrumningen er gennemsnittet af hovedkrumningerne og endelig at krumningen svinger mellem yderværdierne κ_{\min} og κ_{\max} . Dupin inddrager nu yderligere identiteterne:

$$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$$

$$1 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)$$

Øvelse 5.5

- a) Gør rede for at Eulers krumningsformel denne gang kan omskrives på formen

$$\kappa = \kappa_{\min} \cdot \cos^2(\phi) + \kappa_{\max} \cdot \sin^2(\phi)$$

- b) Her har vi fulgt Euler og målt drejningsvinklen ud fra snitkurven med den største krumningsradius. Men der er tradition for i stedet at måle drejningsvinklen ud fra med den største krumning (og dermed den mindste krumningsradius). Kald den nye drejningsvinkel for θ og gør rede for at den er givet ved

$$\theta = \phi - \frac{\pi}{2} = \phi - 90^\circ$$

- c) Gør rede for at Eulers krumningsformel denne gang kan skrives på standardformen

$$\kappa = \kappa_{\max} \cdot \cos^2(\theta) + \kappa_{\min} \cdot \sin^2(\theta)$$

Vi har nu argumenteret for, hvorledes Eulers komplicerede formel leder frem til den vigtigste strukturformel for krumningen af en snitkurve

Sætning 1: Euler-Dupins strukturformel for krumningen af en flade (Ofte blot: Eulers formel)

Hvis en differentiabel flade snittes med en normalplan, der danner vinklen θ med hovedretningen for normalsnittet med en største krumning κ_{\max} så er snitkrumningen givet ved

$$\kappa = \kappa_{\max} \cdot \cos^2(\theta) + \kappa_{\min} \cdot \sin^2(\theta)$$

Denne formel viser netop at snitkrumningen er et simpelt vægtet gennemsnit af hovedkrumningerne κ_{\max} og κ_{\min} . Skal vi have styr på krumningsforholdene for en flade skal vi altså bare fastlægge hovedkrumningerne og de tilhørende hovedretninger. I særligt simple tilfælde er det ikke så svært at gætte hovedretningerne og hovedkrumningerne, specielt ikke, hvis de tilhørende snit er almindelige cirkler.

Øvelse 5.6

Frembring skitser af en kugle, en cylinder og en torus og angiv hovedretninger og hoverkrumninger for typiske punkter på falden. For torussens vedkommende skal du koncentrere dig om punkter på indersiden og ydersiden af torussen.

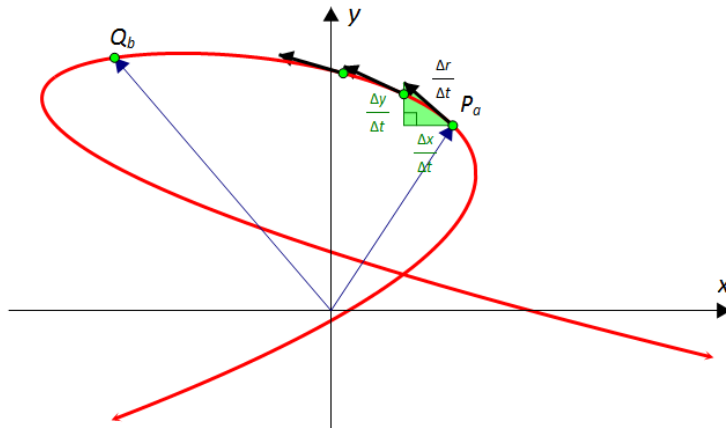
Men Euler skaffede ikke klarhed over hvordan man finder et enkelt samlende krumningsmål, der karakteriserer fladens krumning i et fladepunkt som en helhed. Det blev Gauss, der gjorde dette arbejde færdig og indførte det, man i dag kalder for det gaussiske krumningsmål, som svarer til – ikke summen, men produktet af de to principale krumninger.

6. Appendiks 1: Bestemmelse af kurvelængde

(Dette appendiks er hentet fra projekt 6.6 i *Hvad er matematik? A*)

Vi betragter en differentiabel vektorfunktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ med en kontinuert afledet funktion. Vi vil be-

stemme længden af banekurven mellem to punkter P og Q , hvori parameterværdien er henholdsvis a og b . Ligesom de differentiable reelle funktioners grafer er lokalt lineæret er banekurver også lokalt lineære, dvs. vi kan tilnærmelsesvist bestemme længden af banekurven i et givet parameterinterval ved en sum af en række tangentvektors længde, hvilket netop svarer til at bestemme integralet



Giver vi parameteren en lille tilvækst Δt , resulterer det i en tilsvarende lille tilvækst i stedfunktionen:

$$\Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \cdot \Delta t = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} \cdot \Delta t \quad \text{forlæng med } \Delta t$$

Vi vil nu lade Δt gå mod nul. I hele grænseovergangen gælder:

$$|\Delta \vec{r}| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \cdot \Delta t \right| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| \cdot \Delta t = \left| \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} \right| \cdot \Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \quad (*)$$

Når Δt går mod nul får vi:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow x'(t), \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow y'(t) \quad \text{og} \quad \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \vec{r}'(t) = v(t)$$

Lader vi dt betegne et meget lille ("uendeligt lille") tidsinterval, så bliver (*) i grænsen til:

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}'(t)| \cdot dt = \left| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right| \cdot dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt$$

Ved hjælp af Riemann-integralet kan vi nu summere dette op langs hele kurvestykket og får:

Sætning: Kurvelængde

Lad $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion med kontinuert afledet funktion.

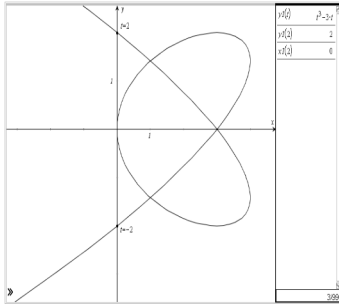
Længden af banekurven i parameterintervallet $a \leq t \leq b$ kan beregnes ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Eksempel

Betragt banekurven for vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 - t^4 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



Banekurven skærer y-aksen for parameterverdierne $t = -2$ og $t = 2$. (Kontroller det!). Vi vil bestemme banekurvens længde i parameterintervallet $-2 \leq t \leq 2$, dvs. mellem banekurvens to skæringspunkter med y-aksen ved hjælp af formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Først bestemmer vi den afledede funktion og dermed koordinatfunktionernes afledede funktioner:

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t - 4t^3 \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Herefter indsættes disse samt parameterverdierne $t = -2$ og $t = 2$ i formlen for kurvelængden:

$$L = \int_{-2}^2 \sqrt{(8t - 4t^3)^2 + (3t^2 - 3)^2} dt = 21,2$$

Konklusion: Kurvelængden i t-intervallet $[-2;2]$ er 21.2.

Øvelse 1

Vi vender tilbage til vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 9 - t^2 \\ \frac{1}{4}t^3 - 4t \end{pmatrix}$

- Hvis du ikke tidligere har gjort det, så bestem dobbeltpunktet.
- Bestem længden af den lukkede kurve der starter og slutter i dobbeltpunktet.

Øvelse 2

a) Beregn omkredsen af cirklen med parameterfremstilling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

B) Beregn omkredsen af ellipsen med parameterfremstilling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Appendiks 2: Koordinatskifte transformationer

Vi viser, at en kvadratisk form $K = a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$ altid kan omskrives ved et koordinatskifte til et udtryk uden blandet led. Koordinatskiftet fører det gamle koordinatsystem over i et, der er bestemt af de såkaldte *egenvektorer*.

Lad os først betragte et konkret eksempel, hvor den kvadratiske form er udtrykket:

$$x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2$$

Dette omskrives til et matrix-produkt således:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hvorved vi får systemets matrix frem.

For det generelle udtryk $a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$ bliver matricen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Vi indfører nu en variabel λ , udregner determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

og opstiller ligningen:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Denne har løsninger $\lambda = -1$ og $\lambda = 3$.

For det generelle udtryk $a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$ bliver ligningen:

$$\lambda^2 - (a+c) \cdot \lambda + (a \cdot c - b^2) = 0$$

Denne ligning vil altid have løsninger, jfr øvelsen nedenfor!

Vi opstiller nu de to ligningssystemer:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der reduceres til:

$$\begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \quad \text{og} \quad -2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \quad \text{og} \quad -2x - 2y = 0 \end{array}$$

Ligningerne er to og to identiske eller proportionale. Det vil altid være tilfældet!

Dvs vi har nu følgende ligninger:

$$2x - 2y = 0 \quad \text{og} \quad -2x - 2y = 0$$

Den første ligning, der hører til $\lambda = -1$ har løsninger: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Den anden ligning, der hører til $\lambda = 3$ har løsninger: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Disse to vektorer: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ angiver retningerne for 1. og 2. akserne i det nye koordinatsystem. Vi angiver altid enhedsvektorer i aksernes retning, og disse er her:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Hvis vi betegner koordinaterne i det nye koordinatsystem med x_1 og y_1 så er sammenhængen mellem de nye og de gamle koordinater givet ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

eller hvis vi ganger ud:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1$$

Vi kan nu gøre prøve og se, at i det nye koordinatsystem bliver den kvadratiske form skrevet uden blandet led. Indsæt udtrykkene for x og y i $x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + x_1 \cdot y_1 - 2x_1^2 + 2y_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - x_1 \cdot y_1 \\ &= -x_1^2 + 3y_1^2 \end{aligned}$$

Konklusion: Den kvadratiske form kan i det nye koordinatsystem skrives på formen:

$$-x_1^2 + 3y_1^2$$

Læg mærke til, at koefficienterne er lige præcis de to rødder i den oprindelige andengradsligning!

Øvelse.

Det generelle udtryk $a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$ kan skrives på matrixform således:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{*****}$$

- a) Vis, at for det generelle udtryk $a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$ bliver determinatligningen:

$$\lambda^2 - (a+c) \cdot \lambda + (a \cdot c - b^2) = 0$$

- b) Vis, at denne ligning vil altid have løsninger, λ_1 og λ_2 . (Hint: Udregn diskriminanten og udnyt en kvadratsætning til at vise, at diskriminanten er positiv)

- c) Argumenter for, at de to ligningssystemer med henh. λ_1 og λ_2 :

$$\text{a.} \quad \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & b \\ b & c - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a - \lambda_2 & b \\ b & c - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hver for sig har determinanten = 0, og at ligningerne derfor parvis er proportionale. Dvs. ligningssystemerne reduceres til:

$$(a - \lambda_1) \cdot x + b \cdot y = 0 \quad \text{og} \quad (a - \lambda_2) \cdot x + b \cdot y = 0$$

- d) Argumenter for, at

$$\text{a.} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ er en løsning til den første og } v_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ er løsning til den anden}$$

(Hint: Betragt ligningerne som skalarprodukter af vektorer, inddrag din viden om, hvornår et skalarprodukt er nul, samt din viden om, hvordan man bestemmer en tværvektor til en given vektor.)

- e) Kontroller at resultatet stemmer med det vi udregnede i eksemplet.
- f) De to vektorer v_1 og v_2 er faktisk ortogonale. Vis dette ved at udregne deres skalarprodukt, og ved at udnytte, at λ_1 og λ_2 er rødder i andengradspolynomiet $\lambda^2 - (a+c)\lambda + (a \cdot c - b^2) = 0$. For andengradspolynomier har vi nemlig en sætning om røddernes sum og røddernes produkt, der her giver:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a \cdot c - b^2$$

Koordinat transformationen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -b \\ a - \lambda_1 & a - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

vil nu føre det oprindelige kvadratiske form over i en reduceret uden blandet led. Og hvis vi samtidig sørger for, at vektorerne v_1 og v_2 skaleres til enhedsvektorer, så transformeres den kvadratiske form lige præcis

over i: $\lambda_1 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot y_1^2$

Det kunne man gennemregne ved at anvende værktøjsprogrammer, men det fremkommer elegant ved at indsætte koordinattransformationen i (****) og her anvende reglerne for transponering af matricer. Det vil vi lade ligge her – det er indeholdt i alle grundbøger om lineær algebra.



STEEN MARKVORSEN
professor ved DTU
Compute, Institut for
Matematik og Computer
Science.

Serien *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger* henvender sig til gymnasieelever med interesse for matematik. Hensigten med serien er at åbne nogle vinduer ind i matematikkens mange spændende verdener, og dermed give et indtryk af, hvad matematisk forskning er.

Til hver film udarbejdes projektmaterialer, der kan anvendes i arbejdet med udvalgte problemstillinger, som vi præsenteres for i filmen. Projektmateriale er skrevet, så de både kan anvendes i kortere eller længere forløb på et hold, og være udgangspunkt for studieretningsprojekter.

I Steen Markvorsens film får vi først fortællingen om sæbeboblers og andre skumstrukturers lokale geometri, og efter en introduktion til krumningsbegrebet viser Steen Markvorsen hvorledes dette begreb kan løftes fra en lokal definition knyttet til kurver i 2D til et begreb, der kan udtrykke krumningsforhold globalt for flader i 3D. Derved tager han os med frem til en introduktion af et af de centrale emner i differentialgeometri, *studiet af flader med konstant middelkrumning* og specielt: *minimalflader*.

Til den første del af filmen foreligger *projektmaterialer 1*, med indledende emner fra vektorregning og krumnings-teori, frem til beviset for Eulers formel for middelkrumningen i et punkt. Til den anden del af filmen foreligger *projektmaterialer 2*, der tilbyder en fordybelse i teorien bag og en eksemplificering af netop emnet: *flader med konstant middelkrumning*, specielt minimalflader, der defineres som flader med middelkrumning 0.

gymportalen.dk

