

## Projekt 10.1 Er der huller i Euklids argumentation? Et moderne aksiomsystem (især for A)

---

### Indhold

Introduktion.....	2
Hilberts 16 aksiomer – Et moderne, konsistent og fuldstændigt aksiomsystem for geometri.....	2
Skæringsaksiomer.....	2
Beliggenhedsaksiomer.....	3
Kongruensaksiomer.....	3
Kontinuitetsaksiomer.....	4
Parallelaksiomet (Hilbert).....	4
Archimedes' aksiom (forudsætter eksistensen af naturlige tal).....	4
Dedekinds aksiom (konstruktion af de reelle tal).....	4
Definitioner.....	5

## Introduktion

Ambitionen med *Euklids Elementer* var at opbygge en aksiomatisk deduktiv teori, især inden for geometrien. En teori, hvor alle ræsonnementer bygger på definitioner og aksiomer, der er fastlagt fra starten, samt på de tidligere sætninger, der er vist undervejs. Teorien kom til at danne skole for andre dele af matematik og for andre fag. Men holder projektet?

Den ene type af spørgsmål gik på, om man kunne nøjes med mindre end de fem postulater og fem aksiomer. Gennem hele matematikhistorien har man drøftet, om parallel-postulatet mon ikke kunne bevises ud fra de andre aksiomer. De utallige forsøg strandede altid, men *forsøget* på at vise det medførte meget positivt for matematikkens udvikling. Striden blev afgjort, da matematikere i det 19. århundrede konstruerede ikke-euklidiske geometrier. Historien om parallelpostulatet vender vi tilbage til på B- og A-niveau.

Den anden type af spørgsmål gik på, om der ikke var mangler, om man ikke havde brug for flere postulater. Allerede den græske kommentator Proklos fra ca. 410-485 skrev en kritisk kommentar til Euklid, hvor han påpegede adskillige svagheder. I årene omkring 1900 begyndte en række filosoffer og matematikere at give nye bud på en fuldstændig Euklid uden huller, hvilket igen førte til mange nye overvejelser omkring aksiomsystemerne og deres rolle. På A-niveau vil vi beskæftige os mere grundigt med forskellige aksiomsystemer, men her kan du selv prøve at gå på opdagelse og lege detektiv:

*Hvor er der huller i Euklids argumentation? Hvor bruger han resultater, han ikke har redegjort for?*

Tag udgangspunkt i beviset for første sætning, der er grundigt gennemgået i øvelse 1. Eller tag udgangspunkt i din gennemgang af de første sætninger i øvelse 2.

Omkring år 1900 udarbejdede datidens største matematiker David Hilbert et bud på et moderne aksiomsystem. Det følger her i en oversat og lettere bearbejdet version. Du kan i dit detektivarbejde anvende det som dit hemmelige dokument.

## Hilberts 16 aksiomer – Et moderne, konsistent og fuldstændigt aksiomsystem for geometri

En lettere bearbejdet version af David Hilberts aksiomsystem, inspireret af Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman 1993)

*(Bemærk, at der nogle steder anvendes begreber, der skal defineres, fx anvendes i nr. 4 begrebet "at ligge på samme / modsatte side af en linje". Disse begreber defineres til sidst i dokumentet)*

**Lav selv tegninger til hvert af aksiomerne for bedre at forstå dem**

### Skæringsaksiomer

1. Hvis P og Q er to forskellige punkter, findes der præcis én linje, som indeholder både P og Q.
2. For hver linje  $l$  findes der mindst to forskellige punkter på  $l$ .

3. Der findes tre forskellige punkter med den egenskab, at ingen linje indeholder alle tre.

### Beliggenhedsaksiomer

1. Hvis punktet B ligger mellem A og C, så er de tre punkter forskellige og ligger på samme linje, og B ligger også mellem C og A.

2. Hvis B og D er to forskellige punkter, så findes der yderligere tre punkter A, C og E på linjen gennem B og D, således at:

- B ligger mellem A og D
- C ligger mellem B og D
- D ligger mellem B og E

3. Hvis A, B og C er tre forskellige punkter, der ligger på samme linje, så er der præcis ét af punkterne, der ligger mellem de andre to.

4. Hvis  $l$  er en linje, og A, B og C er tre forskellige punkter, der ikke ligger på  $l$ , så gælder, at:

- hvis A og B ligger på samme side af  $l$ , og B og C ligger på samme side af  $l$ , så ligger A og C på samme side af  $l$ .
- hvis A og B ligger på modsat side af  $l$ , og B og C ligger på modsat side af  $l$ , så ligger A og C på samme side af  $l$ .

### Kongruensaksiomer

De følgende aksiomer fastlægger, hvad vi forstår ved kongruens. Det er i overensstemmelse med vores intuitive opfattelse af, hvad det vil sige, at to objekter er kongruente: Det betyder, at man kan "flytte" det ene objekt, så det præcis dækker det andet. Men i et aksiomsystem fastlægges den præcise betydning af ordet af de følgende aksiomer:

1. Hvis A og B er to forskellige punkter, og  $A'$  er et vilkårligt tredje punkt, så vil der på hver halvlinje, der udgår fra  $A'$ , findes præcis et punkt  $B'$ , der er forskellig fra  $A'$ , og så  $AB$  er kongruent med  $A'B'$ .  
"Linjestykker kan flyttes".

Notation: Vi bruger symbolet  $\cong$  for kongruens, dvs.:  $AB \cong A'B'$

2. Hvis  $AB \cong CD$  og  $AB \cong EF$ , så er  $CD \cong EF$ . Endvidere er alle linjestykker kongruente med sig selv.  
"Er to stykker kongruente med same tredje stykke, er de indbyrdes kongruente".

3. Hvis B ligger mellem A og C,  $B'$  ligger mellem  $A'$  og  $C'$ , og hvis  $AB \cong A'B'$  og  $BC \cong B'C'$ , så er  $AC \cong A'C'$ .  
"Addition af kongruente linjestykker giver kongruente linjestykker".

4. Givet en vinkel  $\angle BAC$  og en halvlinje  $A'B'$ , der udgår fra et punkt  $A'$ , så findes der på hver side af linjen  $A'B'$  præcis én halvlinje  $A'C'$ , således at  $\angle BAC$ .  
"Vinkler kan flyttes".

5. Hvis  $\angle A \cong \angle B$  og  $\angle A \cong \angle C$ , så er  $\angle B \cong \angle C$ . Endvidere er alle vinkler kongruente med sig selv.  
*"Er to vinkler kongruente med same tredje vinkel, er de indbyrdes kongruente"*

6. Hvis vi har to trekanter ABC og  $A'B'C'$ , hvor  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ , og hvor vinklernes to linjestykker er indbyrdes kongruente, dvs.  $AB \cong A'B'$  og  $AC \cong A'C'$ , så er de to trekanter kongruente.  
*"Aksiomet binder kongruens af linjestykker sammen med kongruens af vinkler – dette aksiom er en sætning hos Euklid, som han prøver at vise, men hvor han bruger en flytningsoperation uden at have defineret dette".*

### Kontinuitetsaksiomer

*(De følgende aksiomer bygger på definitioner, der længden/størrelsen af et linjestykke)*

1. Hvis en cirkel  $C$  har et punkt inden for og et andet punkt uden for en anden cirkel  $C'$ , så vil de to cirkler skære hinanden i to punkter.

2. Hvis et linjestykke har det ene endepunkt inden for en cirkel og det andet endepunkt uden for cirklen, så skærer linjestykket cirklen i et punkt.

### Parallelaksiomet (Hilbert)

For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P$ , der ikke ligger på  $l$ , findes der højst én linje  $m$  gennem  $P$ , så  $m$  er parallel med  $l$ .

*"Når Hilbert siger 'højst en', er det, fordi man ud fra de øvrige aksiomer kan bevise, at der findes mindst en".*

---

Foruden disse aksiomer for geometrien findes der yderligere nogle aksiomer, der forbinder geometri med de reelle tal, dvs. med det at kunne måle størrelser.

### Archimedes aksiom (Forudsætter eksistensen af naturlige tal)

Hvis  $CD$  er et linjestykke, og  $r$  er en halvlinje, der udgår fra et punkt  $A$ , så findes der til hvert punkt  $B$  på halvlinjen et helt tal  $n$ , således at hvis vi lægger  $n$  stykker af  $CD$  i forlængelse af hinanden ud fra  $A$ , så fremkommer et punkt  $E$ , hvorom der gælder, at  $n \cdot CD \cong AE$ , samt at  $B$  ligger mellem  $A$  og  $E$ , evt. er  $B = E$ .

*"Med en enhed kan vi måle vilkårligt store tal og længder".*

### Dedekinds Aksiom (konstruktion af de reelle tal)

Antag, at alle punkter på en linje  $l$  er opdelt i to grupper,  $H$  og  $V$ , således at der ikke findes noget punkt i  $H$ , der ligger mellem to punkter i  $V$  og omvendt ikke noget punkt i  $V$ , der ligger mellem to punkter i  $H$ . Så findes præcis et punkt  $O$  på  $l$ , således at  $H$  og  $V$  er lig med hver sin af de to modsatrettede halvlinjer, der går ud fra  $O$ .

## Definitioner

Tegn selv figurer, der illustrerer hver af definitionerne.

### Definition af parallelle linjer

To linjer  $l$  og  $m$  kaldes parallelle, hvis de ikke skærer hinanden, dvs. hvis der ikke findes noget punkt, der ligger på begge linjer.

### Definition af beliggenhed

Lad linjen  $l$  være givet, og lad punkterne A og B være to forskellige punkter, der ikke ligger på  $l$ .

- Hvis linjestykket AB ikke indeholder punkter fra linjen  $l$ , siger vi, at A og B ligger på samme side af  $l$ .

- Hvis linjestykket AB indeholder et punkt fra linjen  $l$ , siger vi, at A og B ligger på modsat side af  $l$ .

*Bemærk: Det udelukkede tredjedes princip betyder, at to punkter enten ligger på samme side, eller ligger på modsat side af en linje  $l$ .*

### Definition af halvlinje ("stråle")

Hvis vi har givet to forskellige punkter A og B, så er halvlinjen AB (betegnes af og til  $\overrightarrow{AB}$ ) punkterne på linjestykket AB samt alle de punkter C på linjen gennem A og B, som har den egenskab, at B ligger mellem A og C. Man siger, at halvlinjen  $\overrightarrow{AB}$  udgår fra A. Man siger, at halvlinjen AB er *en del af* linjen gennem A og B.

### Definition af modsatte halvlinjer

Halvlinjerne AB og AC kaldes *modsatte* (eller modsatrettede), hvis de er forskellige, udgår fra samme punkt A, og hvis linjerne AB og AC er ens.

### Definition af en vinkel

En vinkel med hjørne A er et punkt A sammen med to forskellige og ikke modsatrettede halvlinjer AB og AC, der udgår fra A. AB og AC kaldes *vinklens sider* eller *vinklens ben*. Vinklen betegnes

$\angle A$ ,  $\sphericalangle A$ ,  $\angle BAC$  eller  $\angle CAB$ .

*Bemærk: Definitionen udelukker lige vinkler og vinkler med 0 grader.*

### Definition af supplementvinkler

Hvis de to vinkler  $\angle BAD$  og  $\angle CAD$  har en fælles side AD, og hvis de to andre sider AB og AC er modsatrettede halvlinjer, så kaldes de to vinkler for supplementvinkler.

### Definition af ret vinkel

En vinkel  $\angle BAD$  kaldes en ret vinkel, hvis den har en supplementvinkel, som den er *kongruent* med.

*Bemærk: Ordet kongruent er ikke defineret. Det er et ord på linje med "lig med", men med en lidt bredere betydning. Betydningen af kongruens fastlægges i kongruensaksiomerne.*

**Definition af indre punkt i en vinkel**

Hvis vi har givet en vinkel  $\angle CAB$ , så kaldes et punkt D for et indre punkt i vinklen, hvis D ligger på samme side af linjen AC, som B gør, og hvis D ligger på samme side af linjen AB, som C gør.

**Definition af en halvlinje mellem to halvlinjer**

Halvlinjen AD siges at ligge mellem halvlinjerne AC og AB, hvis AB og AC ikke er modsatrettede halvlinjer, og punktet D er et indre punkt i vinklen  $\angle CAB$ .

**Definition af det indre i en trekant**

Det indre i en trekant er mængden af alle punkter, der er indre i hver af de tre vinkler. Et ydre punkt er et punkt, som hverken er indre eller ligger på trekantens sider.

**Definition af det indre i en cirkel**

Givet en cirkel med centrum O og radius OR. Et punkt P kaldes et indre punkt, hvis  $OP < OR$  og kaldes et ydre punkt, hvis  $OP > OR$ .