Марченко [illegible]

НОВОЕ В ЗАРУБЁЖНОЙ ДЕМОГРАФИИ

ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Сборник статей под редакцией
и с предисловием

Е. М. АНДРЕЕВА И А. Г. ВОЛКОВА

Москва «Статистика» 1977

312
Д31

Научно-исследовательский институт ЦСУ СССР
Отдел демографии

Новое в зарубежной демографии

Вышли из печати сборники:

1. Рождаемость и ее факторы
2. Методы демографических исследований
3. Население и экономика
4. Теоретические проблемы демографии
5. Изучение мнений о величине семьи
6. Демография поколений
7. Демографические прогнозы
8. Брак и семья
9. Урбанизация и расселение

Готовится к изданию
Изучение продолжительности жизни

Д31 **Демографические модели.** Сборник статей под ред. и с предисл. Е. М. Андреева и А. Г. Волкова. М., «Статистика», 1977.

182 с. с ил. (Новое в зарубеж. демографии).

Тема сборника — моделирование процесса воспроизводства населения и отдельных его компонентов: рождаемости, смертности и миграции, прежде всего в целях анализа демографических процессов. Особое внимание в сборнике уделяется детерминистским макромоделям воспроизводства населения, в частности характеризующим взаимосвязь между его возрастно-половой структурой и демографическими процессами. В нем представлены обзорные статьи по основным направлениям моделирования воспроизводства населения. Сборник подготовлен отделом демографии НИИ ЦСУ СССР.

Книга адресована демографам, экономистам, социологам и математикам, интересующимся проблемами моделирования демографических процессов.

Д $\frac{10805^{1}\text{-}028}{008(01)\text{-}77}$ 63-77 312

[1] Второй индекс 10803.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Моделирование — один из самых старых и, пожалуй, наиболее распространенных приемов демографического анализа. Более того, именно публикацию в 1662 г. первой демографической модели — таблицы смертности населения Лондона, построенной Дж. Граунтом, — принято считать моментом зарождения демографии как науки. С тех пор ее развитие неразрывно связано с моделированием, со стремлением найти и выразить закономерность демографического процесса, не затемненную влиянием привходящих обстоятельств. Можно с уверенностью сказать, что никакая другая общественная наука не имеет столь развитой и столь давно сложившейся системы разнообразных математических моделей, как демография.

Поиск и моделирование этих закономерностей отражали как изменение в демографических процессах и характере воспроизводства населения в изменявшихся социальных условиях, так и эволюцию самой науки. Первые модели основывались на идее стационарности демографических процессов, а затем на длительный период центральное место в анализе населения занимает моделирование смертности. Снижение рождаемости, начавшееся в западноевропейских странах во 2-й половине XIX в., привлекло внимание к изучению и моделированию закономерностей плодовитости. В середине XX в. демография, обогащенная полуторавековым опытом исследований, вновь возвращается к обобщенным моделям воспроизводства населения, однако уже на новой, более глубокой основе.

В последние годы моделирование демографических процессов получило большое развитие в исследованиях воспроизводства населения, его факторов и взаимосвязей с другими социально-экономическими явлениями. Усложнение демографических процессов, новые явления в характере воспроизводства населения, долго считавшемся предопределенным «божественным порядком», вызвали углубление демографических исследований и показали, что движение населения представляет собой многосложное явление, подчиняющееся воздействию многих обстоятельств. Открылась демография развивающихся стран, воспроизводство населения которых не имело исторических аналогов. Изучение закономерностей демографического движения показало, что необходимо отвлечься от преходящих обстоятельств, потребовало абстракции, для которой моделирование явилось наиболее подходящим методом. В то же время понимание зависимости развития населения от всего процесса общественного развития вызвало необходимость изучения связей демографических факторов с другими, лежащими вне населения.

Стала более ясной и зависимость воспроизводства населения в целом от отдельных демографических процессов, взаимосвязь их в процессе движения населения. Было понято, наконец, что воспроизводство населения зависит не только от сегодняшнего состояния демографических процессов, но и от их изменений в прошлом, отраженных в существующей структуре населения. Необходимость предвидения будущих демографических изменений и усиление прогностической роли демографических исследований побудили анализировать эту инерционность и рассматривать перспективы роста населения сквозь призму не только ближайших лет, но и в более широком историческом аспекте. Как следствие этого — широкое распространение регулярных демографических расчетов вообще и прогнозов в частности, стремление к универсальности методов их проведения, разработка многофакторных и нестационарных демографических моделей для анализа динамики и для научно обоснованного прогноза демографических процессов.

Вместе с тем к середине XX в. создались благоприятные возможности для развития демографического моделирования. Было накоплено достаточно много фактических данных об этих процессах, чрезвычайно расширилась сфера демографических исследований, охватившая весьма широкий круг стран с самыми разными демографическими условиями. Это создало предпосылки для обобщения и сопоставления демографических фактов и тенденций, для поисков общих закономерностей, выделения особенностей, обусловленных спецификой исторического развития, для попыток выделения некоторых типов явлений. Немалую роль в развитии моделирования сыграло и развитие демографической теории как в отношении более глубокого понимания существа происходящих процессов и их взаимосвязей, так и.в отношении методологии исследования, в частности и математического аппарата демографии. Наконец, распространение и совершенствование современной вычислительной техники помогло преодолеть извечную беду демографических исследований — трудоемкость расчетов, связанную с необходимостью обработки и обобщения массы статистических данных, — и привело к тому, что сложность модели перестала быть критерием ее приемлемости.

В самом общем виде модель — это некоторое условное построение, воспроизводящее характеристики реального объекта и специально созданное для изучения последнего. Модель — всегда упрощенная схема, однако она призвана отражать существенные черты моделируемого объекта. Для этого она должна быть теоретически обоснована, т. е. логически выражать саму природу моделируемого явления. «Схемы сами по себе ничего доказывать не могут; они могут только иллюстрировать процесс, если его отдельные элементы выяснены теоретически» *. Это значит, что построение любой модели должно исходить из понимания сущности моделируемого

* Ленин В И Полн собр соч., т 4, с 51, 52.

явления. Поскольку такое понимание опирается на имеющийся опыт, модель не может быть чисто умозрительным построением, она всегда создается на основе предварительного изучения моделируемого объекта. Чем больше мы знаем о существе процесса, тем ближе модель к реальности. Модель — это образ действительности, но образ упрощенный, результат некоторого обобщения, абстракции. Создавая этот образ, мы отвлекаемся от второстепенных черт, выделяя главные. В этом достоинство моделей как инструмента и моделирования — как метода исследования. Вместе с тем моделирование не только не заменяет теоретического анализа, но и возможно лишь на его основе.

В демографическом исследовании роль моделей особенно велика: помимо отмеченной уже многосложности воспроизводства населения, в демографии, в отличие от других естественных и даже общественных наук, эксперимент невозможен, а исторические аналогии как средство исследования почти всегда неприменимы.

Многие демографические показатели, широко используемые в практике демографического анализа, рассчитываются исходя из демографических моделей и могут быть правильно интерпретированы только в рамках демографических моделей. К их числу относятся такие показатели, как средняя продолжительность предстоящей жизни, нетто- и брутто-коэффициенты воспроизводства, коэффициент прогрессивности режима воспроизводства (в дальнейшем — истинный коэффициент естественного прироста) и многие другие.

Демографические модели служат для практических расчетов (например, модель передвижки по возрастам, как основа демографического прогноза) и для целей анализа (модель стабильного населения). Широкий класс моделей — к ним относятся многочисленные демографические таблицы — служит как целям демографического анализа, так и для практических расчетов. В последнее время получили широкое распространение теоретические модели населения, служащие для заполнения пробелов в текущем учете населения.

Под демографической моделью обычно понимается математическое описание тех или иных демографических явлений.

В большинстве случаев демографические явления довольно сложны и не могут быть описаны простой функцией. Именно поэтому исторически моделирование в демографии началось с числовых моделей, или так называемых демографических таблиц.

С точки зрения объекта моделирования демографические модели делятся на модели отдельных демографических процессов и модели процесса воспроизводства населения в целом. Причем модели воспроизводства населения различаются между собой степенью детальности учета тех или иных его компонентов *.

В зависимости от того, учитывают ли модели различия между вероятностью и частотой демографических событий, демографиче-

* См. статью «Демографические модели» в словаре-справочнике «Математика и кибернетика в экономике». М., «Экономика», 1975, с. 96—99.

ские модели делятся на стохастические (вероятностные) и детерминистские. Модели, в которых процесс моделируется для населения в целом, называются макромоделями. Если же моделируется демографическое явление, происходящее с индивидуумом или малой группой (семьей), то модель называется микромоделью.

Наконец, в зависимости от того, входят ли в модель возраст, время и другие аналогичные параметры как непрерывные величины или с постоянным шагом, модели делятся на непрерывные и дискретные.

Наиболее распространены детерминистские макромодели (как дискретные, так и непрерывные) и стохастические дискретные микромодели (имитационные модели), все большее развитие которых связано с прогрессом вычислительной техники.

Рост объема и повышение качества статистики населения, увеличение числа стран, охваченных демографической статистикой, привели к тому, что изменилась основная функция моделей, которые из средства борьбы с неполнотой демографической статистики превращаются в средство анализа и прогноза; началось бурное развитие конкретных демографических моделей, основанных на фактической статистической информации.

Современный этап развития моделирования в демографии характеризуется возникновением целого ряда экономико-демографических, демоэкологических и биологических моделей, связывающих демографические явления с их внедемографическими факторами. Эти модели нашли отражение в сборнике лишь в той мере, в какой они упоминаются в обзоре Н. Кейфица. Это связано, во-первых, с тем, что такие модели по степени завершенности и обоснованности существенно уступают «чисто» демографическим моделям; во-вторых, что касается экономико-демографических моделей, в большинстве случаев в их основе лежат закономерности капиталистического способа производства и возможность их применения к анализу воспроизводства населения СССР сомнительна. К тому же собственно демографическая часть таких моделей, как правило, сравнительно мало развита. Поэтому составители сборника сочли целесообразным ограничиться главным образом демографическими моделями, имея в виду большие перспективы их применения в советской демографии.

Вне данного сборника остались также все математико-статистические модели, изучающие и моделирующие взаимосвязь компонентов воспроизводства между собой и с другими процессами средствами математической статистики: корреляции, регрессионного анализа и т. д., включая эмпирическую аппроксимацию сложными функциями (например, кривыми Пирсона и др.). Среди этих моделей хотелось бы отметить так называемые модельные демографические таблицы, которые практически совсем не освещены в советской литературе, хотя несомненно заслуживают специального рассмотрения.

Руководствуясь соображениями практической пользы, мы отвели центральное место в сборнике классу наиболее развитых моделей — детерминистским макромоделям воспроизводства населения. Модели этого класса лежат в основе большинства имеющихся кумулятивных измерителей режима воспроизводства. Они применяются для оценки состояния и перспектив развития населения. Правильное понимание особенностей этих моделей должно защитить исследователей от неверных выводов (вроде угрозы депопуляции), которые нередко делаются на их основе.

К изложенному следует добавить, что моделирование демографических процессов занимает видное место и в отечественной демографии, начиная еще с работ Эйлера. Это направление исследований широко представлено в ней известными работами советских демографов: В. В. Паевского, С. А. Новосельского, Ю. А. Корчака-Чепурковского, Б. С. Ястремского, А. Я. Боярского, а в последние годы — И. А. Герасимовой, О. В. Староверова, Е. М. Андреева, С. И. Пирожкова, В. Ф. Шукайло, А. Г. Вишневского, С. В. Соболевой и др. К сожалению, зарубежным авторам эти работы, по-видимому, практически неизвестны, так как они не отражены в публикуемых здесь обзорах.

Сборник открывает статья Натана Кейфица «Математический анализ населения», в которой в очень сжатой форме излагается современное состояние и последние достижения в развитии математического анализа населения. Статья содержит перечень современных математических моделей населения и намечает дальнейшие перспективы в этой области. Снабженная обширнейшей библиографией, она может стать путеводителем в мире современных демографических моделей. Следует отметить, что автор статьи рассматривает лишь математически развитые (т. е. обладающие достаточно сложным математическим аппаратом) модели, оставляя без внимания целый ряд классических демографических моделей, такие, как, например, таблицы смертности и т. д.

Работа известного французского демографа Леона Таба представляет собой обзор моделей в исследовании одной из фундаментальных демографических зависимостей — соотношения возрастной структуры населения, плодовитости и смертности. Центральное место в развитии этого направления занимает теория стабильного населения Лотки, поскольку она оказала глубокое влияние на все последующее изучение этого аспекта воспроизводства населения. Ее современные модификации, описанные в работе Таба, связаны с отказом от моделей лишь для одного пола, отказом от гипотезы замкнутого населения, переходом к поперечному анализу. Они отражают стремление приблизить модельные построения к действительности и учесть в них факторы, оказывающие сегодня заметное влияние на характеристики воспроизводства населения, а также обобщить модели на населения с меняющейся плодовитостью и смертностью.

Эти направления сложились в теоретической демографии к середине нашего века и по существу не изменились с тех пор, как обзор Таба был представлен на Вторую Всемирную конференцию по народонаселению в Белграде (1965 г.). С тех пор получило развитие лишь одно направление — построение так называемых модельных таблиц, обобщающих и типизирующих демографические процессы Их значение определяется тем, что они пригодны для восстановления демографических характеристик по отрывочным и неточным данным и, кроме того, указывают последствия современных наблюдавшихся тенденций на различных этапах демографического перехода. Вместе с тем следует отметить слабость этих таблиц, свойственную всем корреляционным моделям: невозможность распространить установленные ими соотношения на иные условия места и времени. Однако, как уже указывалось, они остаются за пределами сборника.

Первая из двух публикуемых в сборнике работ видного французского демографа Жана Буржуа-Пиша увидела свет в качестве приложения к подготовленному им для ООН обширному труду «Понятие стабильного населения. Применение для изучения населения в странах с неполной демографической статистикой» В этой книге, как следует из ее названия, детально рассматривается возможность восстановления данных о численности, составе и росте населения на основе отрывочных и недостоверных данных о населении, т. е. в ситуации, характерной для развивающихся стран. В основе их применения для этой цели лежит гипотеза о том, что фактическое население стабильно В публикуемой работе Буржуа-Пиша эта гипотеза стабильности подвергается критическому анализу, т. е. рассматривается случай, когда население не стабильно, но развивается под действием неизменного режима воспроизводства. Автор исследует, насколько отличается данное население от стабильного, как эти отличия влияют на годовое число рождений и смертей и на численность населения. С другой стороны, рассматривается зависимость размера и характера различий от режима воспроизводства населения, которому подвержено население от закономерностей смертности и уровня плодовитости.

Автор устанавливает связь структуры населения в некоторый начальный момент с его будущей численностью в рамках данного режима воспроизводства и вводит понятие «потенциала демографического роста», который нашел развитие в другой из публикуемых его статей.

В статье Ж. Буржуа-Пиша «Стабильные, полустабильные населения и потенциал роста» развиваются некоторые положения первой работы. Автор обобщает модели стабильного населения на оба пола, вводит и подробно рассматривает понятие «полустабильного населения», а также понятия инерции населения и потенциала демографического роста.

Как уже упоминалось, одно из важных направлений современного демографического моделирования представляет собой имитационное, стохастическое микромоделирование. По мере усложнения модели возможность ее аналитического решения уменьшается. Выход из этого тупика открывают статистические микромодели, построенные на принципе имитации процесса. Принцип имитационного моделирования — моделирования на ЭВМ методом Монте-

Карло — состоит в следующем: интересующие исследователя события жизни индивидуума (или группы) представляются на каждом временно́м шаге в виде конечного набора альтернатив с определенными вероятностями осуществления и функциями распределения этих вероятностей, после чего на ЭВМ прослеживается «жизнь» индивидуума, причем всякое событие принимается наступающим или нет в зависимости от некоторого набора случайных чисел.

Как следует из публикуемого обзора Н. Кейфица, возможности таких моделей достаточно широки и освоены далеко не полностью.

Имитационные модели населения — это самостоятельная ветвь демографического моделирования. И одна-две статьи на эту тему в сборнике вряд ли дали бы о ней полное представление. Поэтому составители сочли целесообразным, впредь до того, как появится возможность подробно осветить это направление, включить в сборник лишь статью Г. Файхтингера «Стохастические модели выбытия в статистике населения», которая представляется своеобразным «мостом» от макродетерминистских к микростохастическим моделям. Автор не ставит перед собой задачу построения имитационной модели, но рассматривает возможность описания демографических явлений (процессов) как последовательности элементарных случайных (в теоретико-вероятностном смысле) событий. Представленные в статье модели могут быть непосредственно положены в основу машинной имитации. Статья особенно интересна тем, что в ней содержится вся «аксиоматика» микромоделирования, вводятся строгие определения, рассматриваются преимущества имитации перед традиционными способами моделирования.

Разумеется, помещенные в сборнике работы представляют лишь некоторые аспекты этой широкой области демографического анализа. Составители надеются, что они тем не менее принесут пользу советским читателям.

Е. М. Андреев

А. Г. Волков

Натан Кейфиц

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАСЕЛЕНИЯ

Nathan Keyfitz. Population mathematics. International Population conference (London, 1969). Vol I, Liege, 1971.

В этом докладе делается попытка очертить границы математической демографии на тот момент, когда он написан, и указать некоторые нерешенные проблемы и возможные направления дальнейшего развития. Решение такой задачи возможно лишь в виде библиографического описания: на нескольких страницах трудно даже перечислить основные достижения в этой области, а воспроизвести содержание исследований просто немыслимо. Подробно результаты исследований изложены в работах, указанных в списке литературы. Направления дальнейшего развития, предлагаемые далее, носят субъективный характер, как и любое предсказание такого рода: то, что кажется пробелом в наших знаниях сегодня, завтра может быть решено или же просто обойдено, так как в результате неожиданных открытий интерес сосредоточится на чем-либо другом. Кроме того, демография настолько тесно связана с явлениями реального мира, что ее дальнейшее развитие вряд ли будет самостоятельным: на него, несомненно, окажут влияние новые явления общественной жизни.

Интегральное уравнение Лотки

Классическая часть формальной демографии исходит из предпосылки о неизменности возрастных коэффициентов рождаемости и смертности в населении одного пола. Если рассматривается только смертность, то мы получаем таблицу смертности, которую можно интерпретировать как описание стационарного населения, в котором число смертей равно числу рождений. Если числа родившихся и умерших соответствуют реально существующим данным (иначе говоря, с математической точки зрения, если они произвольны), то мы получим более общую и интересную теорию, первоначально развитую Лоткой в ряде книг и статей, выходивших с 1907 по 1948 г., полное изложение которой можно найти в работах Лотки (Lotka, 1939) и Родса (Rhodes, 1940). В сущности, интегральное уравнение Лотки устанавливает соотношение между числом рождений некоторого поколения и числом рождений предыдущего поколения. Для каждой новорожденной из предшествующего поколения существует некоторая вероятность дожить до каждого последующего возраста и в этом возрасте родить. Суммируя по всем возрастам общие вероятности обоих этих событий, получим математическое ожидание числа рождений в последующем поколении. Это простое и очевидное соотношение несколько усложняется допущением о произвольном характере начального возрастного распределения. Если выразить это соотношение в виде интегрального уравнения, то последнее можно решить, причем в его решение входят важные константы, в том числе истинный коэффициент естественного прироста (Sharpe and Lotka, 1911). Коул (Coale, 1957) описал экономный путь поиска численного значения главного корня этого уравнения, а позже (Coale, 1968) весьма подробно исследовал комплексные корни. В работе Кейфица и Флигера (Keyfitz and Flieger, 1968) приводятся результаты расчета трех основных корней для почти 600 человеческих популяций. Баджема (Bajema, 1963) методом главного корня исследовал дифференциацию умственных способностей.

Четыре обобщения уравнения Лотки

В настоящее время работы Лотки развиваются в четырех направлениях. Первое, продвинутое в основном Феллером (Feller, 1941), используется для получения более простого и более точного решения интегрального уравнения Лотки преобразованием Лапласа. Бо́льшая точность достигается путем утверждения о достаточных и необходимых условиях, при которых решение Лотки корректно.

Вторая группа работ, связанная с именем Лесли и впоследствии развитая Гудменом, основана на изложении модели Лотки в терминах дискретной математики. Лесли подошел к вопросу путем определения матричного оператора, применение которого приводит к тем же результатам, что и передвижка населения по возрастам,— метод, в течение долгого времени применявшийся исследователями населения (Cannan, 1895; Bowley, 1924; Whelpton, 1936). Разложение этой матрицы на спектральные составляющие (Leslie, 1945) дает результаты, аналогичные решению интегрального уравнения и удобные для вычислений, особенно если они производятся на ЭВМ. Коул (Coale, 1954) анализировал передвижку по возрастам с помощью частных производных. Гудмен (Goodman, 1968) предложил отличную от предшествующих дискретную модель, которая не требует ни матриц, ни частных производных.

Вскоре обнаружилось, что модель для одного пола, будучи применена к мужскому полу, дает результаты, несовместимые с результатами, которые получаются при ее применении к женскому полу. Кармел (Karmel, 1948) обратил внимание на эту проблему, а также показал, что для получения совместимости, которая в действительности, очевидно, существует, необходимо, по-видимому, более адекватно представить в модели процесс формирования брачных пар. Это наблюдение привело к третьему направлению развития теории Лотки, к моделям более удачным, чем однополая модель с дифференциацией по возрасту. Вклад в разработку модели для двух полов сделали Поллард (Pollard, 1938), Кендел (Kendall, 1939) и Гудмен (Goodman, 1953). Созданная ими модель для двух полов может быть выражена как в непрерывной, так и в дискретной (Goodman, 1968) форме. Оба эти пути абсолютно непротиворечивы. Однако элемент условности, свойственный модели для одного пола, все же не устранен. Скорее, он перенесен на вопрос о том, какой пол доминирует в рождаемости, т. е. на то, в какой мере рождения зависят от числа мужчин, в какой — от числа женщин. Очевидно, что если при передвижке в соответствующих (т. е. брачных и плодовитых) возрастах оказывается меньше мужчин, то число рождений в большей степени зависит от числа мужчин, и соответственно его в большей степени определяют женщины, если в тех же возрастах меньше женщин.

Пока для модели с эндогенным (т. е. определяемым внутри самой модели) доминированием одного из полов еще не предвидится решения (см. далее обсуждение проблемы брачного рынка).

Четвертое направление развития теории Лотки связано с необходимостью установить очередность браков и рождений. Его важность стала очевидной с появлением работ, описывающих сильные колебания чисел рождений в 30-х и 40-х годах. Сначала демографы думали, что это указывает на какую-то «ошибку» в модели для одного пола, предложенной Лоткой; теперь мы видим, что предполагаемая ошибка в действительности не что иное, как необходимость принять во внимание другие переменные и по-иному разработать данные. Викселль (Wicksell, 1931) и Хеджнел (Hajnal, 1950) показали, что функцию плодовитости, которая входит в интегральное уравнение Лотки, можно с успехом разложить на вероятность брака и вероятность рождения ребенка в браке (внебрачные рождения требуют особого рассмотрения). Уэлптон (Whelpton, 1954) подразделил рождения по очередности, различая женщин согласно числу рожденных ими детей. Признание роли брака и очередности рождения потребовало расширения аппарата Лотки — Лесли (Murphy, 1965). Прессá (Pressat, 1961, 1967) и Анри (Henry, 1964) показали удобство для таких целей моделей анализа множественного выбытия.

Когортный анализ по сравнению с анализом данных календарного периода

Между тем изучение очередности рождений привело Уэлптона к новым и даже более важным заключениям. Он обнаружил, что если распределить рождения по их очередности и экстраполировать рост числа рождений каждой очередности, наблюдавшийся в 40-х годах, на несколько следующих лет, то в эти годы первых рождений окажется больше, чем имеется женщин. Так как ни одна женщина не может иметь более одного первого рождения, то было бы неверно предполагать, что такие коэффициенты, вычисленные для календарного периода, могут сохраняться длительное время, и, значит, прежние толкования были внутренне противоречивы.

Для получения правильного решения следует рассматривать не возрастные показатели рождаемости отдельного года или другого периода, а когорту женщин, например, всех родившихся в определенном году (Whelpton, 1954) или всех вышедших в определенном году замуж (Royal Comission on Population, 1954; Livi-Bacci, 1968). Логические основания этого подхода были подробно рассмотрены Райдером (Ryder, 1956, 1960, 1968). При ретроспективных исследованиях, т. е. в тех случаях, когда все сведения по соответствующим когортам собраны и доступны исследователям, такой подход особых проблем не вызывает. Однако для тех когорт женщин, которые еще не завершили деторождения, экстраполяция их плодовитости вызывает некоторые затруднения. В конце 60-х, как и в 40-х годах, нам очень нужно было бы знать тенденции последних лет, т. е. что происходит с плодовитостью теперь. Райдер (Ryder, 1964) показал, как при некоторых предположениях из моментов распределения родившихся по возрасту матери для календарных периодов вплоть до данного времени можно вывести моменты такого распределения для когорты. На основе этих и других предположений вполне возможно разработать ряд новых математических методов. Должны быть еще разработаны методы дополнения данных прошлого периода результатами выборочного изучения намерений относительно деторождения; особенно трудно будет определять ошибку в выведенных показателях плодовитости когорт. Сейчас метод когорт распространяется как в демографии, так и за ее пределами (Ryder, 1965).

Применение математических методов для получения выводов на основе неполных данных

Одним из побудительных мотивов развития математической теории в последние годы была необходимость пользоваться неполными и косвенными данными. Буржуа-Пиша (Bourgeois-Pishat, 1957) применил ставшую классической теорию стабильного населения для получения коэффициента рождаемости населения Колумбии на основе его возрастного распределения и таблиц смертности. М. А. Эль-Бадри (M. A. El-Badry, 1955) и Эдуардо Арриага (Eduardo Arriaga, 1968) построили таблицы смертности, имея данные о возрастных распределениях и коэффициентах прироста. Энсли Дж. Коул и Мелвин Зелник (Ansley J. Coale and Melvin Zelnik, 1963) получили расчетным путем данные о числах рождений более точные, чем исходные, причем за гораздо более ранние годы (до 1855 г.), чем данные регистрации рождений. Они также обобщили модель стабильного населения на случай неизменной смертности и линейно-убывающей плодовитости. Кейфиц, Нагнур и Шарма (Keyfitz, Nagnur and Sharma, 1967) распространили теорию (стабильного населения. — *Ред.*) на случай, когда плодовитость изменяется по параболе второго порядка, и проверили результаты, применив свою модель к ряду населений. Современный уровень знаний в этой области представлен в двух публикациях ООН, из которых одна написана Энсли Дж. Коулом и Полом Демени (Ansley J. Coale and Paul Demeny, 1967), а вторая — Буржуа-Пиша (Bourgeois-Pishat, 1966).

Методологические изыскания, которые позволят получать достоверные результаты по ненадежным и неполным данным, могут далее развиваться в нескольких направлениях. Один аспект проблемы — это устранение расхождений между данными последовательных переписей населения и расчетами на основе данных текущего учета естественного движения населения. Второй аспект — получение результатов таким образом, чтобы можно было хотя бы приблизительно оценить их погрешность. Ввиду того, что возникновение ошибок в демографических данных обычно не есть следствие случайного отбора, по-видимому, необходимо искать новые способы соединения приближенных оценок, сделанных экспертным путем, и математической теории (Keyfitz, 1968, p. 88—89).

Модельные таблицы смертности и стабильные населения

Важным вспомогательным средством во всякой такого рода работе представляются численные модели населения. Для таких функций, как, например, число живущих в таблицах смертности, в течение уже более века (Gompertz, 1825; Makeham, 1860) делались попытки найти достаточно простые и хорошо аппроксимирующие кривые, и эти поиски до сих пор продолжаются. Спигельман (Spiegelman, 1968, p. 163—170) подытожил последние попытки в этой области, включая многообещающие исследования Сциларда (Szilard, 1959) и Берда (Beard, 1961, 1963).

Пока не найдена функция, которая аппроксимировала бы кривую смертности, или, еще лучше, непосредственно кривую дожития, и параметры которой (хотелось бы надеяться, что их будет немного) дали бы возможность классифицировать различные типы смертности, нужно применять для этого какие-то другие средства. Коул (Notestein et. al., 1944) первым построил и применил для этой цели модельные таблицы смертности. Серия таких таблиц для различных значений ожидаемой продолжительности жизни при рождении была опубликована ООН (United Nations, 1955). Разумеется, сгруппированные тем или иным образом возрастные коэффициенты смертности — это не самый экономичный способ ее изображения, но применение для этого лишь одного параметра было бы, по-видимому, чрезмерным упрощением. Следуя Ледерману и Брюа[1], Буржуа-Пиша (Bourgeois-Pishat, 1966, p. 138) применил методы факторного анализа к изучению частоты смертных случаев по возрасту и полу и выделил в итоге шесть факторов[2]. Коул и Демени (Coale and Demeny, 1966) создали наиболее широко применяемый сейчас набор модельных таблиц, включающий четыре семейства таблиц, названные «Восток», «Запад», «Север» и «Юг»; этот набор можно считать двухпараметрическим. Они также получили стабильные населения, соответствующие каждой таблице смертности, и показали, как эти стабильные населения можно при-

[1] Имеется в виду статья Ледермана и Брюа «Пространство смертности». *Population*, vol. 14, № 4, 1959. — *Прим. ред.*

[2] Речь идет о формальных статистических факторах, содержательная интерпретация которых весьма затруднительна. — *Прим. ред.*

менить для получения коэффициентов рождаемости в развивающихся странах. Брасс (Brass et. al., 1968, p. 128) соединил математическую формулу для кривой смертности с численными моделями, причем, по крайней мере в принципе, две константы его формулы могут быть получены на основе фактических возрастных распределений.

Коэффициенты естественного движения, изменяющиеся во времени

Изложенные ранее положения демографической теории основываются большей частью на неизменных коэффициентах рождаемости и смертности, хотя были отмечены и исключения. Еще одно исключение — модель квазистабильного населения Коула (Coale, 1956), в которой рождаемость постоянна, а коэффициенты смертности убывают во всех возрастах одинаково, но это не влияет на возрастное распределение. Однако сейчас в развивающихся странах (а изучаются возрастные распределения населения именно этих стран) в младших возрастах снижение смертности сильнее, чем в старших. В этих условиях оценки рождаемости, сделанные на основе полученного при переписи возрастного распределения, будут иными.

Одно из классических понятий формальной демографии (Lotka, 1922; Haldane, 1927; Leslie, 1945) — свойство эргодичности, заключающееся в том, что в процессе развития при неизменных показателях воспроизводства население забывает первоначальное возрастное распределение и приходит к возрастному распределению, зависящему только от этих неизменных возрастных коэффициентов рождаемости и смертности. Это справедливо для однополой модели, когда рождения и смерти происходят на некотором участке возрастов. Коул предположил, а Лопес (Lopez, 1961) доказал аналогичное свойство (называемое слабой эргодичностью) для случая, когда показатели воспроизводства изменяются. Два населения могут иметь сначала совершенно разные возрастные распределения, но под воздействием одного и того же (возможно, изменяющегося) режима смертности и плодовитости они будут сходиться к одному и тому же возрастному распределению.

Вероятностный подход

Работа Лотки и все ее продолжения, рассмотренные ранее, основаны на том, что мы теперь называем детерминистской моделью. В ней предполагается, что случайность действует только на индивидуальном уровне, население же развивается в точном соответствии со значениями математического ожидания. Аппарат стохастических процессов позволяет более реалистично подойти к решению этой проблемы. Еще несколько лет назад (Goodman, 1953) применение дифференциальных уравнений к двухполой модели, не учитывающей возраста, позволило получить как средние значения, так и дисперсии (численности населения. — *Ред.*). Чанг (Chiang, 1968, chap. 10) построил стохастическую таблицу смертности. В трудах

Бейли (Bailey, 1964), Баруха-Рида (Bharucha-Reid, 1960), Бартлета (Bartlett, 1960) и Карлина (Karlin, 1966) можно найти различные описания процессов рождаемости и смертности, которые получили теперь математическое выражение. Теория развивается от простого к более сложному: чистые процессы рождаемости, чистые процессы смертности, процессы рождаемости и смертности — все это для однородной популяции; затем разработанная Гудменом и упомянутая выше модель рождаемости и смертности для двух полов, не учитывающая возраста; наконец, изучение возрастных распределений и их обработка при помощи функционалов, т. е. функций, аргументы которых сами есть функции (Bartlett and Kendall, 1951), а также найденное Гудменом (Goodman, 1968) дискретное решение задачи, учитывающее возраст. Хом (Hoem, 1968 a) разрабатывает вероятностную модель воспроизводства населения, брачной плодовитости (1968 b) и брачности (1968 c); Чанг (Chiang, 1968, chap. 8) добавил сюда стохастические модели миграции.

Более старым приемом исследования был анализ ветвящегося процесса, который сначала (Galton and Watson, 1874) был разработан для изучения исчезновения родовых имен и с тех пор применялся во многих областях естественных и общественных наук. Лотка (Lotka, 1939, p. 123—136) пользовался им для вычисления вероятности вымирания потомства семьи при коэффициентах рождаемости и смертности в США. Харрис (Harris, 1963) дал строгое изложение имеющихся в этой области достижений. Дж. Х. Поллард (J. H. Pollard, 1966) объединил ветвящиеся процессы разных типов с матрицами Лесли для передвижки населения по возрастам и затем применил их к австралийским данным. Приняв постоянные возрастные коэффициенты рождаемости, смертности и брачности, он нашел математические ожидания численности населения в соответствующих группах, а также их дисперсии и ковариации. В этой области работал также Питер Джеджерс (Peter Jagers, 1968).

Применение стохастических моделей в расчетах, связанных со страхованием жизни, обобщено Бикманом (Beekman, 1968), а Дж. Х. Поллард проводит анализ случайных колебаний по материалам контрактов о ежегодной ренте. К демографии такая работа имеет отношение постольку, поскольку она тесно связана с вопросом о случайных колебаниях смертности.

Имитация

Если проблема не поддается математическому выражению, то иногда прибегают к методу, известному под названием микроимитации. Первая работа в этой области принадлежит Оркету и др. (Orcutt et. al., 1961), которые применили к отдельным лицам месячные коэффициенты рождаемости, смертности, формирования семьи и т. д. Хюрениус и его соавторы (Hyrenius et. al., 1964, 1966, 1967) провели аналогичные эксперименты на ЭВМ с данными о населении Швеции. Сейчас проводится (Horvitz, 1967) исследование большего масштаба для США. Все такие работы все еще жестко ограничены в отношении объема вычислений, и даже применение наиболее мощных из существующих электронных вычислительных машин позволяет вести расчеты лишь для населения в несколько тысяч. Дж. М. Хеммерсли и Д. К. Хендскомб (J. M. Hammersley and D. C. Handscomb, 1964) находят, что метод имитации оставался на ранней стадии развития в течение двадцати или более лет. Работа Нэйлора и др. (Naylor et. al., 1966) продвигает этот метод в стадию зрелости.

Образование семьи

Какие бы методы не применялись, неизменно трудной остается проблема моделирования брачности. При имитации, сталкиваясь с тем, что возраст женихов и невест при переходе от одного года к другому не может считаться постоянным, применяют обычно некоторое произвольное правило (Matras, 1968; Hoem, 1968). Как видно из материалов текущего учета естественного движения населения, мужчины данного возраста в течение некоторого года предпочитают невест, возраст которых подчинен некоторому распределению, но в следующем году мужчины, какими бы ни были их предпочтения, не могут выбрать невест того же возраста по той причине, что в ходе передвижки по возрастам число потенциальных невест от года к году изменяется. Аналогично обстоит дело и для женщин; и для того, чтобы рассматривать возраст вступления в брак для обоих полов одновременно, необходимо иметь представление о брачном рынке.

Сейчас изменения в соотношении численности мужчин и женщин в брачных возрастах в США особенно велики, так как дети, рожденные в начале бэби-бума, достигли конца второго — начала третьего десятилетия своей жизни. Эта проблема, указанная впервые Полом Гликом (Glick et. al., 1968; Parke and Glick, 1967), получила название «брачная теснота». Ша и Гизбрехт (Sha and Giesbrecht, 1969) пробовали решить эту проблему путем имитации. Некоторые ученые и сейчас работают над ее разрешением, но точной математической формулировки и решения пока нет.

Эта проблема представляет собой часть более широкой проблемы образования семей, и вообще прослеживания цикла развития семьи от рождения ребенка до его вступления в брак и далее до нового рождения. Глик (Glick, 1957) провел в этой области фундаментальное исследование, показав, в частности, как на протяжении первой половины XX столетия более ранние браки, более благоприятная смертность и более раннее деторождение совместно в одном направлении влияли на формирование семьи. В его работе предлагаются некоторые новые математические методы изучения населения. В частности, мы еще не можем выразить в общем виде влияние изменений некоторых переменных (например, возраста вступления в брак) на другие (например, на долю в населении родителей, все дети которых не живут в их семье). Один из аспектов этой проблемы, решение которого было дано Лоткой (Lotka, 1931), это — определение доли сирот данного возраста в населении, имеющем определенные возрастные коэффициенты рождаемости и смертности.

Применимы ли методы Лотки (Lotka, 1931) в других случаях, еще предстоит выяснить; во всяком случае, автор, на основании собственного опыта, мог бы сказать, что возможность их применения не очевидна, и требуется тонкий вероятностный анализ.

Переменные, иные чем возраст и пол

Традиционная формальная демография большей частью ограничивалась применением переменных «возраст» и «пол». Распространение ее методов на изучение рабочей силы нашло отражение в таблицах продолжительности трудовой жизни, при построении которых применялся актуарный (т. е. принятый в страховании. — *Ред.*) метод множественного выбытия. Ричард Стоун (Richard Stone, 1965) построил модель системы образования, основанную на дифференциальных уравнениях. Каждый из этих процессов может быть обобщен и на другие переменные. Нам не нужно ограничивать категории, признаваемые математической демографией, лишь возрастом и полом, или даже ими плюс брак и очередность рождения, о которых шла речь раньше; можно включить в рассмотрение такие переменные, как место жительства, обучения, занятие, социальная группа или служебное положение. Роджерс (Rogers, 1968) предложил некоторые матричные модели межрайонных передвижений, Таба (Tabah, 1968) — модели рабочей силы и миграции.

Бламен, Коган и Маккарти (Blumen, Kogan and McCarthy, 1955), Прейс (Prais, 1955), Гудмен (Goodman, 1961), Метрас (Matras, 1960, 1966) и Ходж (Hodge, 1966) построили и проанализировали матричные модели социальной мобильности, т. е. перехода между статистически определенными социально-экономическими группами. Весьма общие формальные модели мобильности разработаны Макгиннисом (McGinnis, 1966, 1968). Модель Корнелла содержит аксиому накоплений инерции: вероятность для лица остаться в некотором состоянии тем больше, чем дольше оно уже находится в этом состоянии. Ленд (Land, 1969) на основе этой модели провел международное сравнение географической мобильности. Дункан (Dunkan, 1965, 1966) разработал методологические основы анализа социальной мобильности, а Блоу и Дункан (Blau and Dunkan, 1967) исследовали с этой точки зрения занятия. Градацию занятий по их престижности исследовали Ходж, Сигель и Росси (Hodge, Siegel, Rossi, 1964). Бартоломью (Bartholomew, 1967) разработал несколько стохастических моделей для организаций.

Демоэкономические модели

Экономисты включили население в формальные модели. Иногда они предполагают, что рабочая сила есть неизменная доля всего населения, но иногда принимают в расчет различные доли находящихся на иждивении детей и стариков. Чаще всего эти модели, предназначенные главным образом для прогноза в экономике и касающиеся населения только между прочим, трактуют его как экзогенную переменную: считается, что его изменения влияют на экономику, но попытки определить, каким образом экономика влияет на население, в частности на коэффициент рождаемости, отсутствуют. Исключением служат труды Лейбенстейна (Leibenstein, 1957), Бекера (Becker, 1960), Пикока (Peacock, 1952, 1954), Боулдинга (Boulding, 1955) и Нельсона (Nelson, 1956), а также, конечно, Адама Смита и Мальтуса, хотя ни один из них не создал вполне убедительной модели (Judith Blake, 1967). Идеальным решением было бы введение населения в независимую систему уравнений такого типа, какие эконометрики применяют для прогноза, но достигнутый уровень знаний не позволяет пока составить такие достаточно реалистические уравнения.

Экологические модели

Открытой для междисциплинарных исследований остается пограничная область, где демография соприкасается с экологией животных. Вольтерра (Volterra, 1926) и Лотка (Lotka, 1925) исследовали теоретически состояние замкнутой системы, в которой один вид — хищник, а другой — жертва. Они показали, что при весьма общих условиях такая система будет развиваться циклически. Гаузе (Gause, 1935) и Парк (Park, 1948) сопоставили эти результаты с данными наблюдений и эксперимента. Эти и другие авторы также более или менее детально классифицировали условия стабильности в различных обстоятельствах и нашли, например, что конкуренция стремится быть нестабильной. Интересное обсуждение этого и других случаев проводится в работах Сови (Sauvy, 1951, 1954). С тех пор Лесли и Гоуэр (Leslie and Gower, 1958), Бартлет (Bartlett, 1960) и Слободкин (Slobodkin, 1961) продвинули вперед теорию Лотки — Вольтерра и разработали несколько стохастических моделей. Боулдинг (Boulding, 1962, гл. 7), пользуясь графическими методами, применил некоторые результаты, полученные экологами, к экономической конкуренции.

Генетика

Много пробелов еще существует в области между генетикой и демографией. В попытки заполнить их внесли вклад Левонтин (Lewontin, 1965), Малеко (Malécot, 1966), Бодмер (Bodmer, 1968), Бодмер и Кавали-Сфорца (Bodmer and Cavalli-Sforza, 1968), Жаккар (Jacquard, 1968) и Жаккар и Рейн (Jacquard and Reynes, 1968). В работе Керка (Kirk, 1968) рассматривается селективное значение коэффициентов воспроизводства населения в США. Кавали-Сфорца (Cavalli-Sforza, 1962) исследовал частоту мутаций летальных генов в населении Италии.

Модели рождений и зачатий

Для процесса зачатия и рождения были разработаны модели несколько иного вида. Основной параметр в этих моделях — вероятность зачатия в том или ином месяце для женщины, способной к зачатию. Если зачатие произошло, то за ним следует период беременности и послеродовой стерильности, и пока этот период не кончится, новое зачатие произойти не может. С формальной стороны это аналогично действию счетчика, применяемого для обнаружения радиоактивности, в котором каждый полученный импульс сопровождается мертвым периодом. Изящную математическую формулировку и решение проблемы счетчика дал Феллер (Feller, 1948), применивший для этого преобразование Лапласа. Основные работы по применению таких моделей к конкретным демографическим процессам принадлежат Анри (Henry, 1953, 1957, 1961), Перрину и Шепсу (Perrin and Sheps, 1964).

Анри (Henry, 1957) показал, что в населении, в котором способность к зачатию с возрастом не меняется, коэффициент зачатия становится асимптотически независимым от продолжительности брака. Поттер и Титце (Potter and Tietze, 1967) нашли действенный путь исследования эффективности контрацептивов методом построения таблиц смертности со множественным выбытием. Дальнейшие исследования в этой области проведены Дандекером (Dandekar, 1955), Жаккаром (Jacquard, 1967), Бодмером и Жаккаром (Bodmer and Jacquard, 1968), Сингом (Sing, 1963, 1968), Шепсом (Sheps, 1963), Поттером и Паркером (Potter and Parker, 1964), Лахенбрухом (Lachenbruch, 1967), Гляссером и Лахенбрухом (Glasser and Lachenbruch, 1968) и Джейном (Jain, 1969). Методом имитации эту проблему пытались решить Хюрениус и Адольфсон (Hyrenius and Adolfson, 1964), Шепс и Ридли (Sheps and Ridley, 1967), а также Поттер, Сокода и Фейнберг (Potter, Sakoda and Feinberg, 1968), Нейлор (Naylor et. al., 1966) применяет разработанные им же методы имитации к демографическим процессам, включая оценку эффекта различных вариантов контроля рождаемости (Naylor, 1969).

Границы математической демографии

Первый вариант нашей попытки очертить границы математической демографии был улучшен с учетом замечаний, присланных нам приблизительно двадцатью различными корреспондентами. Однако не все из указанных ими упущений были устранены. На границе с математической социологией и антропологией лежит изучение систем родства, в частности анализ демографического эффекта брачных обычаев. Методы регрессионного анализа и в последнее время многошаговый анализ — приемы математические и в то же время применяемые в демографических исследованиях — сделали менее четкой границу со статистикой. В той же граничной области находится методика обследований, применяемых для сбора демографических данных. Где-то в области, общей для демографии и экологии человека, лежат модели пространственного распределения и диффузные модели, а также модели распределения по величине городов и других человеческих скоплений, глубоко исследуемые географией и другими науками. Время покажет, пойдут ли демографы дальше в этих направлениях или выберут другие пути, сейчас еще неразличимые.

Перевод *А. Ю. Кардаш*

ЛИТЕРАТУРА

Arriaga E A. New life tables for latin american populations in the nineteenth and twentieth centuries. *Population monograph series*, № 3. Berkeley, Institute of international studies, 1968.

Bailey N. T. J. The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences. New York, John Wiley & Sons, 1964.

Bajema C. Estimation of the direction and intensity of natural selection in relation to human intelligence by means of the intrinsic rate of natural increase. *Eugenics quarterly*, X (1963), 175—187.

Bartholomew D. J. Stochastic models for social processes. New York, John Wiley & Sons, 1967.

Bartlett M. S. Stochastic population models in ecology and epidemiology. New York, John Wiley & Sons, 1960.

Bartlett M. S. and Kendall D. G. On the use of the Characteristic Functional in the analysis of some stochastic processes occurring in phisics and biology. *Proceedings of the Cambridge philosophical society*. B. XLVII (1951), 65—75.

Beard R. E. A theory of mortality based on actuarial, biological and medical considerations. *Proceedings of international population conference*, New York, 1961. *International union for the scientific study of population*, London, 1963, I, 611.

Becker Gary. An economic analysis of fertility, in National bureau of economic research, *Demographic and economic change in developed countries. Princeton*, Princeton university press, 1960, p. 209—240.

Beekman J. A. Collective risk results. *Transactions of the society of actuaries*, XX(1968), 182—199.

Bharucha—Reid A. T. Elements of the Theory of Markov processes and their applications. New York, McGraw-Hill, 1960.

Blake Judith. Income and reproductive motivation. *Population studies*, XXI (1967), 185—206.

Blau P. and Duncan O. D. The american occupational structure. New York, John Wiley & Sons, 1967.

Blumen I., Kogan M. and McCarthy P. J. The industrial mobility of labor as a probability process. Vol. VI of *Cornell studies of industrial and labor relations*. Ithaca. N. Y., Cornell university press, 1955.

Bodmer W. F. Demographic approaches to the measurement of differential selection in human populations. *Proceedings of the national academy of sciences*, LIX(1968), 690—699.

Bodmer W. F. and Cavalli-Sforza. A migration matrix model for the study of random genetic drift. *Genetics*, LIX (1968), 565—592.

Bodmer W. F. and Jacquard A. La variance de la dimension des familles, selon divers facteurs de la fécondité. *Population*, 23e année (1968), 869—878.

Boulding K. E. The Malthusian model as a general system. *Social and economic studies*, IV (1955), 195—205.

Boulding K. E. A reconstruction of economics. New York, Science editions. 1962.

Bourgeois-Pichat J. Utilisation de la notion de population stable pour mesurer la mortalité et la fécondité des populations des pays sous-développés. *Bulletin de l'Institut international de statistique* (actes de la 30e session), 1957.

Bourgeois-Pichat J. Le concept de population stable: application à l'étude des populations des pays ne disposant pas de bonnes statistiques démographiques. New York, United Nations, 1966.

Bowley A. L. Births and populations of Great Britain. *Journal of the Royal* Economic Society, XXXIV (1924), 188—192.

Brass W. et. al. The demography of tropical Africa. Princeton, Princeton university press, 1968.

Cannan E. The probability of a cessation of the growth of population in England and Wales during the next century. *The economic journal, V (1895)*, 505—515.

Cavalli-Sforza L. The distribution of migration distances: models and applications to genetics, *Les deplacements humains; aspects methodologiques de leur mesure*. Ed. J. Sutter. Paris, Hachette, 1963, p. 139—158.

Chiang C. L. Introduction to stochastic processes in biostatistics. New York, John Wiley & Sons, 1968.

Coale A. J. The effects of changes in mortality and fertility on age composition. *Milbank memorial fund quarterly,* XXXIV(1956), 79—114.

Coale A. J. A new method for calculating Lotka's r-the intrinsic rate of growth in a stable population. *Population studies,* XI (1957), 92—94.

Coale A. J. Convergence of a human population to a stable form. *Journal of the american statistical association,* LXIII (1968), 395—435.

Coale A. J. and Demeny P. Regional model life tables and stable populations. Princeton, Princeton university press, 1966.

Coale A. J. Manual IV. Methods of Estimating basic demographic measures from incomplete data. New York, United Nations, 1967.

Coale A. J. and Zelnik M. New estimates of fertility and population in the United States. Princeton, Princeton university press, 1963.

Cole L. C. The population consequences of life history phenomena. *Quarterly review of biology,* XIX (1954), 103—137.

Dandekar V. M. Certain modified forms of binomial and poisson distributions. Sankhya, XV (1955), 237—251.

Duncan O. D. The trend of occupational mobility in the United States. *American sociological review* XXX (1965), 491—498.

Duncan O. D. Occupation trends and patterns of net mobility in the United States. *Demography,* III (1966), 1—18.

El-Badry M. A. Some demographic measurements for Egypt based on the stability of census age distributions. *Milbank memorial fund quarterly,* XXXII (1955), 268—305.

Feller W. On the integral equation of renewal theory. *Annals of mathematical statistics,* XII (1941), 243—267.

Feller W. On probability problems in the theory of counters. In *Studies and essays* (presented to R. Courant on his 60 th birthday). New York, Interscience publishers, 1948, 1948, 105—118.

Galton F. and Watson H. W. On the probability of extinction of families. *Journal of the anthropological institute,* VI (1874), 138—144.

Gause G. F. La théorie mathématique de la lutte pour la vie. *Actualités scientifiques,* no. 277, Paris, Hermann, 1935.

Glasser J. H. and Lachenbruch P. A. Observations on the relationship between frequency and timing of intercourse and the probability of conception, *Population studies,* XXII (1968), 399—407.

Glick P. C. American families. New York, John Wiley & Sons, 1957.

Glick P. C., Heer D. H. and Beresford J. C. Family formation and family composition: trends and prospects. In M. B. Sussman (ed.). *Sourcebook in marriage and the family.* Boston, Houghton Mifflin, 1968, p. 38.

Gompertz B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality. *Philosophical transactions of the Royal society of London* (1825).

Goodman L. A. Population growth of the sexes. *Biometrics,* IX (1953), 212—225.

Goodman L. A. Statistical methods for the mover-slayer model. *Journal of the american statistical association,* LVI (1961), 841—868.

Goodman L. A. Stochastic models for the population growth of the sexes. Unpublished ms., 1968.

Goodman L. A. An elementary approach to the population projection matrix, to the population reproductive value, and to related topics in the theory of population growth. *Demography,* V (1968), 382—409.

Hajnal J. Births, marriages and reproductivity, England and Wales, 1938—47. *Reports and selected papers of the statistics committee of the Royal commission on population.* London, H. M. stationery office, 1950, II, 307—344.

Haldane J. B. S. A mathematical theory of natural and artificial selection. *Proceedings of the Cambridge philosophical society,* XXIII (1927), 607—615.

Hammersley J. M. and Handscomb D. C. Monte Carlo methods. New York, John Wiley & Sons, 1964.

Harris T. E. The theory of branching processes. Englewood Cliffs, N. Y., Prentice-Hall, 1963.

Henry L. Fécondité des mariages; nouvelle méthode de mesure. Paris, Institut national d'etudes démographiques, 1952.

Henry L. Fondements théoriques des mesures de la fécondité naturelle. *Revue de l'institut international de statistique,* XXI (1953), 135—151.

Henry L. Fécondité et famille, modèles mathématiques. *Population,* 12e année (1957), 413—444.

Henry L. Fécondité et famille II. *Population,* 16e année (1961a, 1961b), 27—48, 261—282.

Henry L. Perspectives démographiques. *Cours donné à l'institut de démographie de l'université de Paris.* Paris, Editions de l'institut national d'etudes démographiques, 1964.

Henry L. French statistical research in natural fertility. In *M. C. Sheps and J. C. Ridley (eds.) Public health and population change.* Pittsburgh, university of Pittsburgh press, 1965, p. 333—350.

Hodge R. W. Occupational mobility as a probability process. *Demography,* III (1966), 19—34.

Hodge R. W., Siegel P. and Rossi P. Occupational prestige in the United States. *American journal of sociology,* LXX (1964), 286—302.

Hoem, Jan M. Fertility rates and reproduction rates in a probabilistic setting. To appear in *Biometrie-praximetrie,* 1969 (1968a).

Hoem, Jan M. A probabilistic model for primary marital fertility: (1968b). To appear in the *Yearbook of population research in Finland,* 1968—69.

Hoem, Jan M. Four demographic papers. *Working papers from the central bureau of statistics of Norway, Oslo,* 1968 c.

Horvitz D. G. et al. Microsimulation of vital events in a large population. *Paper presented at meeting of population association of America.* Cincinnati, 1967.

Hyrenius H. La mesure de la réproduction et de l'accroissement naturel. *Population,* 3e année (1948), 271—292.

Hyrenius H. and Adolfsson I. A fertility simulation model. Goteborg, Sweden, *University of Goteborg, demographic institute reports* no. 2, 1964.

Hyrenius H., Adolffson I. and Holmberg I. Demographic models. Second report (DM 2). Goteborg, Sweden, *University of Goteborg, Demographic institute reports* no. 4, 1966.

Hyrenius H. H. Olmberg I. and Carlsson M. Demographic models. (DM 3). Goteborg, Sweden, *University of Goteborg, Demographic institute reports,* no 5, 1967.

Jacquard A. La réproduction humaine en régime malthusien, un modèle de simulation par la méthode de Monte-Carlo. *Population,* 22e année (1967), 897—920.

Jacquard A. Liaison génètique entre individus apparentés. *Population,* 23e année (1968), 93—128.

Jacquard A. Evolution des populations d'effectif limité. *Population,* 23e année (1968), 279—300.

Jacquard A. and Reyness F. Mesure démographique du fardeau génètique.. *Population,* 23e année (1968), 625—648.

Jagers Peter. Five contributions to the mathematical study of populations. *Acta universitatis Gothoburgiensis,* (1968). Ph. D. dissertation, faculty of science, university of Gotebórg, 1968.

Jagers Peter. A general stochastic model for population development. *Skandinavisk aktuarietidskrift* (1969).

Jagers Peter. The proportions of individuals of different kinds in two-type populations. A brunching process problem arising in biology. *Journal of applied probability* (1969), to appear.

Jain Anrudh. Fecundability, age, and education. Unpublished ms., 1969.

Karlin S. A first course in stochastic processes. New York, Academic press, 1966.

Karmel P. H. An analysis of the sources and magnitudes of inconsistencies between male and female net reproduction rates in actual populations. *Population studies,* II (1948), 240—273.

Kendall D. G. Stochastic processes and population growth. *Journal of the Royal statistical society.* B, XI (1949), 230—264.

Keyfitz N. Introduction to the mathematics of population. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968.

Keyfitz N. and Flieger W. World population: An analysis of vital data. Chicago, university of Chicago press, 1968.

Keyfitz N., Nagnur D. and Sharma D. On the interpretation of age distributions. *Journal of the American statistical association*, LXII (1967), 862—874.

Kirk Didley. Patterns of survival and reproduction in the United States: implications for selection. *Proceedings of the National academy of sciences*, LIX (1968), 662—670.

Lachenbruch P. A. Frequency and timing of intercourse: its relation to the probability of conception. Draft ms. mimeographed, 1967.

Land K. C. Duration of residence and prospective migration: further evidence. *Paper presented at Annual meeting of the population association of America*, Boston, 1968. To appear in *Demography*, VI (1969).

LeBras H. Mortalité de crise. Unpublished ms., Institut national d'etudes démographiques, 1969.

Ledermann S. Nouvelles tables de mortalité. Paris, Institut national d'etudes démographiques, 1969.

Leibenstein H. Economic backwardness and economic growth. New York, John Wiley & Sons, 1963.

Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*, XXXIII (1945), 183—212.

Leslie P. H. and Gower J. C. The properties of a stochastic model for two competing species. *Biomertika*, XLV (1958), 316—330.

Lewontin R. C. Selection for colonizing ability, in *H. Baker (ed), The genetics of colonizing species*, New York, Academic press, 1965, 77—94.

Livi-Bacci M. and associates of the Istituto di Statistica. University of Florence. Tavole di fecondita dei matrimoni per l'Italia 1930—1965. Florence, Scuola di statistica dell'universita, 1968.

Lopez Alvaro. Problems in stable population theory. Princeton, office of population research, 1961.

Lopez Alvaro. Asymptotic properties of a human age distribution under a continuons net maternity function. *Paper delivered at annual meeting of population association of America*, 1967.

Lotka A. J. The stability of the normal age distribution. *Proceedings of the National academy of sciences*, VIII (1922), 339—345.

Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore, Williams & Wilkins, 1925. (Dover publications, 1956).

Lotka A. J. Orphanhood in relation to demographic factors. *Metron*, IX (1931), 37—109.

Lotka A. J. Théorie analytique des associations biologiques. Part II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine (*Actualités scientifiques et industrielles, no. 780)*, Paris, Hermann & Cie., 1939.

Makeham W. M. On the law of mortality. *Journal of the institute of actuaries*, XIII (1860), 325—358.

Malécot G. Probabilités et héredité. Paris, Presses universitaires de France, 1966.

Matras J. Differential fertility, intergenerational occupational mobility, and change in occupational distribution: some elementary interrelationships. *Population studies*, XV (1960), 163—169.

Matras J. Social mobility and social structure: some insights from the linear model. *American sociological review*, XXXII (1967).

Matras J. Mobility, marriage and natural increase: a further variant on the linear model. *Cornell conference on human mobility*, Ithaca, N. Y., 1968.

Murthy E. M. A generalization of stable population techniques. Unpublished Ph. D. dissertation, Department of sociology, university of Chicago, 1965.

McGinnis R. A simulation approach to stochastic mobility processes. *Proceedings on simulation in business and public health. First annual conferènce of american statistical association* (New York area chapter) *and public health association of New York City*, 1966, 168—174.

McGinnis R. A stochastic model of social mobility. *American sociological review*, XXXIII (1968), 712—749.

Naylor T. H. Computer simulation models for designing and evaluating alternative population planning policies. *Proceedings of the american cybernetic society* (1969).

Naylor T. H., Balintfy J. L., Burdick D. S. and Kong Chu. Computer simulation techniques. New York, John Wiley & Sons, 1966.

Nelson R. R. A theory of the low-level equilibrium trap in underdeveloped economies. *American economic review*, XLVI (1956), 894—908.

Notenstein F., Taeuber I. B., Kirk D., Coale A. J. and Kiser L. K. The future population of Europe and the Soviet Union. Geneva, League of Nations, 1944.

Park T. Experimental studies of interspecies competition. I. competition between populations of the flour beetles tribolium confusum duval and tribolium castaneum herbst. *Ecological monographs*, XVIII (1948), 265—308.

Parke R. and Glick P. C. Prospective changes in marriage and the family. *Journal of marriage and the family*, XXIX (1967), 249—256.

Orcutt G. H. et. al. Microanalysis of socioeconomic systems, A simulation study, New York, Harper & Row, 1961.

Peacock A. T. Theory of population and modern economic analysis. *Population studies*, VI (1952), 114—122 and VII (1954), 227—234.

Perrin E. B. and Sheps M. Human reproduction: a stochastic process. *Biometrics*, XX (1965), 28—45.

Pollard A. H. The measurement of reproductivity. *Journal of the institute of actuaries*, LXXIV (1948), 288—305.

Pollard J. H. On the use of the direet matrix product in analysing certain stochastic population models. *Biometrika*, LIII (1966), 397—415.

Potter R. G. and Parker M. P. Predicting the time required to conceive *Population studies*, XVIII (1964), 99—116.

Potter R. G. and Tietze C. The multiple decrement life table as an approach to the measurement of use effectiveness and demographic effectiveness of contraception. *Contributed papers*, Conference of the international union for the scientific study of population, Sydney, 1967, p. 869—838.

Potter R. G., Sakoda J. M. and Feinberg W. E. Variable fecundability and the timing of births. *Eugenics quarterly*, XV (1968), 155—163.

Prais S. J. Measuring social mobility. *Journal of the Royal statistical society*, A, CXVIII (1955).

Prais S. J. The formal theory of social mobility. *Population studies*, IX (1955).

Pressat R. L'analyse démographique. Paris, Presses universitaires de France, 1961.

Есть русский перевод с издания 1961 г.: Пресса Р. Народонаселение и его изучение (Демографический анализ). «Статистика», 1966.

Pressat R. Pratique re la démographie, Trente sujets d'analyse, Paris, Dunod, 1967.

Rhodes E. C. Population mathematics. I, II and III. *Journal of the Royal statistical society*, CIII (1940), 61—89, 218—245 and 362—387.

Rogers Andrei. Matrix analysis of interregional population growth and distribution. Berkeley, University of California press, 1968.

Royal commission on population. Report. Vol. VI. The trend and pattern of fertility in Great Britain. A report on the family census of 1946. London, H. M. stationery office, 1954.

Ryder N. B. Problems of trend determination during a transition in fertility. *Milbank memorial fund Quarterly*, XXXIV (1956), 5—21.

Ryder N. B. The structure and tempo of current fertility. Demographic and economic change in developed countries *(National bureau of economic research, special conference series*, no. 11), 117—136. Princeton, Princeton university press, 1960.

Ryder N. B. The process of demographic translation. *Demography*, I (1964), 74—82.

R y d e r N. B. The cohort as a concept in the study of social change. *American sociological review,* XXX (1965), 843—861.

R y d e r N. B. Cohort analysis. *International encyclopedia of the social sciences,* ed, David Sills, II (1968), 546—550.

S a u v y A. Théorie générale de la population. Vol. I. Economie et population. Vol. II. Biologie sociale. Paris, Presses universitaires de France, 1952, 1954.

S h a h B. V. and G i e s b r e c h t F. G. Mathematical models for changing marriage patterns. Research triangle institute, North Carolina, 1969. (Unpublished ms.)

S h a r p e F. R. and L o t k a A. J. A problem in age-distribution. *Philosophical magazine,* series 6, XXI (1911), 435—438.

S h e p s M. C. Effects on family size and sex ratio of preferences regarding the sex of children. *Population studies,* XVII (1963), 66—72.

S h e p s M. C. and R i d l e y J. C. Studying determinants of natality; Quantitative estimation through a simulation model. *Proceedings of world population conference,* 1965, III, 265. New York, United Nations, 1967.

S i n g h S. N. Probability models for the variation in the number of births per couple. *Journal of the american statistical association,* LVIII (1963), 721—727.

S i n g h S. N. A chance-mechanism of variation in number of births per couple. *Journal of the american statistical association,* LXIII (1968).

S l o b o d k i n L. B. Growth and regulation of animal populations. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1961.

S p i e g e l m a n M. Introduction to demography. 2nd ed. Cambridge, Harvard university press, 1968.

S t o n e R. A model of the educational system. *Minerva,* III (1965), 172—186.

S y k e s Z. M. Some stochastic versions of the matrix model for population dynamics. *Journal of the american statistical association,* LXIV (1969).

S y k e s Z. M. On discrete stable population theory. *Biometrics,* XXV (1969).

S z i l a r d L. On the nature of the aging process. *Proceedings of the national academy of sciences,* XLV (1959), 30.

T a b a h L e o n. Representations matricielles de perspectives de population active. *Population,* 23ᵉ année (1968), 437—468.

T i e t z e C. Pregnancy rates and birth rates. *Population studies,* XVI (1962), 31—37.

U n i t e d N a t i o n s. Age and sex patterns of mortality. Model life tables for underdeveloped countries. New York, 1955.

V o l t e r r a V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei,* anno CCCXXIII, II (1926), 1—110.

W h e l p t o n P. K. An empirical method of calculating future population. *Journal of the american statistical association,* XXXI (1936), 457—473.

W h e l p t o n P. K. Cohort fertility: native white women in the United States. Princeton, N. J., Princeton university press, 1954.

W i c k s e l l S. D. Nuptiality, fertility and reproductivity. *Skandinavisk aktuarietidskrift* (1931), 125—157.

Леон Таба

ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ, ПЛОДОВИТОСТЬЮ, СМЕРТНОСТЬЮ И МИГРАЦИЕЙ. ВОСПРОИЗВОДСТВО И ОБНОВЛЕНИЕ НАСЕЛЕНИЯ *

Léon Tabah. Relationships between age structure, fertility, mortality and migration. Population replacement and renewal. *United Nations World Population Conference,* Belgrad, 1965. Background paper B. 7/15/E/476

1. Введение

Цель этого исследования состоит в том, чтобы, обратившись к основным понятиям демографии, исследовать соотношения, которые, как представляется, существуют между возрастной структурой населения и главными демографическими компонентами, а именно: плодовитостью, смертностью и миграцией. Предметом нашего исследования здесь будут не столько демографические переменные как таковые, сколько соотношения, которые могут быть установлены между ними.

Такой подход к проблеме вообще побудил демографов разработать методы для измерения возобновления и роста населения, подчиняющихся определенным режимам ** плодовитости, смертности и миграции и имеющих структуры, определяемые этими режимами. Поскольку мы следуем такому подходу, естественно рассмотреть эти методы измерения.

Мы начнем с рассмотрения теорий *экспоненциального* *** и *стабильного* населений, разработанных главным образом в трудах Альфреда Лотки более сорока лет назад и ставших предметом столь широкого обсуждения среди демографов, что создается впечатление, будто с тех пор не сказано ничего нового. Дело, однако, в том, что демография не похожа на философскую систему, которая берет несколько строго определенных понятий, вырабатывает на их основе целую теорию и, коль скоро это сделано, не оставляет места

* Обзорный доклад на Всемирной конференции по народонаселению. Белград, 1965. — *Прим. ред.*

** Автор пользуется здесь термином *закон* (law), имея в виду характер изменения данного процесса с изменением возраста людей. Предпочтительнее термины *порядок* или *режим* (смертности, плодовитости). — *Прим. ред.*

*** См. примечание редактора на с. 32.

для новых идей или развития. Демография, даже вырабатывая теоретические модели, стремится к непрерывному наблюдению фактов; она непрерывно продвигается вперед и всегда готова исправить или видоизменить свои теории. Подобно физике или химии она восприимчива к первым еще неопределенным понятиям и предварительным рабочим гипотезам и ожидает, что более строгие определения появятся лишь как результат новых исследований. Как мы увидим, никоим образом нельзя считать, что в этой области сказано последнее слово; еще вполне возможно и несомненно желательно расширять ее, вводя в анализ новые переменные и пытаясь тем самым еще больше приблизить теоретические построения к действительности. Как и во всех социальных науках, модели здесь просты только в нашем воображении, а действительность всегда более сложна, чем ее образы, которые мы создаем для собственного употребления.

Другая причина того, что мы подходим к нашему предмету через теории Лотки и будем опираться на них в некоторых построениях, состоит в том, что в этих абстрактных моделях заинтересована демография в развивающихся странах. В последние годы в этой области опубликовано довольно много работ. Они могут быть разделены на две категории: те, которые касаются чисто теоретических сторон вопроса, и те, которые посвящены применению теории к изучению населения тех стран, где плодовитость еще высока. Мы будем иметь дело с первой категорией работ и ограничим поле зрения методологическими аспектами исследований.

Построение экспоненциального или стабильного населений предполагает, как мы увидим, что порядок дожития, с одной стороны, и коэффициент рождаемости или режим плодовитости — с другой, остаются постоянными во времени. К этим гипотезам следует добавить еще две, обычно принимаемые для многих моделей:

а) население замкнуто: изменения в общей его численности происходят только в результате рождений и смертей и всякая миграция отсутствует; индивидуум может выйти из населения только в случае смерти, а общая численность населения увеличивается только благодаря рождению детей у индивидуумов, составляющих население;

б) формулы относятся только к одному полу (скажем, женскому), и предполагается, что все, относящееся к другому полу, сразу же приспосабливается так, что не возникает никаких противоречий в распределении между двумя полами по мере роста населения. Предполагается, в частности, что длительное время остаются одинаковыми коэффициенты воспроизводства и коэффициенты прироста для двух полов.

Мы начнем с того, что откажемся от гипотезы, согласно которой режимы дожития и плодовитости остаются постоянными во времени. Это приведет нас к изучению *квазистабильных* населений, т. е. таких, которые характеризуются снижением смертности по сравнению со стабильным положением, и затем населений *в процессе перехода,* т. е. таких, в которых вслед за снижением смертности происходит снижение плодовитости так, что две кривые имеют тенденцию к сближению; или же, в более общем виде, населений, которые, по сравнению с начальным стабильным состоянием, переходят в состояние, когда плодовитость и смертность подвержены того или иного рода изменениям.

Затем мы увидим, что построение моделей, относящихся только к одному полу, связано с серьезными теоретическими трудностями, которые демографы традиционно именуют «противоречием между мужскими и женскими мерами воспроизводства». Попытки разрешить это противоречие вызвали целый ряд проектов, заключавшихся в том, что в модель Лотки вводили переменные иные, чем возраст матери, в частности переменные, связанные с брачностью или с временными интервалами между различными событиями в процессе образования семьи. В то же время как естественное следствие таких попыток возникла тенденция заменить поперечный анализ продольным анализом; вместо измерения воспроизводства в определенный момент времени в группе женщин различных возрастов, т. е. в группе, [демографическое] поведение членов которой в прошлом могло быть весьма разнообразным, внимание исследователей стало все больше концентрироваться на когортах или поколениях, т. е. на группах женщин, переживших некоторое демографическое событие (например, рождение ребенка или замужество) в определенном году или в периоде, охватывающем несколько лет.

Наконец, мы откажемся от гипотезы, что население замкнуто, и рассмотрим исследования, проведенные с тем, чтобы измерить возобновление населений, подверженных внешней миграции или влиянию, оказываемому внутренней миграцией на распределение населения между различными географическими областями.

Все эти исследования выполнялись традиционными математическими методами, такими, как дифференциальные уравнения или матричное исчисление. Закончим мы кратким обзором последних попыток применить к традиционной демографической теории методы исследования стохастических процессов.

Принимая во внимание масштабы темы и неизбежную ограниченность объема изложения, мы просим снисхождения у читателей за сжатую форму этого доклада. Мы не можем, конечно, считать исчерпывающим описание и анализ многочисленных исследований в этой области: мы рассмотрели только те из них, которые были доступны нам, и те, которые мы сочли более представительными.

2. Модели, не включающие функции возраста

Две хорошо известные модели такого типа — это экспоненциальные населения и логистические населения.

2.1. Экспоненциальные населения

Это населения, у которых коэффициент прироста остается постоянным во времени. Если через $N(t)$ обозначить общую численность населения в момент времени t и через r — коэффициент прироста, то $N(t) = N(0)e^{rt}$. Если $r > 0$ или $r < 0$, то население увеличивается или уменьшается согласно экспоненциальному закону Мальтуса. Если $r = 0$, то общая численность населения остается постоянной.

При населениях такого типа о возрастной структуре, коэффициентах рождаемости или коэффициентах смертности ничего не известно; очевидно, они могут варьировать во времени. Но никакой зависимости между этими различными факторами установлено быть не может.

2.2. *Логистические населения*

Согласно Мальтусу население увеличивается в геометрической прогрессии под действием внутренних сил распространения. Если $N(t)$ есть население в момент t, и r — некоторый параметр, то прирост за интервал времени dt составляет $rN(t)dt$, если только на этот процесс не действуют какие-либо препятствия. Это население экспоненциального типа. Бельгийский статистик Адольф Кетле[1] в 1835 г. и воодушевленный Кетле бельгийский математик Петер Ферхюльст[2] в 1838 г. попытались выразить аналитически возможную интенсивность сил, сдерживающих процесс роста населения, которые предвидел Мальтус. Так называемая *логистическая* функция, предложенная этими авторами для того, чтобы выразить изменения в населении, была вновь рассмотрена около 1920 г. Раймондом Пирлом и Ловеллом Ридом[3], применившим ее к биологическим, и в 1930 г. Саймоном Кузнецом[4], применившим ее к экономическим процессам.

Согласно Кетле экспоненциальное развитие населения сдерживается силой, интенсивность которой пропорциональна квадрату численности населения *. Если k — некоторый параметр, то формула, выражающая увеличение населения во времени, есть

$$dN(t) = rN(t)\,dt - kN^2(t)\,dt.$$

---

[1] Quételet A. Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale. Paris, 1835, t. I, II.

Есть русский перевод с издания 1869 г. Кэтлэ А. Социальная физика, или опыт исследования о развитии человеческих способностей. Т. 1, Киев, 1911; т. 2, Киев, 1913.

[2] Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et phisique publiée par A. Quételet,* vol. XVIII, Bruxelles, 1838; Verhulst P. F. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles,* t. XX, Bruxelles, 1847.

[3] Pearl R. and Reld L. J. On the mathematical theory of population growth. *Metron,* vol. III, 1923, p. 6—19.

[4] Kuznets S. Secular movements in production and prices, 1930.

* Кетле сформулировал это положение следующим образом: «Население имеет тенденцию увеличиваться в геометрической прогрессии. Сопротивление или сумма препятствий его увеличению, при прочих равных условиях, действует как квадрат скорости, с какой население имеет тенденцию расти». (A. Quételet. Op. cit.) — *Прим. ред.*

Интегрируя это дифференциальное уравнение, мы получаем

$$N(t) = \frac{K}{1+e^{\alpha - rt}}, \quad \text{где } K = \frac{r}{k} \text{ и}$$

α — постоянная интегрирования.

Кривая, соответствующая этому уравнению, принимает форму вытянутого S. Она начинается от $-\infty$ на оси абсцисс, которая служит асимптотой, поднимается вверх до точки 1, представляющей собой как центр симметрии, так и точку перегиба, затем продолжает подниматься, приближаясь асимптотически к ординате K. Она выпуклая до точки 1 и вогнутая после нее. В точке 1 коэффициент прироста максимальный.

Существуют различные методы приближения эмпирических рядов точек логистической кривой. Наиболее известен метод «отобранных точек» Юла (Jule): рассматриваются три равноотстоящие точки, и таким образом мы получаем три уравнения, из которых могут быть опрсделены три параметра кривой.

Логистическую функцию ввиду ее симметричности нелегко применить к эмпирическим данным. Сделать ее более пригодной для выравнивания данных наблюдения пытались различными методами; предполагая, что логистическую форму кривая приобретает только после того, как население достигнет определенной общей численности; предполагая, по Пирлу и Риду[5], что показатель степени в знаменателе есть многочлен от t; предполагая, что она есть не $N(t)$, а $\log N(t)$, подчиняющийся логистическому закону; или же подбирая к эмпирическим данным ряд дуг логистической кривой, как это сделал Кузнец[6], пытаясь систематизировать циклические колебания цен.

Что касается применения этой функции к демографическим процессам, то логистическая кривая часто применяется для перспективных исчислений населения. Однако следует полагать, что этот метод менее удовлетворителен, чем так называемый *метод компонентов*, который заключается в получении численности населения по полу и по возрасту на основании некоторых гипотез об изменении во времени плодовитости и смертности, а не в экстраполяции общей численности населения, как это делается при логистическом методе. Лотка[7] показал теоретически, как получить возрастную структуру, число рождений и число смертей в населении, относительно которого были сделаны следующие два предположения: что его общая численность изменяется по логистическому закону и что функция дожития независима от времени. Однако такой расчет очень сложен, а гипотеза неизменности смертности в значительной мере лишает эту модель практической ценности. Это приводит нас к изучению населения, подверженного определенному порядку вымирания.

---

[5] Pearl R. and Reed L. J. Op. cit.

[6] Kuznets S. Op. cit.

[7] Lotka A. J. Théorie analytique des associations biologiques. Part II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris, 1939.

3. Населения, порядок дожития и возрастная структура которых неизменны. Экспоненциальные населения

Лотка изложил свою теорию полностью в работе, которая появилась в 1939 г.[8] и стала классической. В этой работе можно выделить три типа населений: те, что Лотка именует *экспоненциальными* населениями *, *логистические* населения, только что рассмотренные нами, и, наконец, *стабильные* населения. Рассмотрим сейчас первый из этих типов.

3.1. Свойства экспоненциальных населений

Свойства экспоненциальных населений рассматриваются на основе двух гипотез: что $c(x)dx$ — доля индивидуумов в возрасте между x и $x+dx$ и что $p(x)$ — вероятность дожития в возрасте x — постоянные. На основании этих гипотез можно вывести два важных свойства:

1-е свойство: коэффициенты рождаемости b, коэффициенты смертности d и коэффициенты прироста r — постоянные. Это свойство можно легко вывести из принятой гипотезы: b есть постоянная, потому что $c(0)=b$. То же самое относится к d, которое есть просто среднее значение возрастных коэффициентов смертности, взвешенных долями $c(x)$. Коэффициент прироста также есть постоянная, потому что $r=b-d$. Именно потому, что r есть постоянная, такие населения называются экспоненциальными;

2-е свойство. Между возрастной структурой, коэффициентом рождаемости, коэффициентом прироста и порядком дожития существует следующее соотношение:

$$c(x) = b\mathrm{e}^{-rx} p(x). \tag{1}$$

Рассмотрим выражение

$$c(x)\,dx = \frac{B(t-x)\,p(x)}{N(t)}\,dx,$$

где $B(t-x)$ — число рождений за время $t-x$; $N(t)$ — общая численность населения в момент t. Применяя это равенство для описания того факта, что $B(t-x)$ и $N(t)$ подчиняются экспоненциальным законам с одинаковым коэффициентом прироста, как мы видели в первом свойстве, мы придем к уравнению (1). Отсюда легко установить, что

$$b = \frac{1}{\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-rx} p(x)\,dx}, \tag{2}$$

---

[8] Lotka A. J. Op. cit.

* А. Лотка, а вслед за ним автор, употребляет термин *мальтузианские населения,* имея в виду их свойство (см. 1-е свойство) увеличиваться в геометрической прогрессии, т. е. расти, сохраняя неизменный коэффициент прироста. Поскольку в нашей литературе этот термин не применяется и имел бы несколько иную смысловую окраску, более уместно называть такие населения *экспоненциальными.* Следует, однако, иметь в виду, что в данном случае свойство экспоненциальности, в отличие от упомянутого автором ранее (с. 29), выводится на основании гипотез о неизменности возрастной структуры и возрастной смертности. — *Прим. ред.*

по той простой причине, что сумма $c(x)$ по всем возрастам в формуле (1) равна единице.

Таковы два основных свойства экспоненциальных населений. Их следует помнить, поскольку мы встретимся с ними во многих других моделях, представляющих собой просто обобщение этой модели путем введения новых переменных.

Частный случай, в котором $r=0$ и, следовательно, $b=d$, приводит к так называемым *стационарным* населениям. Формулы (1) и (2) показывают, что в таких населениях численность лиц в каждом возрасте пропорциональна числу доживающих в том же возрасте, которое дает таблица смертности. Кроме того, $b=d=\frac{1}{e_0}$, где e_0 есть ожидаемая продолжительность жизни при рождении (expectation of life at birth), определяемая как $e_0=\int_0^\infty p(x)dx$.

Лотка исследовал семейства экспоненциальных населений, имеющих одинаковый порядок дожития $p_0(x)$. Если коэффициент прироста меняется, то средний возраст $\bar{x}$ тоже меняется, но в направлении, противоположном изменению r. Достаточно вычислить производную от $\bar{x}$ по r, чтобы увидеть, что для $r>0$ эта производная всегда отрицательна.

Таким образом, из двух экспоненциальных населений с одинаковыми режимами смертности, но с разными коэффициентами прироста население с более высоким коэффициентом прироста, а потому, по всей вероятности, и с более высоким коэффициентом рождаемости будет иметь более низкий средний возраст. Здесь мы можем видеть, почему считается, что высокие коэффициенты рождаемости связаны с молодыми возрастными структурами; позже мы снова встретим это положение, выраженное в более определенной форме.

Если, далее, мы рассмотрим семейство экспоненциальных населений, имеющих один и тот же порядок дожития, $p_0(x)$, но разные коэффициенты прироста r, то увидим, что доля лиц данного возраста x_0 достигает максимума при некотором конкретном значении коэффициента прироста, равном r_M. Экспоненциальное население, соответствующее этому значению r_M, обладает примечательным свойством: его средний возраст равен x_0.

Этот результат можно получить из следующего соотношения:

$$\frac{dc(x)}{dr}=c(x)\,(\bar{x}-x).$$

Подобным же образом в этом семействе экспоненциальных населений, имеющем порядок дожития $p_0(x)$, общий коэффициент смертности достигает минимума при значении коэффициента прироста, равном r_m. Экспоненциальное население, соответствующее r_m, обладает следующим свойством: общий коэффициент рождаемости равен величине, обратной среднему возрасту:

$$b=\frac{1}{\bar{x}}.$$

3.2. Обобщение модели

Теоретическая модель экспоненциального населения, которую мы только что рассмотрели, была построена Лоткой в предположении о неизменности во времени двух функций, $c(x)$ и $p(x)$. Варьируя $c(x)$ и $p(x)$, мы получаем семейство всех возможных экспоненциальных населений.

Очевидно, могут быть построены другие модели населения на иных гипотезах, а именно:

$c(x)$ и r постоянны;

$c(x)$ и d постоянны;

$c(x)$ постоянна, и $B(t)$ — экспоненциальная функция времени;

$c(x)$ и $d(x)$ постоянны (причем $d(x)$ — функция распределения смертей по возрасту);

$p(x)$ и $d(x)$ постоянны.

Это показывает, что для каждой из перечисленных пар гипотез мы получаем семейство экспоненциальных населений. Тем самым понятие экспоненциального населения, введенное Лоткой, может быть обобщено следующим образом: *экспоненциальное население есть население, к которому применяется одна из приведенных выше пар гипотез*. Приведенный здесь перечень нельзя считать исчерпывающим; несомненно, можно найти другие пары гипотез, согласующиеся с этим определением.

3.3. Стабильные экспоненциальные населения

Вернемся опять к первому определению: $c(x)$ и $p(x)$ постоянны. Принимая функцию дожития $p_0(x)$, мы выделяем из множества всех возможных экспоненциальных населений подмножество, соответствующее функции $p_0(x)$. Чтобы определить внутри этого подмножества конкретное экспоненциальное население, мы должны принять какое-либо дополнительное условие, например, относительно r_0 или b_0, или d_0. Возьмем конкретный случай: принимая функцию плодовитости $\varphi_0(x)$ для женщин возраста x, мы определяем стабильное население, соответствующее функции $p_0(x)$.

Мы можем написать:

$$b = \int_0^\infty c(x)\,\varphi_0(x)\,dx$$

и, принимая во внимание соотношение (1),

$$\int_0^\infty e^{-rx} p_0(x)\,\varphi_0(x)\,dx = 1.$$

Это равенство для r имеет лишь один корень ρ. Соответствующее экспоненциальное население есть стабильное население, соответствующее функции $p_0(x)$. Ясно, что есть только одно такое население. Оно определяется, если известны две функции:

$$p_0(x) \text{ и } \varphi_0(x).$$

3.4. Построение экспоненциального населения

Для того чтобы построить экспоненциальные населения, которые соответствуют теоретической модели, рассмотренной Лоткой, необходимо знать по крайней мере две функции или два параметра, из которых с помощью равенств (1) и (2) могут быть получены другие функции или параметры. Например, необходимо знать $c(x)$ и $p(x)$ или $c(x)$ и r, или $c(x)$ и d, или $p(x)$ и r, или $p(x)$ и b, или $p(x)$ и d. С другой стороны, недостаточно знать три коэффициента b, d и r или два из этих коэффициентов (что то же самое, поскольку $b-d=r$), или $c(x)$ и b (что равносильно знанию только возрастной структуры, поскольку $c(0)=b$).

Мы можем построить эти модели населения, применив обычные приемы численного интегрирования, посредством формул (1) и (2); имея кумулянты функции $p(x)$, можно также воспользоваться, как мы сейчас увидим, приближенными формулами.

Равенство (2) можно записать в виде:

$$b = \frac{1}{e_0}\, e^{-K(-r)} = \frac{e^{\frac{k_1 r}{1!} - \frac{k_2 r^2}{2!} + \frac{k_3 r^3}{3!} - \ldots}}{e_0}, \tag{3}$$

где $K(-r)$ — производящая функция кумулянтов $\frac{p(x)}{e_0}$, которая записывается:

$$K(-r) = \log \int_0^\infty e^{-rx}\, p(x)\, dx - \log e_0.$$

Пользуясь равенством (3), мы можем вычислить коэффициент рождаемости на основании порядка дожития и коэффициента прироста.

Подобным же образом мы можем получить коэффициент смертности на основании $p(x)$ и r, имея равенство (3) и учитывая, что $r=b-d$. Далее, мы можем получить коэффициент прироста на основании $p(x)$ и b, например пренебрегая в выражении для $K(-r)$ степенями r выше второй и решая относительно r уравнение второй степени (3). Находим, что

$$r = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 2k_2 \log b e_0}}{k_2}.$$

Кумулянты особенно удобно применять, когда мы хотим вычислить характеристики экспоненциальных населений, соответствующие определенной функции дожития. В этих условиях k_1, k_2, k_3 и т. д. одинаковы для всех населений. Их можно вычислить один раз и для всех моделей.

3.5. Система моделей экспоненциальных населений

Если имеется ряд модельных таблиц смертности, описывающих возможные вариации смертности в человеческом обществе, то ими

Таблица 1

КУМУЛЯНТЫ ОТ 1-го ДО 4-го ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ $\frac{p(x)}{e_0}$ МОДЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ ООН (мужчины)

e_0	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$
20	23,7704	305,54	3562,7	— 20562
22	24,6408	320,45	3639,8	— 31610
24	25,4807	334,75	3697,9	— 42657
26	26,2907	348,43	3738,2	— 53705
28	27,0713	361,52	3761,7	— 64752
30	27,8230	374,02	3769,5	— 75800
32	28,5464	385,95	3762,8	— 87702
34	29,2419	397,32	3742,7	— 99604
35	29,5794	402,79	3727,9	—105555
36	29,9101	408,13	3710,2	—111505
37	30,2342	413,34	3689,8	—117456
38	30,5516	418,42	3666,6	—123407
39	30,8625	423,36	3640,9	—129358
40	31,1668	428,18	3612,8	—135309
41	31,4648	432,86	3582,5	—140446
42	31,7564	437,42	3550,1	—145583
43	32,0416	441,85	3515,7	—150721
44	32,3207	446,16	3479,4	—155858
45	32,5936	450,35	3441,5	—160995
46	32,8604	454,42	3402,0	—166132
47	33,1212	458,37	3361,1	—171269
48	33,3759	462,20	3318,9	—176407
49	33,6248	465,91	3275,6	—181544
50	33,8679	469,51	3231,3	—186681
51	34,1052	473,00	3186,1	—190220
52	34,3368	476,37	3140,2	—193758
53	34,5627	479,64	3093 6	—197297
54	34,7831	482,79	3046,7	—200836
55	34,9980	485,84	2999,4	—204375
56	35,2074	488,78	2952,0	—207913
57	35,4115	491,62	2904,5	—211452
58	35,6102	494,36	2857,1	—214991
59	35,8038	496,99	2810,0	—218529
60	35,9921	499,53	2763,3	—222068
62	36,3536	504,31	2671,5	—253533
64	36,6961	508,70	2582,9	—284998
66	37,0173	512,73	2498,6	—316464
68	37,3206	516,40	2419,7	—347929
70	37,6026	519,73	2347,3	—379394

Таблица 2

КУМУЛЯНТЫ ОТ 1-го ДО 4-го ПОРЯДКОВ ФУНКЦИИ $\frac{p(x)}{e_0}$ МОДЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ ООН
(женщины)

e_0	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
20	24,0090	310,06	4234,0	— 24752
22	24,8755	324,41	4261,7	— 36581
24	25,7135	338,19	4273,6	— 48409
26	26,5234	351,43	4270,6	— 60238
28	27,3056	364,14	4253,6	— 72066
30	28,0606	376,31	4223,7	— 83895
32	28,7889	387,98	4181,7	— 96208
34	29,4909	399,14	4128,7	—108521
35	29,8322	404,54	4098,3	—114678
36	30,1670	409,82	4065,5	—120835
37	30,4955	414,98	4030,4	—126991
38	30,8178	420,02	3993,1	—133148
39	31,1338	424,95	3953,8	—139304
40	31,4436	429,76	3912,5	—145461
41	31,7473	434,45	3869,4	—150769
42	32,0449	439,04	3824,6	—156077
43	32,3366	443,52	3778,2	—161385
44	32,6222	447,88	3730,3	—166693
45	32,9020	452,14	3681,1	—172001
46	33,1759	456,29	3630,6	—177309
47	33,4441	460,34	3579,0	—182617
48	33,7065	464,29	3526,4	—187925
49	33,9632	468,14	3473,0	—193203
50	34,2144	471,89	3418,8	—198541
51	34,4600	475,53	3363,9	—204237
52	34,7001	479,08	3308,5	—209933
53	34,9347	482,54	3252,7	—215629
54	35,1639	485,91	3196,6	—221325
55	35,3879	489,18	3140,6	—227021
56	35,6065	492,36	3084,0	—232716
57	35,8199	495,45	3027,8	—238412
58	36,0281	498,45	2917,7	—244108
59	36,2313	501,37	2916,0	—249804
60	36,4294	504,20	2860,6	—255500
62	36,8107	509,62	2751,7	—259026
64	37,1724	514,71	2645,8	—262551
66	37,5151	519,50	2544,0	—266077
68	37,8391	523,99	2447,2	—269602
70	38,1450	528,20	2356,3	—273128

можно воспользоваться для построения системы моделей экспоненциальных населений. Было бы полезным для этой цели показывать в таблицах смертности, кроме обычных биометрических функций (функции дожития, возрастного распределения смертей, ожидаемой продолжительности жизни в разных возрастах и т. д.), такие важные характеристики функции дожития, как кумулянты $\frac{p(x)}{e_0}$.
В качестве иллюстрации читатель найдет в табл. 1 и 2 кумулянты

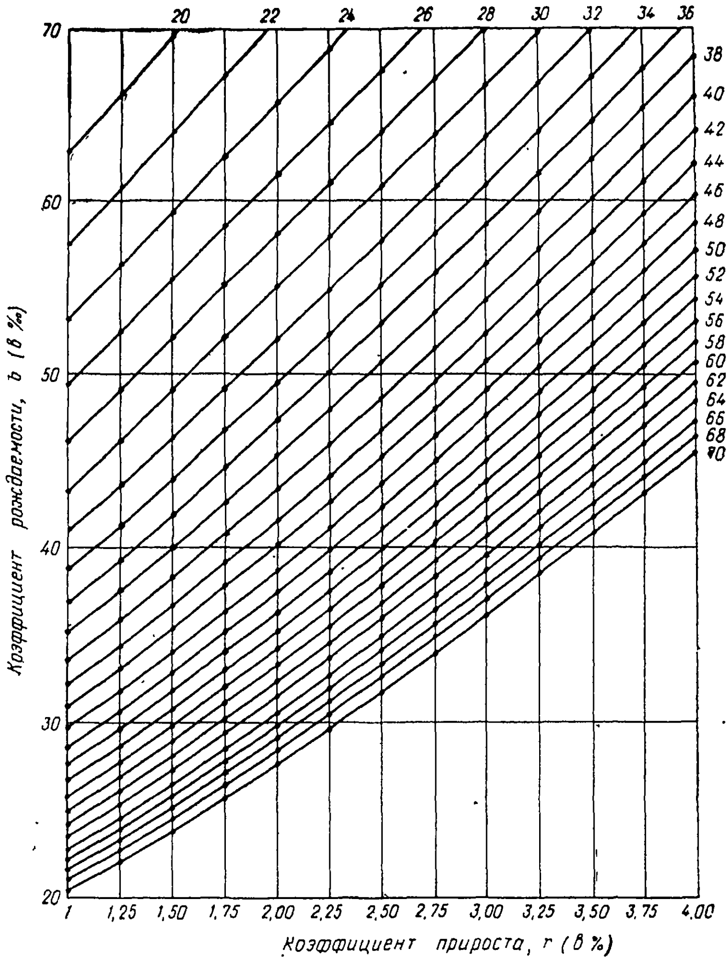

Рис. 1. Коэффициенты рождаемости (b) экспоненциальных населений (женщины), соответствующие разным коэффициентам прироста (r) и разным значениям ожидаемой продолжительности жизни при рождении (e_0) из модельных таблиц смертности ООН. Косые линии соединяют значения b, соответствующие значениям e_0, указанным (в годах) в правом верхнем конце линии

от 1-го и до 4-го порядков для ряда модельных таблиц смертности, построенных в ООН[9]. Эти величины дают возможность легко вычислить коэффициенты рождаемости, коэффициенты смертности, коэффициенты прироста или средние значения возраста для экспоненциальных населений, возможных применительно к человеческим популяциям.

На основании приведенной формулы были вычислены коэффициенты рождаемости для системы экспоненциальных населений, соответствующей модельным таблицам смертности ООН (женский пол). На рис. 1 показано, как эти коэффициенты изменяются с изменением коэффициента прироста и ожидаемой продолжительности жизни при рождении. Как можно видеть, кривые, соответствующие одной и той же ожидаемой продолжительности жизни при рождении, представляют собой почти прямые линии; это очень облегчает интерполяцию между двумя точками.

В табл. 3 мы показали возрастные структуры экспоненциальных населений, отвечающие некоторым значениям коэффициента прироста и ожидаемой продолжительности жизни при рождении.

Таблица 3

СТРУКТУРА ЖЕНСКИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ (ОСНОВНЫЕ ВОЗРАСТНЫЕ ГРУППЫ В % К ОБЩЕЙ ЧИСЛЕННОСТИ) ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИРОСТА, r, И СМЕРТНОСТИ, ВЫРАЖЕННОЙ ПОКАЗАТЕЛЕМ ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ e_0

r / Возрастные группы	0	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
$e_0=30$ годам														
0—14	32,1	38,9	40,6	42,3	44,0	45,7	47,3	49,2	50,5	52,1	53,6	55,7	56,6	58,1
15—49	51,5	49,4	48,7	48,0	47,1	46,3	45,4	44,3	43,5	42,5	41,5	39,8	39,9	38,3
50—64	11,5	8,6	7,9	7,2	6,7	6,1	5,6	5,0	4,7	4,2	3,9	3,6	3,5	2,9
65+	4,9	3,1	2,8	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,8	0,7
$e_0=34$ годам														
0—14	30 2	37,0	38,7	40,4	42,2	43,8	45,5	47,2	48,8	50,4	52,0	53,6	55,1	56,5
15—49	51,1	49,6	49,0	48,4	47,6	46,9	46,0	45,1	44,2	43,3	42,3	41,3	40,3	39,3
50—64	12,7	9,5	8,8	8,1	7,5	6,9	6,3	5,8	5,3	4,8	4,4	4,0	3,6	3,3
65+	6,0	3,9	3,5	3,1	2,7	2,4	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9

[9] United Nations. Age and sex patterns of mortality. Model life-tables for under-developed countries. ST/SOA/Series A/22. (*Population Studies*, № 22), N. Y., 1955.

Продолжение

Возрастные группы \ r	0	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00
							$e_0=38$ годам							
0—14	28,5	35,3	37,0	38,8	40,5	42,2	43,9	45,6	47,3	48,9	50,5	52,1	53,7	55,2
15—49	50,7	49,7	49,2	48,6	48,0	47,3	46,5	45,7	44,9	44,0	43,0	42,1	41,1	40,1
50—64	13,7	10,4	9,6	8,9	8,2	7,5	7,0	6,4	5,8	5,3	4,9	4,4	4,0	3,7
65+	7,1	4,6	4,2	3,7	3,3	3,0	2,6	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
							$e_0=42$ годам							
0—14	26,9	33,8	35,5	37,3	39,0	40,7	42,5	44,2	45,9	47,6	49,2	50,8	52,4	54,0
15—49	50,1	49,6	49,2	48,7	48,2	47,6	46,9	46,1	45,3	44,5	43,6	42,7	41,7	40,7
50—64	14,6	11,1	10,4	9,6	8,9	8,2	7,5	7,0	6,4	5,8	5,3	4,9	4,4	4,0
65+	8,4	5,5	4,9	4,4	3,9	3,5	3,1	2,7	2,4	2,1	1,9	1,6	1,5	1,3
							$e_0=46$ годам							
0—14	25,6	32,5	34,2	36,0	37,7	39,5	41,2	43,0	44,7	46,4	48,1	49,7	51,3	52,9
15—49	49,6	49,4	49,2	48,8	48,3	47,8	47,1	46,4	45,7	44,9	44,0	43,2	42,2	41,3
50—64	15,3	11,8	11,0	10,2	9,5	8,7	8,1	7,4	6,8	6,3	5,7	5,2	4,8	4,3
65+	9,5	6,3	5,6	5,0	4,5	4,0	3,6	3,2	2,8	2,4	2,2	1,9	1,7	1,5
							$e_0=50$ годам							
0—14	24,5	31,3	33,0	34,8	36,6	38,3	40,1	41,8	43,6	45,3	47,0	48,7	50,3	51,9
15—49	48,9	49,2	49,0	48,7	48,3	47,9	47,3	46,7	46,0	45,2	44,4	43,5	42,7	41,7
50—64	15,9	12,4	11,6	10,8	10,0	9,3	8,6	7,9	7,2	6,7	6,1	5,6	5,1	4,7
65+	10,7	7,1	6,4	5,7	5,1	4,5	4,0	3,6	3,2	2,8	2,5	2,2	1,9	1,7
							$e_0=54$ годам							
0—14	23,5	30,2	32,0	33,8	35,5	37,3	39,1	40,9	42,6	44,4	46,1	47,8	49,4	51,1
15—49	48,3	49,0	48,8	48,6	48,3	47,9	47,4	46,8	46,2	45,5	44,7	43,9	43,0	42,1
50—64	16,4	18,9	12,1	11,2	10,5	9,7	9,0	8,3	7,6	7,0	6,4	5,9	5,4	4,9
65+	11,8	7,9	7,1	6,4	5,7	5,1	4,5	4,0	3,6	3,1	2,8	2,4	2,2	1,9
							$e_0=58$ годам							
0—14	22,6	29,3	31,1	32,8	34,6	36,4	38,2	40,0	41,8	43,5	45,3	46,9	48,6	50,3
15—49	47,7	48,7	48,6	48,5	48,3	47,9	47,5	46,9	46,4	45,7	44,9	44,2	43,3	42,5
50—64	16,8	13,3	12,5	11,6	10,8	10,1	9,3	8,6	7,9	7,3	6,7	6,2	5,7	5,1
65+	12,9	8,7	7,8	7,1	6,3	5,6	5,0	4,5	3,9	3,5	3,1	2,7	2,4	2,1

4. Асимптотически экспоненциальные населения по Лотке

4.1. Теоретическая модель

Особенность описанного ранее стабильного экспоненциального населения состоит в том, что его свойства наблюдаются, когда три функции $c(x)$, $p_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ становятся постоянными.

Предположим теперь, что снято условие, согласно которому $c(x)$ постоянно, и с определенного момента времени остаются постоянными лишь две функции: $p_0(x)$ и $\varphi_0(x)$. Таким образом, мы получим население, относительно процесса развития которого Лотка доказал следующую теорему: население, у которого возрастные функции плодовитости и смертности с определенного момента времени становятся постоянными, асимптотически приближается к стабильному экспоненциальному населению. Лотка сам пользовался термином *стабильное,* чтобы обозначить именно эти населения, поскольку в пределе их возрастная структура становится постоянной.

Доказательство основывается на следующем уравнении:

$$B(t)\,dt = \int_0^\infty B(t-x)\,\varphi_0(x)\,p_0(x)\,dx dt. \qquad (4)$$

В дальнейшем ради упрощения мы будем записывать функции $p(x)$ и $\varphi(x)$ без индекса.

Уравнение показывает, что число рождений в интервале времени t, $t+dt$ находится путем умножения числа рождений, происшедших в интервале $t-x$, $t-x+dt$, на порядок дожития $p(x)$ и на режим плодовитости $\varphi(x)$ и интегрирования произведения по x.

Лотка предположил, что в этом уравнении $B(t)$ может быть выражено как сумма показательных функций:

$$B(t) = Q_1 e^{r_1 t} + Q_2 e^{r_2 t} + \dots, \qquad (5)$$

где Q_1, Q_2, ... — коэффициенты, смысл которых будет объяснен позднее. Подстановка этого выражения для $B(t)$ в уравнение (4) приводит к уравнению:

$$\int_0^\infty e^{-r_n x}\,\varphi(x)\,p(x)\,dx = 1, \quad \text{где } n=1, 2, \dots \qquad (6)$$

Это уравнение имеет лишь один действительный корень ρ и бесконечное число комплексных корней вида $\rho_n = u_n + iv_n$. Поскольку практически значения величин u_n всегда меньше ρ, то колебания, которые комплексные корни вносят в число рождений, концентрируются вокруг непериодического члена $Q_\rho e^{\rho t}$, и амплитуда этих колебаний невелика. Когда колебания полностью затухают, число рождений подчиняется экспоненциальному закону; поскольку согласно принятой гипотезе порядок дожития постоянен, мы имеем население с экспоненциально возрастающим коэффициентом рождаемости и постоянным порядком дожития, следовательно, как мы видели, — экспоненциальное население. Оба указанных свойства этих населений начинают проявляться с момента, когда колебания чисел рождений окончательно затухают. Стабильное население фактически есть частный случай экспоненциального населения.

Как только достигнуто стабильное состояние, характеристики населения становятся зависимыми лишь от режимов плодовитости и смертности, преобладавших в течение переходного периода. В частности, население, как только его возрастная структура начинает соответствовать конечной стабильной структуре, «забывает» свою первоначальную структуру.

Ключ к проблеме, как мы только что видели, заключается в том, чтобы найти выражение для изменения числа рождений. Предполагалось, что население замкнуто, и поэтому, объединяя функцию рождаемости и функцию дожития, которые считаются известными, мы можем вычислить возрастное распределение и коэффициенты рождаемости и смертности для этого населения для любого данного времени.

Феллер[10] и Лопес[11] рассмотрели условия, при которых справедлива теорема Лотки, в частности, для того, чтобы получить сходимость, как коэффициент смертности, так и коэффициент рождаемости должны быть непрерывными функциями возраста. Лопес также воспроизвел доказательство Лотки, применив для этого теорию вероятностей для дискретных переменных, — подход, предложенный Феллером. Какой бы из двух методов — с дискретными или непрерывными переменными — ни применялся, цель остается той же: определить конечные характеристики населения, предполагая, что число рождений изменяется с возрастом в известном порядке, и изучая, как влияет это предположение на возрастную структуру, когда t стремится к бесконечности.

4.2. Обобщение модели

Точно так же как мы обобщили ранее понятие экспоненциального населения, определенное Лоткой, мы можем обобщить теперь и понятие асимптотически стабильного населения.

Можно показать, что в действительности население может достигнуть экспоненциального состояния весьма сходным образом, если принять множество предположений иных, чем были приняты Лоткой. Можно показать, что если порядок дожития $p(x)$ и коэффициент рождаемости с определенного момента постоянны, то в числе рождений, в числе смертей и общей численности населения будут наблюдаться колебания; все эти колебания будут постепенно затухать и концентрироваться около экспоненциальной и, следовательно, непериодической функции. Возрастная структура будет сама корректироваться до тех пор, пока она не совпадет со структурой, указываемой формулой (1). В течение переходного периода, т. е. в течение интервала времени, разделяющего момент, когда b и функция $p(x)$ стали постоянны, и момент, когда население достигает предельного экспоненциального состояния, коэффициент прироста и коэффициент смертности, получаемые из уравнения (2), и возрастная структура, указываемая равенством (1), есть *истинные* (*«intrinsic»*) * величины для данного населения. Они представляют собой

---

[10] Feller W. On the integral equation of renewal theory. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 12, 1941, p. 243 et seq.

[11] Lopez A. Problems in stable population theory. Princeton, N. Y., 1961.

* Точнее было бы «собственные», но мы сохраняем устоявшийся термин. — *Прим. ред.*

предельные величины, к которым стремится население, если b и $p(x)$ остаются постоянными в течение достаточно долгого времени.

Экспоненциальное состояние может также асимптотически достигаться на основе других гипотез, например, что постоянны $p(x)$ и r или что постоянны $p(x)$ и d. В этих случаях мы сталкиваемся с теми же процессами асимптотического приближения к состоянию, которое обнаруживает описанные нами выше свойства экспоненциальных населений.

Здесь снова перечень гипотез не исчерпывающий, и, безусловно, можно отыскать другие предположения, при которых становится возможным асимптотическое приближение к тому же состоянию.

Прежде чем продолжать, вспомним классификацию, принятую нами для разных определений моделей экспоненциального и стабильного населений:

а) экспоненциальные населения по Лотке:

$c(x)$ и $p(x)$ постоянны;

б) обобщение предыдущего: непосредственно экспоненциальные населения:

$c(x)$ и $p(x)$ постоянны,

$c(x)$ и d постоянны,

$c(x)$ постоянны и $B(t)$ — экспоненциальная функция времени;

$c(x)$ и $d(x)$ постоянны,

$p(x)$ и $d(x)$ постоянны и т. д.;

в) непосредственно экспоненциальные стабильные населения. Частный случай предыдущего, где неизменны $p_0(x)$ и $\varphi_0(x)$;

г) асимптотически стабильные населения по Лотке:

$p_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ постоянны;

д) обобщение предыдущих видов: асимптотически экспоненциальные населения:

$p(x)$ и $\varphi(x)$ постоянны,

$p(x)$ и b постоянны,

$p(x)$ и d постоянны,

$p(x)$ и r постоянны и т. д.

4.3. Свойства истинного коэффициента прироста

Коэффициент ρ, действительный корень уравнения (5), называется *истинным коэффициентом прироста*. Он обладает следующими двумя свойствами:

1. Не зависит от возрастной структуры, поскольку для того, чтобы вычислить его, мы должны найти истинный корень уравнения (6), содержащего лишь функции $\varphi(x)$ и $p(x)$. Способы его вычисления будут рассмотрены далее.

2. Измеряет прирост населения через число рождений и число смертей, начиная с того момента, в который достигнуто стабильное равновесное состояние. Следовательно, этот показатель есть асимптотическая величина, которая не наблюдается до тех пор, пока не достигнуто предельное состояние. То же относится и к возрастной структуре, коэффициенту рождаемости и коэффициенту смертности,

которые могут быть получены на основе уравнений (1) и (2) и могут быть поэтому названы *истинными* структурой и коэффициентами. Все эти характеристики могут быть вычислены для произвольного населения как стабильного, так и нестабильного при условии лишь, что известны две функции: $\varphi(x)$ и $p(x)$ — они могут быть теми, которые наблюдаются в данный момент — с целью охарактеризовать предельное состояние, которое будет достигнуто, если предположить, что эти две функции будут сохраняться постоянными неопределенно долго.

4.4. Другие выражения истинного прироста населения: брутто-коэффициент и нетто-коэффициент воспроизводства

Можно измерять прирост населения не только за единицу времени dt, как мы только что сделали, но и за промежуток времени, который Лотка назвал *средним интервалом между двумя поколениями.*

Два измерителя такого прироста — это брутто-коэффициент воспроизводства R' и нетто-коэффициент воспроизводства R, которые были определены Бёком (Boëckh) в 1884 г. и введены в научный обиход Кучинским[12].

Они определяются следующим образом:

$$R' = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx \quad \text{и} \quad R = \int_0^\infty \varphi(x)\,p(x)\,dx.$$

Первый получен путем суммирования повозрастных коэффициентов плодовитости. Таким образом он представляет собой коэффициент плодовитости модели населения, представляющей собой некоторое население неизменной численности, содержащее одинаковое число женщин в каждом возрасте, не подверженных никакому риску умереть с момента рождения до конца периода деторождения. Этот показатель можно назвать также средней женской плодовитостью в группе женщин, отвечающей указанным условиям. Нетто-коэффициент представляет собой среднее значение возрастного показателя плодовитости для населения, в котором число женщин в каждом возрасте соответствует таблице смертности для этого населения. Этот показатель также можно назвать средней женской плодовитостью в группе женщин, постоянно подверженных рассматриваемым режимам плодовитости и смертности.

Какая взаимосвязь существует между истинным коэффициентом прироста и показателями воспроизводства? Как мы увидим, эту взаимосвязь можно установить при помощи среднего интервала между двумя поколениями.

Для этого обозначим через $K'(-\rho)$ производящую функцию кумулянтов $\frac{\varphi(x)\,p(x)}{R}$, определяемую как

[12] Kuczynski R. Bericht über den XIV Internationalen Kongress für Hygiene und Demographie. Berlin, 1907, Band III, S 1472—1484.

$$K'(-\rho) = \log \int_0^\infty e^{-rx} p(x) \varphi(x)\, dx - \log R.$$

Тогда уравнение (6) записывается для действительного корня $r_n = \rho$ как

$$R = e^{-K'(-\rho)}. \quad (7)$$

Термином *средний интервал между двумя поколениями* Лотка обозначал выражение $T = -\frac{1}{\rho} K'(-\rho)$. Если это выражение подставить в предыдущее равенство, то мы найдем, что

$$R = e^{\rho T}. \quad (8)$$

Это показывает взаимосвязь между R и ρ.

Средний интервал между двумя поколениями имеет следующий смысл: это — время, необходимое для того, чтобы число рождений увеличилось в отношении, указываемом нетто-коэффициентом воспроизводства, при гипотезе, принятой нами ранее, т. е. при условии, что функции смертности и плодовитости остаются постоянными [13].

4.5. *Истинный коэффициент рождаемости.*

Этот показатель получают как отношение равенства (3) к равенству (7):

$$b = \frac{R}{e_0} e^{-K(-\rho) + K'(-\rho)}. \quad (9)$$

В качестве первого приближения имеем

$$b = \frac{R}{e_0}. \quad (10)$$

Таким образом, мы видим, как из нетто-коэффициента воспроизводства можно получить истинный показатель рождаемости, и наоборот. Эта формула весьма удобна, когда желательно приближенно оценить коэффициент рождаемости, не пользуясь при этом данными о числе рождений: достаточно вычислить R при помощи индекса Томпсона (Thompson) [14], для чего нужно знать лишь возраст-

---

[13] Чтобы показать это, достаточно представить R в виде отношения $B(t)$, числа рождений во время t, к числу рождений, которые произошли во время $t - \Theta$, а именно в виде: $R = \frac{B(t)}{B(t-\Theta)}$, где Θ — интервал времени, который надо определить. Так как рождения следуют экспоненциальной кривой, мы имеем

$$R = \frac{B_0 e^{\rho t}}{B_0 e^{\rho(t-\Theta)}} = e^{\rho\Theta}.$$

Сравнение с (8) дает $\Theta = T$ и, следовательно, $R = \frac{B(t)}{B(t-T)}$.

[14] Индекс Томпсона — это отношение числа девочек в возрасте от α_1 до α_2 к числу женщин в возрасте от β_1 до β_2 в фактическом населении, деленное на то же отношение в стационарном населении. Чаще всего принимаются значения: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4$; $\beta_1 = 15$; $\beta_2 = 49$

ную структуру фактического и стационарного населения, а затем разделить R на e_0.

4.6. Вычисление и смысл постоянных Q_i

В вычислении различных истинных показателей постоянные Q_i из уравнения (5) не участвуют. Однако если желательно знать, как будет эволюционировать население, то они необходимы для определения общей численности населения, числа рождений и числа смертей. Здесь мы укажем лишь выражение для постоянной φ_ρ, т. е. для постоянной, связанной с действительным корнем уравнения (6). Предлагаемая методика дает возможность исчислить население с того момента, когда две функции $\varphi(x)$ и $p(x)$ становятся постоянными, и до момента, когда достигнуто стабильное состояние, не принимая во внимание колебаний, происходящих во время переходного периода.

Основное уравнение (4) можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$B(t) = N_0 \int_0^\infty c_0(x) \frac{p(t+x)}{p(x)} \varphi(x)\, dx + \int_0^t B(t-x)\, p(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Первый интеграл представляет собой число рождений, продуцируемое исходным населением, причем $c_0(x)dx$ — это доля лиц возраста x в момент 0, а второй интеграл представляет собой число рождений, продуцируемое последующими поколениями.

Если в этом уравнении мы примем, что $B(t) = Q_\rho e^t$, т. е. числу рождений в момент t, когда уже достигнуто предельное состояние, а затем возьмем интеграл по t, то получим:

$$Q_\rho = N_0 \int_0^\infty \frac{c_0(x)}{c_\infty(x)} G(x)\, dx,$$

где $c_\infty(x)$ — это стабильная возрастная структура и

$$G(x) = \frac{g(x)}{\int_0^\infty g(x)\, dx},$$

причем

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-\rho x} p(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Как мы видим, коэффициент Q зависит от исходной возрастной структуры $c_0(x)$ и от двух заданных функций $p(x)$ и $\varphi(x)$. Если значение коэффициента Q_ρ известно, то можно вычислить не только возрастную структуру населения, когда оно достигло стабильного состояния, но и общую его численность. Связанные с комплексными корнями постоянные Q_i, с помощью которых можно было бы оценить численность населения в течение переходного периода, вычислить труднее.

4.7. Применение предыдущего: потенциал роста

Предположим, что с некоторого момента население начинает подчиняться режиму смертности, который существует в этот исходный момент и далее не меняется, однако режим плодовитости таков, что истинный коэффициент прироста с этого момента становится равным нулю. Тогда в общей численности населения, в числе рождений и в числе смертей будут наблюдаться колебания до тех пор, пока в пределе население не станет стационарным. Соотношение между численностью этого предельного стационарного населения и численностью исходного населения, выраженное коэффициентом Q, указывает, насколько увеличится население вследствие того, что исходная возрастная структура отличалась от структуры этого предельного стационарного населения. Это отношение Поль Венсан назвал *потенциалом роста*[15]. Например, потенциал роста для населений латиноамериканского типа равен 1,8. Это значит, что возрастная структура этих населений столь «молода», что даже если предположить, будто условия стационарности соблюдаются уже с этого дня, то численность этих населений увеличится еще на 80% вследствие потенциальных сил в их возрастных структурах, накопившихся благодаря высокой плодовитости в прошлом. Такого рода расчет интересен потому, что он дает возможность разложить данный прирост, в любой произвольный момент, на часть, обусловленную уровнями плодовитости и смертности этого момента, и часть, обусловленную возрастной структурой, т. е. плодовитостью и смертностью в прошлом.

Следует отметить, что такой расчет может быть выполнен как для случая экспоненциального населения, так и для случая стабильного населения. Очень легко показать, что в экспоненциальном населении, определяемом, например, на основе неизменности функции дожития и коэффициентов рождаемости, будет соблюдаться следующее соотношение:

$$Q_\rho = N_0 b \int_0^\infty \frac{c_0(x)}{c_\infty(x)} G(x)\, dx,$$

где

$$G(x) = \frac{g(x)}{\int_0^\infty g(x) dx}$$

и

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-\rho x} p(x)\, dx.$$

---

[15] Vincent P. Potentiel d'accroissement d'une population. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, vol. 86, n. 1—2, 1945, p. 16—39.

4.8. Определение истинного коэффициента прироста по графику

Предположим, что имеется некоторый набор коэффициентов плодовитости $\varphi(x)$ и набор вероятностей дожития $p(x)$. Посмотрим, как, опираясь на эти данные, можно определить графически истинный коэффициент прироста. Запишем

$$\Psi(r)=\int_0^\infty e^{-rx}\varphi(x)\,p(x)\,dx$$

и будем придавать r различные значения. Производная функции $\Psi(r)$ по r:

$$\frac{d\Psi}{dr}=-\int_0^\infty xe^{-rx}\varphi(x)\,p(x)\,dx$$

обязательно отрицательна, поскольку все элементы под интегралом положительны. Следовательно, $\Psi(r)$ есть убывающая функция r. С другой стороны, имеем:

$\Psi(r)=0$ при $r=+\infty$;

$\Psi(r)=+\infty$ при $r=-\infty$;

$\Psi(r)=R$ при $r=0$.

Поэтому кривая, изображающая $\Psi(r)$ как функцию r, начинается с $+\infty$, когда $r=-\infty$, затем постепенно снижается, пересекает ось ординат в точке $\Psi(r)=R$ и асимптотически приближается к оси абсцисс (см. рис. 2).

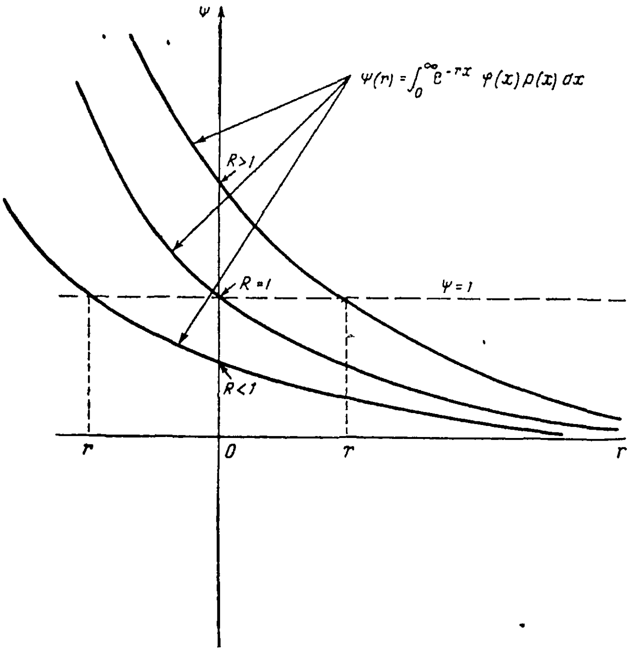

Рис. 2. График функции $\Psi(r)$

Из этого следует, что кривая $\Psi(r)$ и горизонтальная линия с ординатой $\Psi(r)=1$ пересекаются в одной и только одной точке, соответствующей искомому истинному коэффициенту прироста. Мы видим, таким образом, что уравнение (6) имеет лишь один действительный корень.

4.9. Сравнительное положение нетто-коэффициента воспроизводства и истинного коэффициента прироста

Рассмотрим снова рис. 2. Мы видим, что, когда кривая пересекает ось ординат выше точки $R=1$, истинный коэффициент прироста обязательно положителен. Когда кривая пересекает ось ординат в точке $R=1$, истинный коэффициент прироста равен нулю. И наконец, когда кривая пересекает ось ординат ниже точки $R=1$, истинный коэффициент прироста отрицателен. Таким образом:

$$r > 0, \text{ если } R > 1;$$
$$r = 0, \text{ если } R = 1;$$
$$r < 0, \text{ если } R < 1.$$

4.10. Построение модельных стабильных населений

Для того чтобы построить теоретические стабильные населения, мы должны знать режимы плодовитости и смертности, $\varphi(x)$ и $p(x)$. Зная эти режимы, мы можем с помощью традиционных методов численного интегрирования вычислить истинный коэффициент прироста ρ на основании уравнения (6). Мы можем также найти разложение для производящей функции кумулянтов $K'(-\rho)$, участвующей в уравнении (7), ограничиваясь членами первой, второй или более высоких степеней и разрешая получившееся уравнение относительно ρ. Именно это и проделал Лотка, когда он предложил[16] следующее решение, полученное для ρ из уравнения второй степени:

$$\rho = \frac{k_1' - \sqrt{k_1'^2 - 2k_2' \log R}}{k_2'}. \tag{11}$$

В 1931 г. Викселль[17] предположил, однако, что функция произведения $\varphi(x)p(x)$ имеет вид кривой Пирсона III типа, и получил таким образом следующее решение:

$$\rho = \gamma\,[R^{\frac{1}{\beta}} - 1],$$

где $\gamma = k_1'/k_2'$ и $\beta = k_1'\gamma$.

Разница между решениями Лотки и Викселля практически невелика.

---

[16] Lotka A. J. Op. cit.

[17] Wicksell S. D. Nuptiality, fertility and reproductivity. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, vol. 3, 1931, p. 125—157.

Когда таким способом определен истинный коэффициент прироста, можно вычислить по формуле (9) коэффициент смертности и по формуле (1) — возрастную структуру.

В исследовании, опубликованном ООН[18], приводятся наиболее важные характеристики стабильных населений для разных значений брутто-коэффициента воспроизводства и для разных значений ожидаемой продолжительности жизни при рождении.

4.11. Различия во влиянии плодовитости и смертности на возрастные структуры

В табл. 4 показаны возрастные структуры стабильных населений, вычисленные с помощью только что рассмотренных методов при различных уровнях плодовитости и смертности. Плодовитость представлена в виде значений брутто-коэффициента воспроизводства, причем в качестве кривой, выражающей зависимость коэффициентов плодовитости от возраста, принята соответствующая кривая для группы южноамериканских стран. Смертность представлена в виде ожидаемой продолжительности жизни при рождении, причем вид функций дожития принят таким, какой указывают модельные таблицы смертности ООН для соответствующих значений ожидаемой продолжительности жизни при рождении (для девочек).

Рассматривая эту таблицу, можно сделать два интересных наблюдения:

а) сравнение возрастных структур при одном и том же уровне смертности, т. е. в столбцах с одним и тем же значением e_0, показывает, что при разных коэффициентах воспроизводства эти структуры значительно различаются. Чем ниже плодовитость, тем более резко выражено постарение населения;

б) напротив, возрастные структуры очень мало зависят от смертности, что можно видеть, сравнивая для одноименных возрастных групп числа в той или иной строке, соответствующие разным значениям ожидаемой продолжительности жизни при рождении.

Эти два обстоятельства ясно показывают, что различия в степени постарения населения следует приписать скорее влиянию различий в плодовитости, чем различий в смертности. В аналитическом виде эти наблюдения были выражены Жаном Буржуа-Пиша[19] и Энсли Коулом[20]. Последний показал, что если в двух стабильных

---

[18] United Nations. The ageing of populations and its economic and social implications. ST/SOA/Series A/26. (*Population Studies*, № 26), N. Y., 1956; United Nations. The future growth of world population. ST/SOA/Series A/28. (*Population Studies*, № 28), N. Y., 1958.

[19] Bourgeois-Pichat J. Dans quelle mesure peut-on limiter le viellissement de la population? *Trois journées pour l'étude scientifique de la population,* Paris, 22—24 avril, 1948; Paris, Alliance Nationale contre la dépopulation, fasc. II, p. 67—75 [без года изд.]. Bourgeois-Pichat J. Charges de la population active. *Journal de la Société de Statistique de Paris,* vol. 91, № 3—4, 1950, p. 94—114.

[20] Coale A. J. Age distributions as affected by changes in fertility and mortality — a further note. Milbank Memorial Fund Quarterly, vol. 35, July, 1957, p. 302—307.

Таблица 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ОСНОВНЫМ ВОЗРАСТНЫМ ГРУППАМ В СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЯХ КАК ФУНКЦИЯ БРУТТО-КОЭФФИЦИЕНТА ВОСПРОИЗВОДСТВА R' И ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ (ДЛЯ ЖЕНЩИН) e_0, %

R'	$e_0=20$			$e_0=30$			$e_0=40$			$e_0=50$			$e_0=60,4$			$e_0=70$		
	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет	0—14 лет	15—59 лет	60+ лет
1	14,8	68,3	16,9	16,3	65,0	18,7	17,0	62,6	20,4	17,8	60,7	21,5	18,7	59,4	21,9	19,5	58,6	21,9
1,5	22,6	66,9	10,5	24,7	63,8	11,5	25,9	61,6	12,5	27,0	60,0	13,0	28,2	58,7	13,1	29,3	57,7	13,0
2,0	28,9	64,0	7,1	31,4	60,9	7,7	32,9	58,8	8,3	34,2	57,2	8,6	35,6	55,8	8,6	36,8	54,7	8,5
2,5	34,1	60,7	5,2	36,9	57,6	5,5	38,5	55,6	5,9	40,0	53,9	6,1	41,4	52,6	6,0	42,7	51,4	5,9
3,0	38,5	57,6	3,9	41,3	54,6	4,1	43,1	52,5	4,4	44,6	50,9	4,5	46,0	49,6	4,4	47,4	48,3	4,3
4,0	45,2	52,4	2,4	48,2	49,2	2,6	50,0	47,3	2,7	51,5	45,8	2,7	52,9	44,4	2,7	54,1	43,3	2,6

населениях функции, выражающие зависимость плодовитости от возраста, идентичны, а функции дожития различны и связаны равенством вида:

$$p_1(x) = p_2(x)\,e^{vx},$$

где индексы 1 и 2 обозначают два этих населения, а v — постоянная, то возрастные структуры таких населений будут в точности совпадать. Следовательно, различия в степени постарения обусловлены не различиями в смертности. Более того, большие или меньшие доли молодых и старых людей в населении объясняются уровнями плодовитости.

Проблема старения населения была предметом многочисленных дискуссий на Всемирной конференции по народонаселению в 1954 г. Исследование этой проблемы, проведенное ООН, результаты которого были опубликованы в 1956 г.[21], показало механизм этого явления и вскрыло его экономическое и социальное значение.

4.12. Матричное представление стабильного населения

Лотка показал, как мы уже видели, что население, в котором возрастные показатели плодовитости и смертности не меняются, приобретает стабильную возрастную структуру; при этом он предполагал, что рост числа рождений можно представить в виде суммы экспоненциальных функций, и исследовал влияние этой гипотезы на возрастную структуру. Более непосредственный метод доказательства теоремы Лотки состоит в том, чтобы провести перспективное исчисление населения с некоторой определенной возрастной структурой, исключая на каждом этапе исчисления, скажем, в один год, число умерших, соответствующее принятому режиму смертности, и добавляя число доживших из родившихся на первом году исчисления, также соответствующее принятым режимам плодовитости и смертности. Рост такого населения вычисляется поэтапно, как в простейшем случае марковских процессов, до тех пор пока структура населения не перестанет изменяться, причем ее вид может совершенно не соответствовать исходной структуре.

Можно также описать этот процесс на языке матричной алгебры. Бернарделли[22] в 1941 г. первым пришел к мысли о применении матричного исчисления в демографии, однако в силу гипотез, принятых в его модели, ему не удалось получить стабильности. Он рассматривал популяцию жуков, максимальная длительность жизни которых 3 дня, а вероятность дожить от первого до второго — $^1/_2$ и от второго дня до третьего — $^1/_3$. Способность приносить потомство появляется на третий день, причем каждый доживший жук производит на свет в среднем шесть новых жуков. Пользуясь методами матричной алгебры, Бернарделли показал, что численный рост этой популяции соответствует циклическому обновлению, при котором вся

[21] United Nations. Op. cit.

[22] Bernardelli H. Population waves. *Journal of Burma research society*, 1941, vol. 31, № 1, p. 1—18.

популяция воспроизводится с неизменной численностью каждые три дня.

Такая популяция не стабильна, несмотря на то что режимы плодовитости и смертности неизменны; это можно объяснить тем обстоятельством, что режим плодовитости описывается не непрерывной функцией, поскольку рождения происходят только в некотором данном возрасте.

Лесли[23] (в 1945 г.) вновь обратился к теореме Лотки, также представив ее формально в терминах матричного исчисления. Он начал с женского населения численностью $F_0^{(0)}, F_1^{(0)}, \ldots, F_\beta^{(0)}$, в возрастах соответственно $0, 1, \ldots, \beta$, где β есть последний из возрастов того периода, когда женщина способна к деторождению. Пусть f_k $(k=0, 1, \ldots)$ вероятность того, что женщина возраста k родит ребенка в течение данного периода — длительностью, скажем снова, в один год — и что ребенок (дети), рожденный этой женщиной, доживет до конца года. Тогда f_k есть произведение коэффициента женской плодовитости в возрасте k и вероятности дожития ребенка от момента рождения до конца года. Наконец, пусть $P_0, P_1, \ldots, P_{\beta-1}$ — вероятности дожития от возраста 0 до возраста 1 год, от начала возраста 1 год до возраста два года, ..., от возраста $\beta-1$ до возраста β *.

Матричное представление перспективного исчисления на интервале между годом 0 и годом 1 заключается в записи исходного населения $F_0^{(0)}, \ldots, F_\beta^{(0)}$ в виде вектора-столбца, обозначим его $F^{(0)}$, который связан с населением $F^{(1)}$ года 1 соотношением:

$$F^{(1)} = MF^{(0)},$$

где M есть матрица вида:

$$M = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \ldots f_{\beta-1} & f_\beta \\ P_0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & P_1 & \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & P_{\beta-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя правила умножения матриц, мы находим:

$$F_0^{(1)} = f_0 F_0^{(0)} + f_1 F_1^{(0)} + \ldots + f_\beta F_\beta^{(0)};$$

$$F_1^{(1)} = P_0 F_1^{(0)};$$

$$F_2^{(1)} = P_1 F_2^{(0)};$$

$$\ldots\ldots$$

M есть квадратная матрица, не содержащая отрицательных элементов. Если повторить этот процесс n раз, то получим квадратную матрицу M^n, причем

---

[23] Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika,* vol. 33, part III, 1946, p. 183—212.

* Точнее следовало бы сказать «вероятности дожития от начала года до начала следующего года для лиц в возрасте $0, 1, \ldots, \beta-1$». — *Прим. пер.*

$$F^{(n)} = M^n F^{(0)}.$$

Это соотношение показывает возрастную структуру года n, когда функции плодовитости и смертности, входящие в матрицу M, были применены n раз. Население становится стабильным в момент n, если умножение матрицы M на вектор-столбец $F^{(n)}$ не меняет соотношений между элементами вектора $F^{(n)}$.

Применив правила матричного исчисления, Феллер[24] показал, что, когда n стремится к бесконечности, существует положительное число k, вектор-столбец x и вектор-столбец y, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} M^n = k^n xy.$$

Тогда, подставляя соотношение $F^{(n)} = M^{(n)}F^{(0)}$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n)} = k^n xyF^{(0)}.$$

Полагая $yF^0 = S$, где S — скаляр, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n)} = Sk^n x.$$

Таким образом, мы видим, что в момент n число лиц в возрасте i есть $F_i^{(n)} = Sk^n x$. Иными словами, в пределе число лиц в каждом возрасте увеличивается с одной и той же скоростью $k-1$; это показывает, что возрастная структура в дальнейшем не изменяется.

Коэффициент прироста может быть найден как решение следующего характеристического уравнения, записанного в виде определителя:

$$\begin{Vmatrix} f_0-k & f_1 & \dots & \dots & f_{\beta-2} & f_{\beta-1} & f_\beta \\ P_0 & -k & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & P_{\beta-2} & -k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & P_{\beta-1} & -k \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель и приводя подобные члены, мы получаем $(f_0-k)(-k)^\beta + \sum^{\beta}(-1)^m P_0P_1\dots P_{m-1}f_n(-k)^{\beta-m} = 0$. Для произведений $P_0P_1\dots P_{m-1}$, представляющих собой l_m, т. е. вероятности дожить до возраста m, получим:

$$\sum_{m=0}^{\beta} \frac{l_m f_m}{k^{m+1}} = 1.$$

Это уравнение очень походит на уравнение Лотки (1), которое, напомним, было получено для случая непрерывных переменных.

---

[24] Feller W. Op. cit.

Следует отметить, что, как показал Лопес, предыдущее доказательство может быть распространено на население, не ограниченное сверху возрастом β — максимальным репродуктивным возрастом.

5. Населения с изменяющимися во времени режимами плодовитости и смертности

Даже если демографические явления строго не детерминированы, тем не менее можно утверждать, что населения европейских стран * развивались в соответствии с определенными закономерностями, в которых выделяются четыре фазы и которые, согласно Ландри [25], называются демографической революцией.

Опишем кратко, на примере Англии, этот цикл, обозначая четыре фазы через δ_1, δ_2, δ_3, δ_4. Первая фаза, δ_1, когда, несмотря на «хорошие» и «плохие» годы, в общем существовало равновесие между плодовитостью и смертностью, начинается в доисторические времена и заканчивается около 1750 г. Нетто-коэффициент воспроизводства был величиной порядка единицы, а возрастная структура населения оставалась молодой. Вторая фаза, δ_2, характеризовалась снижением смертности, без какого-либо изменения плодовитости. Нетто-коэффициент воспроизводства превышал единицу, а структура населения оставалась молодой, будучи мало затронутой снижением смертности. Увеличилась лишь доля молодых людей, так как снижение детской смертности имело тот же эффект, что и увеличение плодовитости, несколько увеличилась также доля старых людей. Эта вторая фаза длилась довольно долго, примерно с 1750 по 1880 г. В фазе δ_3 начинается снижение плодовитости. Падает также коэффициент прироста, достигший максимума в конце предыдущего периода. Возрастная структура начинает медленно стареть; этот процесс старения достиг своей высшей точки примерно к 1930 г., в течение четвертой фазы, когда кривые плодовитости и смертности вновь соединились. Как и в фазе δ_1, эта точка отмечена равновесием между плодовитостью и смертностью, и население вновь становится стационарным.

Разрыв во времени между снижением смертности и снижением плодовитости объясняет рост населения Европы на протяжении девятнадцатого и первой половины двадцатого веков. Большинство развивающихся стран, которые в некоторых отношениях повторяют опыт европейских стран, прошли через фазу δ_1 и сейчас находятся в фазе δ_2, с той разницей, что начальный уровень плодовитости в них был выше, чем он был когда-либо в европейских странах за все время их истории, и что снижение смертности также происходит гораздо быстрее, приводя к коэффициентам прироста, беспримерным в истории человечества. По причинам, рассмотренным в гл. 4, возрастные структуры населения этих стран создают значительные потенциалы роста.

---

* Автор имеет в виду экономически развитые капиталистические страны Западной Европы. — *Прим. ред.*

[25] L a n d r y A. La révolution démographique. Paris, 1934.

В связи с этим кратким очерком демографической эволюции мы рассмотрим теперь три группы проведенных недавно исследований; во-первых, общую теорему о населениях, подверженных меняющимся во времени режимам плодовитости и смертности; во-вторых, исследования, имеющие целью математическое описание процесса демографической эволюции в целом, и, наконец, исследования, посвященные более конкретному рассмотрению одной из фаз цикла (особенно второй), которые приведут нас к понятию так называемого *квазистабильного* населения.

5.1. Теорема слабой эргодичности

Легко установить, что возрастная структура замкнутого населения может быть получена полностью, если известны возрастная структура на некоторый момент в прошлом и изменение плодовитости и смертности, начиная с этого момента. Коул[26] показал, что влияние прошлой структуры на современную постепенно сходит на нет, так что современная структура постепенно становится зависящей только от предшествующего развития плодовитости и смертности.

В исследовании неоднородных марковских процессов Хеджнел[27] назвал это свойство *слабой эргодичностью*. Теорема Лотки есть частный случай этого свойства, поскольку она относится к имеющим неизменные режимы плодовитости и смертности населениям, возрастная структура которых не только «забывает» прошлую возрастную структуру, но и стремится к пределу, зависящему только от режимов плодовитости и смертности. Это особое свойство известно как *сильная эргодичность*.

На основании только что описанного общего свойства может быть сделано следующее заключение: если два населения подчиняются одинаковым, но изменяющимся во времени режимам плодовитости и смертности, то эти два населения в конце концов приобретут одинаковые возрастные структуры, хотя, конечно, эти структуры не обязательно стремятся к пределу, как в случае стабильного населения. Лопес[28] дал доказательство этой интересной теоремы, основанное на матричном исчислении, и мы вкратце воспроизведем здесь это доказательство.

Итак, рассмотрим замкнутое население и представим его возрастную структуру в виде вектора, каждый элемент которого соответствует общему числу лиц данного возраста. Теорема Лотки о сильной эргодичности утверждает, что направление этого вектора в соответствующем евклидовом пространстве стремится к пределу, когда плодовитость и смертность достаточно долго остаются неизмен-

---

[26] Coale A. J. How the age distribution of human population is determined. *Cold Spring Harbour Symposia on Quantitative Biology,* vol. XXXII, Cold Spring Harbour, New York, 1957, p. 83—90.

[27] Hajnal J. The ergodic properties of non-homogeneous finite Marcov chains. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society,* vol. 52, part I, p. 67 et seq.

[28] Lopez A. Op. cit.

ными. Теорема Лопеса о слабой эргодичности, в свою очередь, утверждает, что два вектора населений не обязательно равнонаправленные, но в дальнейшем подчиняющиеся одинаковым режимам плодовитости и смертности, стремятся стать равнонаправленными, даже если они полностью отходят от их начальных направлений.

Рассмотрим теперь вероятности $f_k^{(t)}$ того, что женщина в возрасте k родит в течение года t и что ребенок (или дети), рожденный ею, доживет до конца года t. Пусть P_k^t есть вероятность того, что женщина, возраст которой в момент t равен k, доживет до возраста $k+1$ *. Пусть, наконец, горизонтальные векторы $V^{(t)}$ и $W^{(t)}$ означают возрастные структуры двух населений в момент t:

$$V^t = |V_0^{(t)}, \ldots, V_\beta^{(t)}|;$$

$$W^t = |W_0^{(t)}, \ldots, W_\beta^{(t)}|.$$

Каждый элемент этих векторов представляет собой общее число женщин в возрасте k, причем β есть предельный для деторождения возраст. Пусть также в начальный (нулевой) момент все значения $V_k^{(0)}$ и $W_k^{(0)}$ положительны; это означает, что в начальный момент оба населения включают лиц всех возрастов.

Изменения, происходящие в течение некоторого года t, представлены следующей квадратной матрицей:

$$M^{(t)} = \begin{vmatrix} f_0^{(t)} & f_1^{(t)} & \ldots & f_{\beta-1}^{(t)} & f_\beta^{(t)} \\ P_0^{(t)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P_1^{(t)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & P_{\beta-1}^{(t)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Смысл и содержание этой матрицы сходны с тем, что уже рассматривалось в гл. 4 применительно к стабильному населению.

Процесс происходящих изменений описывается следующими равенствами:

$$V^{(1)} = M^{(0)} V^{(0)} \qquad W^{(1)} = M^{(0)} W^{(0)}$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$V^{(t)} = \prod_{k=0}^{t-1} M^{(k)} V^{(0)} \qquad W^{(t)} = \prod_{k=0}^{t=1} M^{(k)} W^{(0)}$$

Лопес доказал, что для любых двух возрастов k и j

$$\lim_{t=\infty} \left[\frac{V_k^{(t)}}{W_k^{(t)}} - \frac{V_j^{(t)}}{W_j^{(t)}} \right] = 0.$$

* Точнее сказать, «до конца года». — *Прим. пер.*

Это равносильно утверждению, что два вектора в конце концов становятся равнонаправленными, однако не обязательно сходятся к определенному пределу.

Суть доказательства в том, что если одновременно производится передвижка по возрастам двух населений, то при этом устанавливаются некоторые отношения численностей женщин одного и того же возраста. Эти отношения имеют минимум, который монотонно растет, и максимум, который так же монотонно убывает, и две эти тенденции дают в конце концов одинаковый результат.

Это доказательство чрезвычайно важно с теоретической точки зрения, поскольку оно представляет в сущности первую за сорок лет удачную попытку избавиться от гипотезы о неизменности режимов плодовитости и смертности. Эта новая теорема кажется более общей, чем теорема об обычных стабильных населениях. Однако практическое ее значение, по-видимому, не столь велико. В частности, мы не можем получить на основе этой теоремы что-нибудь на первый взгляд аналогичное истинному коэффициенту естественного прироста, который, равно как и нетто-коэффициент воспроизводства Бёка, продемонстрировал, какие последствия для населения европейских стран имело бы длительное сохранение плодовитости на уровне 1925—1930 гг., что привлекло внимание демографов к неблагоприятным условиям, сложившимся в это время.

5.2. Математическое описание демографической революции

Один из исследователей, Норман Райдер[29], попытался математически описать демографический цикл. Как и в случае стабильных населений, предложенная Райдером модель относится к замкнутому населению. В ней также рассматривается только женское население, и для того, чтобы избежать несовместимости коэффициентов прироста для двух полов, мужское население должно автоматически приводиться в соответствие с женским.

Первоначально вычисления производятся для когорт, и основная трудность заключается в переводе чисел рождений, представленных продольно по когортам женщин, в годовое число рождений.

Прежде всего предполагается, что женская плодовитость сконцентрирована в определенном возрасте, изменяющемся от A (δ_1) в течение начальной фазы до A (δ_4) в конечной фазе. Между этими двумя фазами возраст матерей принимает среднее значение A_1 в течение первого поколения[30], следующего за фазой δ_1, значение A_2 — в течение второго поколения и так далее.

---

[29] Ryder N. B. A model of demographic transition. *Paper presented to the annual meetings of the American Sociological Association,* St. Louis, 2 Sept. 1961. Ryder N. B. The translation model/of demographic change. *Emerging techniques in population research. Conference of the Milbank Memorial Fund,* New York, 1962; New York, 1963, p. 65—81.

[30] Термин *поколение* применяется здесь для того, чтобы обозначить средний интервал между двумя поколениями, как это было определено в гл. 4, а не в обычном смысле годового числа рождений

Рассмотрим последние A (δ_1) лет фазы δ_1 и обозначим через B (δ_1) годовое число рождений в течение этого периода. Тогда общее число рождений девочек в течение этого периода будет:

$$B(\delta_1) \cdot A(\delta_1).$$

Это есть в то же время число дочерей, рожденных этой группой в течение первого поколения, следующего за периодом δ_1, поскольку нетто-коэффициент воспроизводства в течение δ_1 был принят равным единице.

Тогда годовое число рождений девочек в течение первых A_1 лет, следующих за периодом δ_1, которое мы обозначим B_1, равно:

$$B_1 = \frac{B(\delta_1)\, A(\delta_1)}{A_1}.$$

Подобным же образом годовое число рождений, B_2, для A_2 лет второго поколения, следующего за δ_1, есть

$$B_2 = \frac{B_1 A_1 R_1}{A_2} = \frac{B(\delta_1)\, A(\delta_1)\, R_1}{A_2},$$

где R_1 — нетто-коэффициент воспроизводства в течение A_1 лет первого поколения, следующего за δ_1.

Если мы продолжим те же выкладки до конца демографической революции, то найдем, что

$$B(\delta_4) = B(\delta_1)\, \frac{A(\delta_1)}{A(\delta_4)} = \prod_{i=1}^{n} R_i,$$

где n — число поколений между концом периода δ_1 и началом δ_4.

Пользуясь некоторыми свойствами графика на рис. 3, Райдер показал, что можно записать:

$$\prod_{i=1}^{n} R_i = \left[\frac{P(\delta_4)}{P(\delta_1)}\right]^L,$$

где $L = \dfrac{Y}{A}$, причем Y есть расстояние, разделяющее точки симметрии двух логистических кривых, представляющих $\log R$ и $\operatorname{colog} R$. Величина L, таким образом, есть среднее число поколений, разделяющих центральные точки двух кривых, некоторым образом характеризующее интервал между ними.

Запишем теперь отношение общей численности населения в течение последней фазы $N(\delta_4)$ к общей его численности в течение первой фазы $N(\delta_1)$. Эти общие численности легко получить, если принять во внимание, что в стационарном населении коэффициент рождаемости есть величина, обратная ожидаемой продолжительности жизни при рождении. Пусть $e_0(\delta_1)$ и $e_0(\delta_4)$ есть значения ожидаемой продолжительности жизни при рождении для начальной и конечной фаз. Тогда

$$\frac{N(\delta_4)}{N(\delta_1)} = \frac{\left[\dfrac{P(\delta_4)}{P(\delta_1)}\right]^L \dfrac{e_0(\delta_4)}{e_0(\delta_1)}}{\dfrac{A(\delta_4)}{A(\delta_1)}}.$$

Подставляя в эту формулу различные численные значения, Райдер попытался показать, как росли населения европейских стран по мере прохождения через демографический цикл и как, вероятно, будут эволюционировать населения развивающихся стран в свете изменений, произошедших в них в последнее время, если мы предположим, что они тоже пройдут демографический цикл некоторого вида.

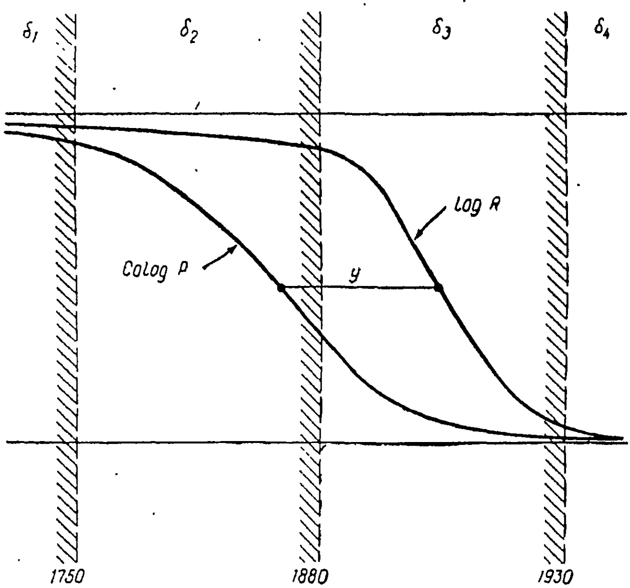

Рис. 3. Схема демографического перехода (примерные даты для Англии)

В заключение Райдер рассмотрел влияние на рост населения, проходящего цикл, таких факторов, как начальные и конечные коэффициенты смертности, снижение среднего возраста матерей, средний интервал времени, разделяющий кривые смертности и плодовитости (который мы обозначили L). Фактор, упомянутый последним, по-видимому, особенно важен.

В последних своих работах автор стремился усовершенствовать анализ, сделав первую модель более сложной в попытке приблизить ее к действительности. Одно из наиболее интересных улучшений состоит в гипотезе, что рождения у женщин не сконцентрированы в единственном возрасте, но продолжаются в течение всего репродуктивного периода. Основная трудность, как мы говорили, заключается в том, как перейти от продольной записи событий к поперечному анализу.

5.3. Конкретное изучение некоторых фаз демографической революции: квазистабильные населения

Квазистабильными населениями называются населения, находящиеся в фазе δ_2 демографической революции, т. е. населения, в которых после того, как в течение долгого времени плодовитость и смертность оставались неизменными (и в которых коэффициент рождаемости и коэффициент смертности могли быть равными как в населении стационарного типа, что в большей или меньшей степени справедливо для населений европейских стран до 1750 г.), наступает снижение смертности без каких-либо изменений плодовитости. Этот термин относительно нов, так как он не представлен в Многоязычном демографическом словаре, изданном в 1958 г. По-видимому, впервые он появился в публикации ООН [31], выпущенной в том же году.

Демографические свойства населений этого типа изучены пока мало. Можно сослаться, однако, на недавнюю статью Энсли Коула [32], в которой делается попытка установить эквивалентность стабильного и квазистабильного населений в том, что касается возрастной структуры, коэффициентов рождаемости и коэффициентов смертности.

С помощью простой передвижки по возрастам, основанной на стабильных моделях, можно легко показать, что населения, характеризующиеся не снижающейся плодовитостью, после длительного периода стабилизации обладают возрастной структурой, изменяющейся, как мы уже видели, весьма мало. Более того, можно показать, что две основополагающие формулы экспоненциальных населений:

$$c(x) = be^{-rx}p(x);$$

$$b = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-rx}p(x)\,dx}$$

остаются справедливыми с высокой степенью приближения в любой момент передвижки.

---

[31] U n i t e d N a t i o n s. Future Growth of World Population. ST/SOA/Series A/28. (*Population Studies*, № 28), New York, 1958.

[32] C o a l e A. J. Estimates of various demographic measures through the quasi-stable age distribution. *Emerging techniques in population research. Conference of the Milbank Memorial Fund*, New York, 1962; New York, 1963, p. 175—193.

Этот факт основан на следующем результате, полученном Буржуа-Пиша[33]: если возрастная структура некоторого населения остается неизменной, независимо от причин этого явления, то она идентична возрастной структуре экспоненциального населения, вычисленной на основе таблиц смертности и коэффициента прироста, соответствующих данному моменту. Иными словами, в каждый момент времени в квазистабильном населении существуют те же соотношения между возрастной структурой, коэффициентом рождаемости, коэффициентом смертности и коэффициентом прироста, что и в некотором экспоненциальном населении. Это свойство особенно интересно потому, что в прошлом коэффициенты смертности и коэффициенты прироста квазистабильных населений могли быть весьма разнообразными.

Модельные таблицы квазистабильных населений были вычислены Таба[34] на основе изменений в смертности (с учетом как степени снижения смертности, так и начальных уровней смертности и плодовитости), зарегистрированных в большинстве развивающихся стран. Эти таблицы были дополнены моделями, описывающими начало следующей фазы δ_3 демографического цикла, какой она могла бы быть при различных темпах снижения плодовитости.

Различное применение понятий стабильного и квазистабильного населения для изучения плодовитости и смертности в странах, для которых нет статистических данных или есть лишь неполные данные, было предложено Коулом[35], Буржуа-Пиша[36], Абдель-Ати[37], Эль-Бадри[38], Кротки[39] и Секлани[40].

6. Противоречие между мужскими и женскими мерами воспроизводства

Мы построили теоретические населения на основе функций, относящихся исключительно к женскому полу, однако, в сущности, нет никаких причин, по которым не могла бы быть получена тем же пу-

---

[33] Bourgeois-Pichat J. Utilisation de la notion de population stable pour mesurer la mortalité et la fécondité de populations des pays sousdéveloppées. *Bulletin de l'Institut international de la Statistique,* t. 36,2-me livr., p. 94—121.

[34] Tabah L. Poblaciones modelos estables, cuasi estables y en transicion demográfica. Santiago, 1964; Tabah L. Algunos modelos teóricos de población. Santiago, 1964.

[35] Coale A. J. Op. cit.

[36] Bourgeois-Pichat J. Op. cit.

[37] Abdel-Aty S. H. Life tables functions for Egypt based on model life-tables and quasi-stable populations theory. *Milbank Memorial Fund Quarterly,* vol. 39, 1961, p. 350—377.

[38] El-Badry M. A. Some demographic measurements for Egypt based on the stability of census age distributions. *Milbank Memorial Fund Quarterly,* vol, 33, 1955, p. 268—305.

[39] Krotki K. J. The use of quasi-stable population theory with census-collected vital events. *Proceedings of the International Population Conference,* New York, 1961; London, 1963, p. 411—419.

[40] Seklani M. La population de la Tunisie. Situation actuelle et évolution probable jusqu'en 1986. *Population,* vol. 16, 1961, p. 473—504.

тем на основе функций, присущих ей, и мужская часть населения. Итак, возьмем модель стабильного населения и обозначим функции, относящиеся к мужскому и женскому полу, соответственно индексами M и F. Тогда равенство (4) заменится следующими двумя равенствами:

$$B_F(t) = \int_0^\infty B_F(t-x)\, p_F(x)\, \varphi_F(x)\, dx$$

и

$$B_M(t) = \int_0^\infty B_M(t-x)\, p_M(x)\, \varphi_M(x)\, dx.$$

Из этих двух равенств могут быть получены, как мы видели, истинные коэффициенты прироста r_F и r_M. На практике эти два коэффициента оказываются разными — ведь нет причин, по которым они не могли бы различаться даже по знаку, — так что в предельном стабильном состоянии числа женских и мужских рождений изменяются разными темпами, а иногда даже в разных направлениях. По прошествии достаточного времени может сложиться положение, когда число рождений одного пола будет в n раз больше числа рождений другого пола. При этих обстоятельствах доля мальчиков в рождениях, которая в действительности обладает примечательным постоянством, достигнет совершенно ненормальных значений. Это указывает на существенный изъян в теории стабильного населения, который получил в литературе название *противоречия между мужскими и женскими мерами воспроизводства.*

Если мы берем две функции: $p_M(x)$ и $p_F(x)$, и предполагаем, что они неизменны, то мы можем также выбрать одну из функций $\varphi_M(x)$ и $\varphi_F(x)$ и предположить, что и эта функция постоянна: вторая, однако, обязательно должна колебаться так, чтобы величина r_M в каждый данный момент могла быть равна r_F, если только не допускается, конечно, что обе функции, как $\varphi_M(x)$, так и $\varphi_F(x)$, могут одновременно изменяться. И в том и в другом случае, как показал Кармел[41], гипотеза о том, что обе функции плодовитости одновременно не зависят от возрастной структуры, должна быть отвергнута.

В связи с этим естественно попытаться ввести в эти модели стабильных населений фактор брачности. Поль Венсан писал: «Функции плодовитости для обоих полов связаны через брачность, которая, в свою очередь, зависит, в частности, от возрастной структуры бракоспособного населения того и другого пола. Часто, однако, эта

---

[41] Karmel P. H. The relations between male and female reproduction rates. *Population Studies*, 1947, vol. 1, part 3, p. 249—274; Karmel P. H. An analysis of the sources and magnitudes of inconsistencies between male and female net reproduction rates in actual populations. *Population Studies*, 1948, vol. 2. part 2, p. 240—273; Hajnal J. Some comments on Mr. Karmel's paper «The relations between male and female net reproduction rates». *Population Studies*, 1948, vol. 2, part 3, p. 354—360, а также Karmel P. H. A rejoinder to Mr. Hajnal's comments, op. cit. p. 361—372.

структура в реальном населении совершенно отлична от того, что должно быть в стабильном населении»[42]. Практическим оправданием введения фактора брачности служит представление о некоторой ситуации, в которой вследствие войны или эмиграции мужчин образуется существенная нехватка взрослых мужчин, так что большинство мужчин состоит в браке, тогда как многие женщины остаются одинокими. Если вычислить затем коэффициенты воспроизводства, то показатель для мужского пола окажется выше, чем для женского, поскольку число мужских рождений обычно превосходит число женских рождений.

Это приводит нас к вычислению коэффициентов r_M и r_F, зависящих не только от функций $p_M(x)$, $p_F(x)$, $\varphi_M(x)$ и $\varphi_F(x)$, но и от условий брачности. Поставленная проблема может быть также изложена следующим образом: если даны функции брачности для каждого пола по возрасту и брачному состоянию, то приведет ли их применение, начиная с ситуации, характеризуемой определенным возрастно-половым распределением с постоянными режимами плодовитости и смертности, к предельному стабильному населению и если приведет, то как мы можем вычислить истинный коэффициент прироста, применимый к населению в целом?

Решение этой проблемы связано со значительными трудностями, и, в сущности, до сих пор не удалось построить модель населения, охватывающую оба пола, и такую, в которой возрастные функции плодовитости, смертности и брачности для каждого пола можно было бы оставить неизменными.

Предполагается одно из двух: либо показатели брачности женщин, например, считают не зависящими от возрастно-половой и брачной структуры населения (а это равносильно предположению, что брачность определяется только женской частью населения независимо от числа мужчин) и говорят, что женщины есть «полная брачная доминанта» — в этом случае r_F есть правильный измеритель истинного коэффициента прироста; либо считают «полной доминантой» мужчин, и тогда правильный измеритель коэффициента прироста есть r_M. Доминантой выступает пол, численность которого меньше, так как этот пол ограничивает величину общего коэффициента брачности. Таким образом, можно определить на основе условий, сложившихся в данный момент, какой из двух коэффициентов прироста следует рассматривать как истинный коэффициент для населения в целом. Это не значит, однако, что таким образом можно прийти к теоретическому стабильному населению, поскольку изменения брачной структуры, которые обязательно происходят, как только новорожденные, в свою очередь, достигают брачного возраста, могут свести к нулю преобладание другого пола. Таким образом, полного, т. е. непрерывного, доминирования мужчин или женщин ожидать нельзя.

Эта проблема, хотя ее удовлетворительное решение и не найде-

---

[42] Vincent P. De la mesure du taux intrinsèque d'accroissement naturel dans les populations monogames. *Population*, vol. 1, 1946, p. 699—712.

но, вызвала ряд интересных исследований (мы рассмотрим их далее), в которых в вычисления коэффициентов воспроизводства были введены переменные, отличные от традиционно применяемого возраста матери при рождении, в частности переменные, связанные с браком, а именно возраст вступления в брак и его длительность.

Однако перед тем, как перейти к их рассмотрению, сделаем одно замечание, которое, как мы полагаем, представляет определенный интерес: мы видели, что, задавшись режимом смертности и коэффициентом прироста, можно построить некоторое экспоненциальное население. После периода колебаний, аналогичных наблюдавшимся в модели стабилизации, население придет в состояние, вполне сравнимое со стабильным. Теперь мы не встретим в этой модели несоответствий, с которыми только что столкнулись, поскольку вполне допустимо выбрать два режима смертности — свой для каждого пола — и единый коэффициент прироста. Несогласованности между мужскими и женскими мерами прироста не будет, потому что обе они будут получены искусственным путем.

7. Модели, включающие переменные иные, чем возраст матери

Рассмотрим теперь меры плодовитости и воспроизводства, которые не обязательно основываются на возрасте матери как модели Бёка и Лотки, но включают другие переменные.

7.1. Плодовитость и продуктивность браков по их длительности (Джини, Кармел)

Еще в 1932 г. Коррадо Джини[43] предложил показатель для вычисления среднего числа детей, приходящегося на одну брачную пару, основанный на идее, аналогичной той, какая лежит в основе расчета обычного показателя воспроизводства, т. е. среднего общего числа рождений в расчете на женщину, но на этот раз заменив возраст матери, применяемый при традиционном методе, длительностью брака. Формула Джини имеет вид:

$$G_t = \frac{B_t}{\sum\limits_{i=0}^{S} M_{t,\,t-i}\,\gamma_{t-i}}, \tag{12}$$

где G_t — число детей в расчете на одну брачную пару в момент t;

$M_{t,\,t-i}$ — число брачных пар в момент t, чей брак был заключен в момент $t-i$;

S — максимальная длительность брака и γ_{t-i} — весовой коэффициент следующего вида:

[43] Gini C. Di un procedimento per la determinazione del numero medio dei figli legittimi per matrimonio. *Proceedings of the International Congress for Studies on Population*, vol. 10, № 1—2, 1932, p. 41—68.

$$\gamma_{t-1} = \sum_{i=0}^{S} \frac{B_{t,\,t-i}}{C_{t-1}}.$$

Таким образом, вместо того, чтобы просто соотнести число рождений с числом браков, как делали раньше при определении числа рождений в расчете на один брак, Джини отнес их не к числу браков данного года, а к среднему взвешенному из чисел браков данного года и предыдущих лет.

Если мы подставим значение γ_{t-i} в (12), то найдем, что

$$G_t = \sum_{i=0}^{S} \frac{B_{t,\,t-i}}{M_{t,\,t-i}},$$

где $M_{t,\,t-i}$ означает число браков, заключенных в году $t-i$. Мы привели коэффициент Джини к такому виду для того, чтобы показать, что его структура очень похожа на структуру нетто-коэффициента воспроизводства. Отношение $\frac{B_{t,\,t-i}}{M_{t,\,t-i}}$ есть коэффициент, измеряющий плодовитость браков по их длительности i, а отношение $\frac{M_{t,\,t-i}}{M_{t-i}}$ есть своего рода показатель сохранности брака.

Таким образом, сумма произведений этих двух отношений есть в сущности нетто-коэффициент продуктивности браков, основанный на длительности брака, а не на возрасте матери как обычный нетто-коэффициент воспроизводства. Подобно последнему этот коэффициент есть *моментный показатель*, но нет никаких препятствий к тому, чтобы приложить его к определенным *поколениям*, если это позволяют данные.

Кармел[44] предложил показатель, который мы обозначим K_t и который очень похож по структуре на показатель Джини, напоминая часть последнего, соответствующую брутто-коэффициенту воспроизводства:

$$K_t = k \sum_x L_x t_x \frac{B_{t,\,t-i}}{M_{t,\,t-i}}, \tag{13}$$

где $k \cdot L_x$ есть число женщин в возрасте x в стационарном населении и t_x — доля женщин, вступающих в брак в возрасте x. Произведения $kL_x t_x$ показывают числа женщин, вступающих в брак в возрасте x в стационарном населении, в силу чего коэффициент K_t приобретает следующий смысл: он показывает, сколько дочерей в среднем родила бы замужняя женщина, дожившая до конца репродуктивного периода, если предположить, что останутся неизменными следующие характеристики: брачная плодовитость по длительности брака, возрастные коэффициенты брачности женщин и их коэффициенты дожития. Исчисленный применительно к гипотетической

[44] Karmel P. H. Fertility and marriages — Australia 1933—42. *Economic Record,* vol. 20, № 38, 1944, p. 74—80.

когорте женщин, этот коэффициент, как и обычный коэффициент или коэффициент Джини, представляет собой *моментный* показатель.

Основное различие между коэффициентами Джини или Кармела и обычными мерами плодовитости состоит в том, что первые два основываются лишь на рождениях, происшедших в браке, тогда как обычный метод учитывает и внебрачные рождения.

7.2. Плодовитость и воспроизводство по длительности брака и возрасту вступления в брак (Квенсель, Кларк и Дайн)

Коэффициент Квенселя[45], который мы обозначим через Q_t, представляет собой дальнейшее развитие коэффициента Кармела путем введения коэффициентов плодовитости по длительности брака и возрасту женщины при вступлении в брак вместо одной лишь второй переменной:

$$Q_t = \sum_{i, x} L_x t_x \frac{B_{t, t-i, x}}{M_{t, t-i, x}}, \qquad (14)$$

где $B_{t, t-i, x}$ есть число рождений, происшедших в течение года t у женщин в возрасте x лет, состоящих в браке i лет: $M_{t, t-i, x}$ есть число браков, длительность которых в течение года t достигла i лет и в которых жена имеет возраст x.

В 1947 г. Квенсель применил эту формулу к населению Швеции за 1933 и 1943 гг.; Швеция вела учет рождений по возрасту вступления в брак с 1911 г., и эти данные были проанализированы Викселлем[46] в его докладе на Международном конгрессе по изучению народонаселения в 1937 г.

Точно такой же показатель был предложен примерно в то же время Кларком и Дайном[47] и применен ими к населению одного из штатов Австралии.

7.3. Плодовитость и воспроизводство по возрасту матери и длительности брака (Ж. Буржуа-Пиша)

Поскольку длительность брака всегда есть разность возраста матери при рождении ребенка и возраста вступления в брак, между переменными, рассматриваемыми здесь, и теми, что применялись в предыдущих методах, не существует каких-либо принципиальных различий. Пользуясь понятием *физиологического времени*, которое уже было положено в основу нового метода измерения детской смертности[48], Буржуа-Пиша предложил некоторый измеритель пло-

---

[45] Quensel C. E. Population movements in Sweden in recent years. *Population, Studies,* vol. 1, 1947, p. 29—43.

[46] Wicksell S. D. The fertility of married women in Sweden according to age and duration of marriage. *Proceedings of the International congress for Studies on Population,* Paris, 1937, vol. V, p. 163—169.

[47] Clark C. and Dyne R. E. Applications and extensions of Karmel formula for reproductivity. *Economic Record,* vol. 22, 1946, p. 23—39.

[48] Bourgeois-Pichat J. De la mesure de la mortalité infantile. *Population,* vol. 1, 1946, p. 53—68.

довитости[49]. Его метод состоит в замене примерно 200 показателей таблиц плодовитости по возрасту матери и по длительности брака тремя индексами, два из которых измеряют постоянные или медленно изменяющиеся факторы (вероятности зачатия у новобрачных и возраст окончания репродуктивного периода), а третий — представляющий наибольший интерес — переменные факторы, характеризующие *поведение в данный момент.* На практике, в приближенных исчислениях, этот биометрический метод требует лишь данных о рождениях по возрасту матери и данных о браках по возрасту невест.

7.4. Плодовитость и воспроизводство по числу рожденных детей (Л. Анри)

Здесь в наши намерения входит вычислить вероятности роста (семьи) в следующей последовательности: от брака до первого рождения, от первого рождения до второго и т. д.[50].

Эти вероятности, называемые также *вероятностями увеличения семьи,* вычисляются только для женщин, у которых репродуктивный период закончился. Поэтому они — и это новая и интересная особенность рассматриваемого метода — представляют собой показатели для реальных поколений, а не для момента наблюдения, как коэффициенты Бёка, Джини, Кармела, Квенселя, Кларка и Дайна или Буржуа-Пиша, которые относятся к гипотетическим когортам женщин, подчиняющимся, вплоть до возраста пятьдесят лет, коэффициентам дожития, брачности и плодовитости, наблюдаемым в течение определенного года. Вычисления Анри ведутся в продольном разрезе, тогда как расчеты других цитированных авторов есть комбинации показателей, наблюдаемых в данный момент, и, таким образом, ведутся в поперечном разрезе. Отличаются также и данные, привлекаемые для вычислений, поскольку здесь они получаются только из переписей: это — число женщин по возрасту (из которых выбирают тех, чей возраст пятьдесят лет и старше) и число детей, рожденных живыми к моменту переписи. Вычисления, относительно простые, могут быть детализированы, если выделить брачное состояние или возраст вступления в брак, или год вступления в брак (брачную когорту).

7.5. Плодовитость и воспроизводство по числу предшествующих рождений и интервалу между рождениями (Анри)

В развитие только что описанного метода Анри вводит временной интервал между двумя последовательными событиями: между

[49] Bourgeois-Pichat J. Mesure de la fécondité des populations. Paris, 1950. (*Institut national d'études démographiques. Travaux et Documents,* cahier n. 12.)

[50] Henry L. Fécondité des mariages. Nouvelle méthode de mesure. Paris, 1953. (*Institut national d'études démographiques. Travaux et Documents,* cahier n. 16.)

вступлением в брак и первым рождением, между первым и вторым рождениями и т. д. Такой подход к проблеме весьма полезен в начале периода перехода или в случае серьезных потрясений, таких, как война или экономический кризис. В населениях, не прибегающих к контрацепции, важнейшая из переменных, могущих влиять на плодовитость, есть возраст матери. С другой стороны, с распространением контроля рождаемости, когда решающим обстоятельством становится сознательное поведение, основными факторами делаются число уже рожденных детей и время, прошедшее с момента последнего рождения, поскольку естественно ожидать, что взгляды семей — причины, побуждающие их регулировать деторождение, — меняются по мере роста семьи.

В практическом отношении эти вероятности вычисляются, начиная с первых рождений, по формуле

$$a_k = \frac{\overline{N}_{k+1}}{\sum\limits_n \alpha_{k,n} N_{k,n}}, \tag{15}$$

где $\overline{N}_{k+1}$ есть число рождений порядка $k+1$, происшедших в течение определенного года; $N_{k,n}$ — число женщин, родивших k-го ребенка n лет назад и $\alpha_{k,n}$ — доля рождений порядка $k+1$, происшедших через n лет (после k-го рождения). Как видно, эти вычисления основываются просто на данных о рождениях по порядку рождения и на весовых коэффициентах $\alpha_{k,n}$, которые в действительности мало меняются во времени и даже от одного населения к другому. Для $k=0$ необходимы данные о браках и о первых рождениях по длительности брака.

На основе сочетания этих вероятностей увеличения семьи можно вычислить нетто-коэффициент воспроизводства, показывающий, как замещались бы когорты женщин (замужних или незамужних) в будущем, если бы коэффициенты плодовитости по числу уже рожденных детей и промежутку времени с момента предыдущего рождения оставались бы неизменными. Этот коэффициент, таким образом, есть *моментный* показатель.

7.6. Плодовитость и воспроизводство по числу уже рожденных детей и возрасту матери

Вероятности увеличения семьи исчисляются на основе коэффициентов плодовитости по числу уже рожденных детей (k) и возрасту матери (x). Пусть $f_{k,x}$ и $a_{k,x}$ — соответствующие коэффициенты и вероятности, которые связаны между собой следующим соотношением:

$$a_{k,x} = 1 - (1 - f_{k,x})(1 - f_{k,x+1}) \ldots (1 - f_{k,49}).$$

На основе сочетания этих вероятностей также можно вычислить нетто-коэффициент воспроизводства. Это — моментный показатель. Вычисления основываются как на данных переписи (число женщин, уже имеющих k детей, по возрасту), так и на данных о движении населения (числа родившихся по порядку рождения и по возрасту матери.) В связи с этим можно рекомендовать работы Элизага[51] и Буржуа-Пиша[52].

Паскаль Уэлптон[53] предложил аналогичный метод, основанный на тех же самых переменных. Он обратил внимание на то, что нетто-коэффициент воспроизводства дает иногда парадоксальные результаты, если применяется к когортам женщин, имевшим разную репродуктивную историю и, в частности, имевшим рождения одного и того же порядка в течение определенного года. Следуя этому методу, он рассчитал, например, что для первых рождений нетто-коэффициент воспроизводства для белых женщин в США в 1942 г. был равен 1084, что бессмысленно, так как невозможно, чтобы 1000 американок, даже в гипотетической когорте, могли иметь более 1000 первых рождений. Для того чтобы устранить это несоответствие, Уэлптон предложил усовершенствовать обычный коэффициент, для чего нужно относить рождения порядка n к числу женщин, которые могут иметь рождения данного порядка, а именно к числу замужних способных к деторождению женщин, имевших в прошлом рождения порядка $n—1$. Недавно он усовершенствовал свой метод, приложив его к когортам женщин[54].

7.7. Плодовитость и воспроизводство по числу уже рожденных детей и длительности брака

Можно без труда представить себе формулу, аналогичную предыдущей, но в которой возраст x матери заменен длительностью брака i.

8. Открытые населения

Изменения в территориальном распределении населения неизбежно вызывают целый ряд демографических последствий. Это — откладывание браков, более частое раздельное проживание супругов, уменьшение плодовитости, изменения в возрастном распределении, обусловленные тем, что структура мигрантов всегда отличается

---

[51] Elizaga J. C. *Métodos para medir la fecundidad «actual» de una población. Proceedings of the World Population Conference,* Rome, 1954, vol. 4. United Nations, New York, 1955, p. 291—302.

[52] Bourgeois-Pichat J. La mesure de la fécondité des populations humaines. *Proceedings of the World Population Conference,* Rome, 1954, vol. 4. United Nations, New York, 1955, p. 249—259.

[53] Whelpton P. K. Reproduction rates adjusted for age, parity, fecundity, and marriage. *Journal of the American Statistical Association,* vol. 41, № 236, 1946, p. 501.

[54] Whelpton P. K. Cohort fertility, native white women in the United States. Princeton, N. Y., 1954.

от структуры населения (в местах их выбытия и прибытия). Однако эти проблемы изучаются совершенно недостаточно либо потому, что само явление сложно и испытывает влияние многих факторов, либо потому, что трудно его наблюдение, которое поневоле должно проводиться *post factum*.

Ввиду таких трудностей рассматривалась идея применения моделей, или, иными словами, создания некоторой воображаемой упрощенной ситуации, когда в расчет принимаются только некоторые факторы, и определения — на основе этого абстрактного, но известного в деталях построения — того, какое влияние одна переменная окажет на другие. Таким путем можно определить, например, последствия миграции в населении, для которого известны закономерности изменения плодовитости и смертности.

При таком подходе, предполагающем отказ от гипотезы замкнутого населения, были применены следующие методы исследования:

во-первых, введение миграции в качестве переменной в модели стабильного населения Лотки;

во-вторых, изучение изменений в территориальном распределении населения, когда происходят перемещения между разными районами. Недавно была сделана попытка описания этих изменений на языке матричного исчисления;

в-третьих, применение числовых моделей. Этот метод допускает исследование гораздо более сложных случаев, чем первые два.

8.1. «Стабильные открытые» населения

Для того чтобы население было стабильным, оно совершенно не обязательно должно быть «замкнутым». Здесь можно выделить два случая:

(а) В первом случае сальдо миграции отрицательно (число выбытий превышает число прибытий) и его относительные значения для каждого возраста остаются постоянными. Потери вследствие миграции (или сальдо миграции по возрасту) нельзя отличить от потерь вследствие смертности. Поскольку теория стабильного населения требует только того, чтобы кривая дожития была непрерывной функцией возраста, нет оснований считать, что такое население нельзя рассматривать как стабильное. Все построения Лотки применимы в их первоначальном виде. Только значения $p(x)$ заменяются вероятностями находиться в составе населения в возрасте x, причем эти вероятности оцениваются, начиная с момента рождения.

(б) Во втором случае сальдо миграции положительно (число прибытий превышает число выбытий) и его относительные значения для каждого возраста, как и ранее, остаются неизменными. Если относительные сальдо миграции в каждом возрасте меньше, чем коэффициенты смертности, то население может рассматриваться как стабильное точно так же, как и в первом случае. Если же относительные сальдо миграции в некоторых возрастах превышают коэффициенты смертности, то прибытия, образующие положительные сальдо, можно считать «отрицательными» смертями, а выбытия — обычными смертями. Может быть составлена некоторая таблица «наличия», в любом случае сравнимая с традиционной таблицей смертности, и поэтому мы вправе говорить об «открытом стабильном населении».

Хюрениус[55] показал, каким образом можно выразить эту проблему аналитически.

Пусть $\mu(x)$ — моментный коэффициент смертности в возрасте x и $\nu(x)$ — моментное относительно сальдо миграции в возрасте x. Обычный нетто-коэффициент воспроизводства представляется в виде:

$$S = \int_0^\infty k(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ — коэффициент плодовитости в возрасте x и $k(x)$ — вероятность того, что лицо в возрасте x находится в данном населении, равная:

$$k(x) = e^{-\int_0^x \mu(z) + \nu(z)\,dz}.$$

Величина S по смыслу соответствует обычному нетто-коэффициенту воспроизводства: она представляет собой ожидаемый прирост населения в некотором данном периоде при условии, что наблюдаемые в населении в данный момент плодовитость, смертность и характер миграции в будущем останутся неизменными. Однако период, о котором идет речь, это уже не «средний интервал между двумя поколениями», как в стабильном населении, а сходная с ним величина, которую можно выразить следующим образом:

$$T = \frac{1}{S} K''(-s),$$

где s — истинный коэффициент прироста и $K''(-s)$ — производящая функция кумулянтов произведений вида $\frac{k(x)\,\varphi(x)}{S}$. Заметим, что эта формула сходна с формулой, полученной для замкнутого стабильного населения в гл. 4.

Истинный коэффициент прироста s получен в результате нахождения действительного корня следующего уравнения, как и в случае стабильного населения в уравнении (6):

$$\int_0^\infty e^{-sx} k(x)\,\varphi(x)\,dx = 1.$$

Этот действительный корень, когда он существует, — единственный, по тем же причинам, что и в случае уравнения (6). Затем мы

---

[55] Hyrenius H. Reproduction and replacement rates. *Proceedings of the World Population Conference,* Rome, 1954, vol. 4. United Nations, N. Y., 1955, p. 347—358.

можем показать, что по абсолютной величине он превышает действительные части комплексных корней, так что здесь снова, как и в случае стабильного населения, существует процесс сходимости.

8.2. *Проблема географического распределения населения. Матричный анализ*

Некоторые исследователи, в частности Андерсон[56], Прейс[57], Метрас[58] и Мьюсем[59], попытались в последнее время дать формальное описание мобильности, как географической, так и социальной, на языке матричного исчисления. Их выкладки основывались на данных двоякого рода: о распределении населения по различным районам или группам в некоторый данный момент и о числе лиц, переместившихся из одного района в другой или из одной группы в другую в течение единицы времени. Первое можно представить в виде вектора-строки или вектора-столбца, показывающего число или долю лиц, живущих в данном районе, а второе — в виде квадратной матрицы, каждый элемент которой показывает число или долю лиц, переместившихся из района, обозначенного первым индексом, в район, обозначенный вторым индексом.

Рассмотрим следующий пример. Население распределено по трем районам, а структура его в нулевой момент представлена вектором-строкой $\vec{A}^{(0)}$:

$$|A_1^{(0)} \quad A_2^{(0)} \quad A_3^{(0)}|.$$

Это обозначает, что в нулевой момент времени население распределено следующим образом: $A_1^{(0)}$ — человек в районе 1, $A_2^{(0)}$ — в районе 2 и $A_3^{(0)}$ — человек в районе 3. Предположим, что перемещения, происходящие в течение единицы времени, происходят в соответствии со следующей матрицей M:

$$M = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Эта матрица показывает, что в течение единицы времени доля жителей района 1, равная b_{11}, остается в этом районе, доля жителей района 1, равная b_{12}, переезжает в район 2 и т. д.

---

[56] Anderson T. W. Probability models for analyzing time changes in attitudes. *Mathematical thinking in the social sciences,* ed. by P. F. Lazarsfeld. Glencoe, 1954.

[57] Prais S J. The formal theory of social mobility. *Population Studies,* vol. 9, 1955, p. 72—81; Prais S. J. Measuring social mobility. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A, vol. 118, 1955, p. 56—66.

[58] Matras J. Comparison of intergenerational occupational mobility patterns. *Population Studies,* vol. 14, 1960, p. 163—169.

[59] Muhsam H. V. International migration in open populations. *Entretiens de Monaco en sciences humanies* première session 24—29 mai 1962. *Les déplacements humains. Aspects méthodologiques de leur mesure.* Edited by Jean Sutter, Paris, 1963, p. 159—166; Muhsam H. V. Toward a formal theory of international migration. *International Population Conference,* New York, 1961. London, 1963, vol. 1, p. 333—341.

Структура населения в каждый данный момент n получается путем умножения вектора-строки $A^{(0)}$ на матрицу M, возведенную в степень n, если $A^{(0)}M^n$. По виду этот процесс сходен с тем, который описан в гл. 4, где была сделана попытка представить теорему Лотки в матричной форме. В частности, мы воспользовались там хорошо известной теоремой матричной алгебры, которая, будучи применена к нашей проблеме, показывает, что если считать матрицу миграции неизменной, то структура населения не должна претерпевать изменений.

Можно показать, что если M — квадратная матрица, то существуют положительное число k, вектор-строка $\vec{x}$ и вектор-столбец $\vec{y}$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} M^{(n)} = k^n yx.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = k^n A^{(0)} yx,$$

а так как произведение $A^{(0)}y$ — это скаляр s,

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = sk^{(n)}x.$$

Это говорит о том, что в пределе население каждого района увеличивается одинаковым темпом $(k—1)$ и что в отношении распределения населения по разным районам достигается состояние равновесия.

Как и в случае стабильных населений, предельное распределение не зависит от исходного распределения, которое население как бы «забыло», а испытывает влияние лишь матрицы миграции M. Исходное распределение воздействует лишь на скорость, с какой достигается предельное состояние.

Процесс, посредством которого достигается окончательное равновесие, схематически может быть описан следующим образом. В некоторых районах потоки вовнутрь превышают потоки вовне. Это — районы иммиграции. В районах эмиграции положение обратное. В первых районах население растет с большей скоростью, чем в последних. Предполагается, что потоки пропорциональны общей численности населения районов, откуда они исходят. По мере развития процесса приток в районы иммиграции постоянно уменьшается, так как иммиграционные потоки пропорциональны общей численности населения районов эмиграции, которая увеличивается не так быстро, как численность населения районов иммиграции. С другой стороны, потоки эмигрантов из этих последних районов имеют тенденцию увеличиваться, поскольку они составляют постоянную часть быстро растущей численности населения. Результатом этого оказывается то, что в пределе два противоположных потока каждого района иммиграции будут уравновешивать друг друга. Тот же самый процесс происходит и в районах эмиграции, но в обратном направлении.

Как и в развитии населения, которое, начиная с данного момента, неограниченно подчиняется неизменным режимам плодовитости и смертности, равновесие достигается лишь тогда, когда постепенно уменьшающиеся колебания вокруг истинной структуры населения окончательно исчезают. В пределе остается лишь истинная структура.

Необходимо заметить, что мы предполагали не только неизменность матрицы миграции M, но и то, что население замкнуто, что перед тем, как начинается процесс миграции, каждый район содержит разную долю общего населения и что коэффициент прироста не изменяется.

Интересные усовершенствования в эту схему внес недавно Мьюсем[60]; он рассматривает случай, когда населения распределены по районам, имеющим разные коэффициенты естественного прироста, и тем самым раздвигает рамки указанных выше исследований.

Рассмотрим вновь население, распределенное по трем районам, в которых коэффициенты естественного прироста v_1, v_2 и v_3 предполагаются постоянными во времени. Допустим, что миграция происходит в начале каждого периода, это означает, что иммигранты подвергаются влиянию условий естественного прироста населения того района, в который они прибывают. Эта гипотеза принимается только для удобства, но она не влечет за собой трудностей, особенно если за единицу времени принимается небольшой его период.

Структура населения в начале первого периода представляет собой произведение вектора-строки $A^{(0)}$ и матрицы миграции M. К концу этого первого периода структура становится равной:

$$A^{(1)} = A^{(0)}MV,$$

где V — диагональная матрица:

$$\begin{vmatrix} 1+v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+v_2 & 0 \\ 1 & 0 & 1+v_3 \end{vmatrix}.$$

Замена матрицы M произведением MV эквивалентна замене коэффициентов иммиграции b_{ij} произведениями $b_{ij}(1+v_j)$. Повторяя эту операцию во времени, мы вновь обнаружим, что структура населения достигает предела, так как население каждого района растет с одной и той же скоростью λ, где λ — наибольшее характеристическое число полученной матрицы MV. Следовательно, наступает время, когда различные коэффициенты естественного прироста и коэффициенты миграции, которые также предполагаются неодинаковыми, не будут далее влиять на распределение населения по районам.

---

[60] Muhsam H. V. Isolation of the effect of differential natural growth on international migration. *Congress of the International Union for the Scientific Study of Population*, Ottawa, 1963. Publication pending.

Описанные только что модели были созданы для изучения (лишь при простейших допущениях) вариации в распределении населения по разным районам, между которыми имеются миграционные потоки. Однако с помощью этой модели невозможно принять в расчет другие существенные демографические переменные. В частности, в ней не учитываются различия в коэффициентах рождаемости и смертности между районами или влияние этих различий на возрастные структуры. Это объясняется тем, что коль скоро мы отходим от идеальных условий, принятых Лоткой и Викселлем, трудно определить с помощью математической модели различные возможные взаимодействия в комплексе переменных.

В этом случае может принести пользу метод числовой модели в той мере, в какой вообще математические модели допускают схематические конструкции, более или менее близкие к действительности. Поскольку этот метод предусматривает чисто арифметические вычисления, результаты неизбежно определяются принятыми гипотезами, и поэтому оказывается возможным воспроизвести данную ситуацию или даже, сравнивая две модели, отличающиеся только одной переменной, оценить «вес» этой переменной. Гроумен[61] и Таба и Каталди[62] провели в этом направлении несколько экспериментов. Гроумен сделал попытку исследовать схематически миграционный обмен между городом и сельской местностью на основе средних демографических условий в современной Латинской Америке. Таба и Каталди попытались определить влияние иммиграционных потоков специфической структуры на стабильные населения, квазистабильные населения и на населения в процессе перехода.

Эти модели имеют по необходимости частный характер. Они преследуют цель описать лишь один из аспектов действительности. Необходимо разрабатывать и многие другие модели, вводя в анализ новые переменные и новые гипотезы, такие, как дифференциация миграции по полу, различия в плодовитости и смертности между мигрантами и принимающим их населением, виды возрастной структуры мигрантов, различные возможные тенденции плодовитости и смертности и т. д. Более детальные модели могут описывать совместно районы иммиграции и эмиграции. Эта область недостаточно исследована ввиду ее сложности, но последние достижения в электронной вычислительной технике позволяют продвинуться в ее изучении.

9. Стохастические процессы в демографии

Теория стохастических процессов, в частности марковских процессов, до сих пор применялась главным образом в биологии для

[61] Grauman J. V. Development of a model of rural — urban populaton change, with reference to Latin America. *International Congress for Studies on Population,* New York, 1951, London, 1952, vol. 1, p. 448—458.

[62] Tabah L. and Cataldi A. Effects d'une immigration dans quelques populations modéles. *Population,* vol. 18, 1963, p. 683—696.

изучения развития колоний бактерий. И лишь в самое последнее время эти исследования коснулись изучения человеческих популяций. Математики, работавшие в этой области, начали с простых моделей, включающих относительно небольшое число переменных, а именно коэффициенты рождаемости и смертности, которые они приняли, как мы увидим, не зависящими от времени и от возраста. На основе этих ограниченных гипотез они попытались прийти к тем же результатам, которые демографы получали классическими методами. Следует отметить, что применение стохастических процессов в демографии до сих пор ограничивалось главным образом проблемой измерения роста населения и лишь совсем недавно были исследованы другие аспекты, также, как миграционные движения или плодовитость.

Задача классической теории, которую мы вкратце описали в предыдущих главах, состоит в определении структуры и других существенных демографических характеристик населения, которое, начиная с определенного момента, подчиняется некоторым режимам плодовитости и смертности. Цель вероятностного метода заключается в ином, не в том, чтобы установить численность населения в некоторый произвольный момент времени t, а в том, чтобы определить, приняв некоторый вероятностный закон, случайные вариации, которым следует население, подчиняющееся конкретным режимам плодовитости и смертности. Принимается следующая гипотеза: структуру и другие существенные характеристики населения в некоторый произвольный момент времени t можно определить *с некоторой вероятностью,* если нам известны исходная его структура и закономерности, которым с данного момента подчиняется развитие процессов плодовитости и смертности.

В этом случае вместо того, чтобы определять состояние, в котором будет находиться население в момент t спустя некоторое время после начала отсчета, вычисляются величины, которые представляют собой вероятности различных состояний в эти моменты времени t и меры случайных колебаний вокруг средних значений. Как и в классической теории, развитие населения начинается с заданного момента и при точно определенных условиях и испытывает соответственно воздействие как исходного состояния, так и установленных заранее условий роста.

9.1. Простой процесс: рождения и смерти

Простейшая модель строится на основе гипотезы об изменении коэффициентов рождаемости и смертности и предположения, что оба эти показателя независимы от времени, причем не делается никаких допущений о характере изменений коэффициентов плодовитости и смертности как функций возраста.

Пусть b и d — коэффициенты рождаемости и смертности, с которыми мы уже встречались в детерминистских моделях, имеющие то же значение. В данном случае мы вновь начнем с предположения, что население замкнуто и ограничимся рассмотрением лишь его женской части, так как мужская часть приводится в соответствие с женской автоматически.

Пусть $n_t = n$ — случайная переменная, представляющая собой число индивидуумов в населении в момент t, а $P_n(t+dt)$ — вероятность того, что в момент $t+dt$ число индивидуумов составит $n=n_t$.

Эту вероятность $P_n(t+dt)$ можно выразить через сумму трех следующих величин:

1. Вероятности того, что n индивидуумов, живущих в момент времени $t+dt$, происходят из группы $n+1$ индивидуумов, живших в момент времени t, в которой в интервале времени dt произошла одна смерть:

$$P_{n+1}(t)\, d\,(n+1)\, dt.$$

2. Вероятности того, что n индивидуумов, живущих в момент времени $t+dt$, происходят из группы $n-1$ индивидуумов, живших в момент t, в которой в интервале времени dt произошло одно рождение:

$$P_{n-1}(t)\, b\,(n-1)\, dt.$$

3. Вероятности того, что среди n индивидуумов, живших в момент t, в интервале времени t, $t+dt$ не было ни одного случая смерти или рождения:

$$P_n(t)\,[1-(b+d)\,dt]^n$$

и, пренебрегая членами, содержащими dt в степени выше второй:

$$P_n(t)\,[1-n\,(b+d)\,dt].$$

Таким образом, вероятность $P_n(t+dt)$ можно записать в виде суммы приведенных выше трех членов. Из этого уравнения мы выводим два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n+1}(t)\; d\,(n+1) + P_{n-1}(t)\, b\,(n-1) - P_n(t)\, n\,(b+d);$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = dP_1(t)$$

с начальными условиями:

$P_n(0)=1$, если $n=n_0$ (т. е. достоверно, что в нулевой момент имелось n_0 индивидуумов);

$P_n(0)=0$, если $n \neq n_0$ (т. е. равна нулю вероятность того, что население в нулевой момент состоит из числа индивидуумов, отличного от n_0).

Обозначим через $\varphi(z, t)$ производящую функцию $P_n(t)$, где z — вспомогательная переменная, которая изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Для того чтобы найти $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$, т. е. вероятности того, что в момент t население будет состоять из $0, 1, \ldots, n$ индивидуумов, разложим эту производящую функцию по степеням z, причем по определению производящей функции коэффициент при z^n будет равен $P_n(t)$ Общее решение имеет вид:

$$\varphi(z, t) = \left[\frac{(b_z - d) - (1-z)\,de^{rt}}{(b_z - d) + (1-z)\,be^{rt}}\right]^{n_0}.$$

Полагая $z=0$ в выражении для $\varphi(z, t)$, находим вероятность вымирания:

$$P_0(t) = \left[\frac{de^{rt} - d}{be^{rt} - d}\right]^{n_0}.$$

Рассмотрим теперь три случая: коэффициент прироста отрицателен, равен нулю или положителен.

r<0

При t, стремящемся к бесконечности, мы видим, что $P_0(t)$ стремится к 1. Это означает, что при данной гипотезе население будет вымирать. Скорость этого процесса зависит как от исходной численности населения, так и от его коэффициента прироста.

r=0

Как и в предыдущем случае, находим, что, по мере того как t стремится к бесконечности, вероятность вымирания стремится к 1. Это интересное заключение, полученное с помощью вероятностного метода, дает новый результат по сравнению с тем, что указывал детерминистский метод: население, считающееся «стационарным» в классическом смысле слова почти достоверно становится вымирающим. Скорость этого процесса зависит от коэффициентов рождаемости и смертности, которые предполагаются равными, и от исходной численности населения.

r > 0

Предел $P_0(t)$ при t, стремящемся к бесконечности, равен $\left[\frac{d}{b}\right]^{n_0}$.

Следовательно, в этом случае вероятность вымирания населения не равна нулю, но чем больше коэффициент прироста населения, тем эта вероятность будет меньше. Рассмотрим числовой пример: предположим, что коэффициент рождаемости равен 40 промилле, а коэффициент смертности — 30 промилле, так что коэффициент прироста составляет 1%. Эти условия довольно близки к режиму воспроизводства населения, который считается в демографии «естественным», т. е. к режиму, существовавшему в европейских странах перед началом демографического перехода, или в развивающихся странах 10—20 лет назад. Применяя вышеуказанную формулу, найдем следующие вероятности вымирания:

	$n_0=1$	$n_0=10$	$n_0=100$
в момент $t=1$	$29\cdot10^{-3}$	$40\cdot10^{-17}$	10^{-155};
в момент $t=10$	$21\cdot10^{-2}$	$20\cdot10^{-8}$	10^{-68};
в момент $t=100$	$60\cdot10^{-2}$	$61\cdot10^{-4}$	$65\cdot10^{-22}$,
в момент $t=1000$	$73\cdot10^{-2}$	$44\cdot10^{-3}$	$27\cdot10^{-15}$.

Можно видеть, что если исходная численность населения больше 10, то эти вероятности пренебрежимо малы. Тем не менее со временем они увеличиваются до тех пор, пока не достигают асимптотически величины, равной $\left[\frac{d}{b}\right]^{n_0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n_0}$.

Эти вероятности вымирания не принимают, конечно, во внимание риска исчезновения, обусловленного неуравновешенностью структуры, скажем, ненормальной долей мужчин, препятствующей образованию брачных союзов.

Если вместо вероятности вымирания рассмотреть вероятность $P_n(t)$ того, что в момент t будет достигнута некоторая конкретная численность населения, то окажется, что при t, стремящемся к бесконечности, эта вероятность приближается к нулю. Это означает, что численность населения не стремится асимптотически к какой-либо величине. Такой результат вряд ли удивителен, так как коэффициент прироста населения положителен. Фактически оказывается, как и в традиционной демографии, что математическое ожидание n_t или — что то же самое — число индивидуумов в момент t при $n_0=1$ изменяется по экспоненциальному закону, как и в случае экспоненциального населения.

Более сложны здесь проблемы, связанные с изменением возрастной структуры. Кендел[63] показал, что возрастная структура остается постоянной, как и в случае экспоненциальных или стабильных населений. Но его доказательство основывалось на предположении, что режим смертности не зависит не только от времени, но и от возраста. Вероятность дожить от момента t до момента $t+dt$ он принял одинаковой для всех индивидуумов независимо от их возраста. Если эта гипотеза приемлема для бактерий, то для человеческих популяций ее следует отвергнуть. Мы видели, что традиционная демография не допускает, что возрастная структура населения может быть постоянной, если предполагается лишь, что постоянны коэффициенты рождаемости и смертности. Чтобы прийти к такому заключению, необходимо дополнительное условие. В случае экспоненциального населения такое условие состояло в том, что порядок дожития в каждом возрасте не зависит от времени. Кендел же, применяя вероятностный метод, предполагает, что порядок дожития не зависит ни от времени, ни от возраста, но применительно к человеческим популяциям эта гипотеза слишком далека от действительности.

Пользуясь теми же гипотезами, Кендел вычислил распределение вероятностей числа потомков у элемента популяции, как это уже проделал Лотка с помощью классического метода, предположив, что возрастные характеристики плодовитости и смертности постоянны.

9.2. Населения, состоящие из индивидов двух типов

На протяжении всего предшествующего изложения предполагалось, что население состоит только из женщин и что число мужчин

---

[63] Kendall D. G. On the generalized birth-and-death process. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 19, 1948, p. 1—15; Kendall D. G. Stochastic processes and population growth. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, vol. 11, 1949, p. 230—264; Kendall D. G. Random fluctuations in the age-distribution of a population whose development is controlled by the simple «birth-and-death» process. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, vol. 12, 1950, p. 278—285; Kendall D. G. Les processus stochastiques de croissance en biologie. *Annales de l'Institut de H. Poincaré*, vol. 13, 1952, fasc. 1, p. 43—108.

приводится в соответствие с числом женщин автоматически. Гудмен[64] и Джоши[65] исследовали стохастическую модель, включающую индивидов двух типов, которые они обозначили соответственно как тип I, и тип II, причем каждый из типов имел свои коэффициенты рождаемости и смертности. Они предположили, что тип I (например, женщины) рождают индивидов как типа I, так и типа II, в то время как индивиды типа II (мужчины) сами не воспроизводятся. Как и при простом процессе «рождение — смерть», исследованном Кенделом, они предположили, что коэффициенты рождаемости и смертности не зависят от возраста и времени. Эти два автора показали, что в этом случае при t, стремящемся к бесконечности, отношение математического ожидания числа мужчин к математическому ожиданию числа женщин стремится к некоторой постоянной; это означает, что в пределе устанавливается постоянная доля мужчин. Если предположить, далее, что коэффициенты смертности мужчин и женщин равны, то отношение числа мужчин к числу женщин во всем населении становится равным значению того же отношения для новорожденных.

Вероятность вымирания зависит только от женщин. Из этого сразу же следует, что если коэффициент рождаемости женщин меньше их коэффициента смертности или равен ему, то вероятность вымирания очень велика, в то время как, если коэффициент рождаемости женщин больше их коэффициента смертности, то вероятность вымирания сводится к отношению коэффициента смертности женщин к их коэффициенту рождаемости. Можно заметить, что эти результаты довольно близки к тем, которые были получены в более простой модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

9.3. Попытки сконструировать более сложные модели

Некоторые авторы попробовали пойти дальше того, что мы только что рассмотрели, и попытались применить стохастический метод к моделям, основанным на более сложных гипотезах. В зависимости от их цели, эти попытки можно подразделить на три группы:

1. Модели, предполагающие, что коэффициенты плодовитости и смертности не зависят от возраста, но зависят от времени. Этот путь исследования представлен в основном работами Кендела[66] и Конселя[67]. Однако эти модели не всегда полезны для демографов, поскольку, как мы уже видели, трудно согласиться с предположением, что коэффициент плодовитости во всех возрастах одинаков. В человеческих популяциях этот коэффициент обычно равен 0 до

---

[64] Goodman L. A. Population growth of the sexes. *Biometrics,* vol. 9, 1953, p. 212—225.

[65] Joshi D. D. Les processus stochastiques en démographie. *Publicatins de l'Institut de Statistique de l'Universités de Paris,* vol. 3, 1954, p. 153—177.

[66] Kendall D. G. Op. cit.

[67] Consael R. Sur quelques points de la théorie des processus stochastiques; Consael R., Lamens A. Processus markoviens d'embranchement en démographie. *Bulletin de l'Institut International de Statistique,* vol. 37, 1960.

возраста 15 лет, затем быстро увеличивается приблизительно до возраста 25 лет, а после этого снижается, становясь равным нулю в возрасте 50 лет. Точно так же трудно принять, даже в качестве первого приближения, что одинаков во всех возрастах коэффициент смертности. Эти гипотезы приемлемы для бактерий, но для человеческих популяций их следует отвергнуть.

2. Модели, в которых коэффициенты плодовитости и смертности зависят от возраста, но не зависят от времени. Эти гипотезы точно соответствуют гипотезам, принятым в модели стабильного населения Лотки. К сожалению, эта проблема пока полностью не решена.

3. Модели, в которых население рассматривается не как замкнутое, а как открытое для притока иммигрантов (эмигранты трактуются как умершие). В работе Бартлета[68] описана модель процессов «рождаемость — смертность — иммиграция», которая служит обобщением первой из описанных здесь моделей на случай, когда коэффициенты рождаемости, смертности и иммиграции постоянны во времени.

Интересная попытка применить метод стохастических процессов для описания некоторых аспектов воспроизводства была сделана недавно Перрином и Шепсом[69]. В отличие от только что рассмотренных исследований, в которых плодовитость была представлена как часть всего процесса воспроизводства населения и принимались во внимание отношения между разными переменными, в этой работе рассматривается только фактор плодовитости независимо от возрастной структуры или от других демографических элементов.

Женщина, выходя замуж в момент t_0, когда она способна к деторождению, но не беременна, может в некоторый произвольный момент $t > t_0$ находиться в одном из нескольких состояний: она может быть способной к деторождению, но не беременной или быть беременной, или находиться в периоде временной стерильности вследствие произошедшего у нее рождения живого ребенка, выкидыша или мертворождения. Репродуктивная история женщины определена заранее, если для нее известна последовательность этих различных состояний и их длительность. В модели предполагается, что переход из одного состояния в другое и длительность каждого состояния есть случайные переменные, не зависящие от возраста женщины и очередности данного состояния. При этих условиях модель дает возможность определить число живорождений, выкидышей и мертворождений за интервал времени dt, а также их дисперсии. На основе этих данных для каждого цикла (в один месяц) после замужества вычисляются коэффициенты, характеризующие частоту зачатий.

Луи Анри[70] провел исследования, аналогичные работам Перрина и Шепса, но продвинулся несколько дальше; он предположил,

---

[68] Bartlett M. S. An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications. Cambridge, 1956.

[69] Perrin F. B. and Sheps M. C. Human reproduction: a stochastic process. *Biometrics*, vol. 20, № 1, p. 28—45.

[70] Henry L. Fécondité et famille. *Population*, vol. 12, 1957, n. 3, p. 413—444.

что переход из одного состояния в другое — случайная переменная, зависящая от возраста женщины, в то время как Перрин и Шепс полагали их неизменными.

Читатель найдет прекрасное описание всех этих разнообразных моделей в работе, опубликованной Джоши[71], или в работе Конселя и Ламанса[72].

10. Заключение

В последние годы демография, которую часто называли наукой, начавшейся на пустом месте, без учителей и без учебников, значительно обогатилась благодаря связям с другими общественными науками и, в свою очередь, приступила к упорядочению применяемых ею понятий, приемов и методов, обобщая тем самым свои достижения. Пожалуй, самое примечательное в этом процессе состоит в том, что демографы, по мере того как они углубляются в исследуемую ими область, подвергают сомнению свои методики. Отсюда изобилие в последнее время работ, подчеркивающих методологические аспекты исследования.

Завершая свое исследование в этой области, мы должны подытожить и обрисовать заметные здесь тенденции. Напомним, что в этой работе мы ограничились исследованиями, посвященными изменениям возрастной структуры и тем причинам этих изменений, которые связаны с плодовитостью, смертностью и миграцией. Такого рода исследования закономерно привели демографов к разработке показателей прироста населения, не испытывающих осложняющего влияния возрастной структуры, и мы шаг за шагом следовали за авторами в избранном ими направлении.

Эта область исследования принадлежит исключительно демографии, ее не касается никакая другая дисциплина. Поэтому интересно изучить те методы, которыми пользуется демография для решения своих задач и которые, как мы видели, целиком принадлежат ей.

Если рассматривать опубликованные по этому предмету работы, то, пожалуй, самое удивительное заключается в том, что основой почти всех проводимых сейчас исследований служит почти полувековой давности работа Лотки: часто они просто продолжают это направление. Важно отметить, что некоторые наиболее серьезные авторы считают необходимым повторить традиционные доказательства либо в дискретных переменных вместо непрерывных переменных, которыми пользовался Лотка, либо путем вероятностного подхода вместо детерминистского подхода. Естественно, что при значительном развитии математических методов к решению этой проблемы следовало применить новые средства, которыми стали располагать исследователи. Поэтому, стремясь к чистоте доказательства,

---

[71] Joshi D. D. Op. cit.

[72] Consael R., Lamens A. Méthodes déterministes et probabilistes de l'analyse démographique. *Biométrie — Praximétrie,* vol. 3, n. 2—3, 1962, p. 83—112.

что, несомненно, говорит в их пользу, математики попытались, не умаляя фундаментального значения теоремы Лотки, несколько более строго и точно сформулировать условия, при которых она справедлива, чему сам ее автор, как они ощущали, не придал должного значения...

В развитии демографических исследований в рассматриваемой области можно выделить, как мы видели, следующие направления:

1. Новые методы доказательства прежних теорем.
2. Обобщения применительно к гипотезам о постоянстве во времени норм плодовитости и смертности.
3. Создание системы модельных населений и ее применение.
4. Введение в анализ переменных, иных, чем возраст матери.
5. Переход от поперечного к продольному анализу.
6. Исключение гипотезы о том, что население замкнуто.

Подытожим каждое из них.

1. Что касается методов доказательства, то доказательства Лотки, как мы уже говорили, были повторены в дискретных переменных или с помощью матричного исчисления, что значительно облегчило дальнейшее развитие исследований. Последние работы показали, что такой подход к изучению проблемы был интересным не только с чисто формальной стороны, но и по существу, поскольку он указал если не более изящный, то, во всяком случае, более легкий способ снять ограничивающие условия теоремы Лотки, особенно в отношении гипотезы о постоянстве норм плодовитости и смертности.

О применении стохастических методов судить труднее. Прежде всего они дали возможность, при поиске основных результатов, полученных традиционным детерминистским методом, вновь исследовать простейшую модель (с не зависящими от времени коэффициентами рождаемости и смертности), на этот раз вычисляя вероятности различных состояний населения в разные моменты времени после исходного момента и колебания вокруг средних значений, например вероятность вымирания населения в момент t. На этом пути были получены некоторые новые результаты, такие, как очень высокая вероятность вымирания стационарного населения. При детерминистском подходе экспоненциальное население растет до бесконечности, если коэффициент прироста положителен, и убывает до нуля, если он отрицателен. Стохастический метод показывает, что даже если коэффициенты рождаемости и смертности одинаковы, то население почти наверное вымирает. К сожалению, оказалось невозможным провести анализ с учетом возрастной структуры так, чтобы он удовлетворил демографов (коэффициенты смертности были приняты независимыми от возраста). Гипотезы, в точности соответствующие гипотезам для стабильных населений (независимость от времени возрастных коэффициентов плодовитости и смертности), чреваты, по признанию самих авторов, серьезными трудностями аналитического характера и пока еще не привели к удовлетворительному решению проблемы. Напротив, введение фактора миграции, привнесённого в традиционную демографическую схему лишь в самое последнее время, показало большую плодотворность стохастического метода. Следует отметить успешное применение этого метода в некоторых менее общих моделях, как, например, модели плодовитости, рассматриваемой вне связи с другими демографическими переменными. В этом направлении в последней работе Перрина и Шепса были получены результаты, к которым Анри пришел ранее другим путем.

2. Среди попыток обобщить теорему Лотки в отношении гипотезы, что нормы плодовитости и смертности постоянны, наиболее существенным было доказательство Лопеçом в 1962 г. явления *слабой эргодичности,* важность которого в теоретическом отношении несомненна. Эта новая теорема, напомним, показывает, что два населения, подверженные одним и тем же режимам плодовитости и смертности, стремятся иметь одинаковые возрастные распределения, даже если исходное их состояние различно, а режимы плодовитости и смертности со временем изменяются. Как указали Хеджнел и Коул, такие населения в конце концов «забывают» свою прошлую структуру и становятся зависимыми только от конечных уровней плодовитости и смертности.

Следует упомянуть также о попытках дать математическое выражение прохождению населения через четыре фазы демографического цикла, сделанных, в частности, Райдером — одним из немногих исследователей, взявшихся за разрешение этой сложной проблемы. Этот демографический цикл, как известно, сводится к сдвигу кривых плодовитости и смертности между двумя стационарными состояниями, характеризующимися разной степенью равновесия этих двух процессов: одно соответствует первоначальному демографическому состоянию, без контроля рождаемости, а в другом — снижение смертности уравновешено контролем рождаемости. Хотя этот переход довольно хорошо описан по фактическим данным для европейских стран, с теоретической точки зрения в нем еще много неясного. Основная трудность связана с преобразованием показателей рождаемости и смертности для реальных поколений в показатели рождаемости и смертности для ряда последовательных календарных лет.

В последнее время были изучены также конкретные фазы этого цикла, как, например, переход от стабильного состояния к состоянию, характеризующемуся снижением смертности и неизменной плодовитостью. До сих пор очень мало исследованы в теоретическом отношении населения, входящие в эту фазу, так называемые *квазистабильные* населения. Для них еще не найдено функциональных соотношений между структурой и компонентами движения, т. е. плодовитостью и смертностью. Тем не менее было показано, что на практике для таких населений можно применять вполне успешно основные формулы экспоненциальных населений. Последнее соображение вытекает из результатов исследований Буржуа-Пиша, показавшего, что населения, возрастное распределение которых не изменяется во времени (а это справедливо почти для всех квазистабильных населений), можно отождествить с экспоненциальными населениями, соответствующими нормам дожития и коэффициентам рождаемости или коэффициентам прироста, наблюдаемым в тот или иной момент времени. Таким образом, для квазистабильных населений, какими часто оказываются населения развивающихся стран, формула Лотки в основном сохраняет свое значение.

3. Понятие стабильного населения, предложенное для европейских стран в конце прошлого века, легло в основу системы числовых таблиц, содержащих характеристики стабильных населений, отвечающих различным уровням плодовитости и смертности; такие таблицы были рассчитаны Отделом населения ООН и Л. Таба в Латино-Американском демографическом центре. Для того чтобы эти таблицы можно было с большим основанием применить в развивающихся странах, для которых они и предназначались, таблицы были естественно обобщены путем передвижки по возрастам на случай населений квазистабильного и переходного типа. Полностью значение таких таблиц показали Буржуа-Пиша и Коул, доказав их ценность для разрешения проблем, связанных с оценкой основных демографических переменных, разумеется, без каких бы то ни было претензий на получение совершенно точных решений. Другое достоинство этих таблиц заключается в том, что они показывают последствия некоторых современных тенденций в развитии населения и «вес» отдельных переменных в хорошо известных демографических ситуациях, например влияние сокращения смертности на возрастные структуры или совместный эффект сокращения смертности и уменьшения плодовитости, когда последнее только начинается и когда оно набирает скорость, по мере того как происходит демографическая революция.

4. Построения Лотки относились только к одному полу; в то же время для того, чтобы избежать несовместимости коэффициентов прироста для мужчин и для женщин, предполагалось, что они самопроизвольно приспосабливаются один к другому, хотя о механизме такого приспособления ничего не было сказано. Коль скоро на основании наблюдений, относящихся к данному моменту, строится теоретическое население, состоящее из индивидуумов двух полов, модель Лотки почти всегда приводит к тому, что показатели воспроизводства для мужчин и для женщин расходятся между собой. Авторы, пытавшиеся справиться с этой трудной проблемой в 1946—1948 гг. или около этого времени, не нашли окончательного ее решения. Однако их заслуга в том, что они побудили провести между 1948 и 1955 гг. ряд исследований, в результате чего в традиционную модель были введены факторы, которыми до того, несмотря на их важность, пренебрегали, очевидно, вследствие связанных с ними трудностей. Такими факторами явились, в частности, брачность и промежутки времени между разными событиями в процессе формирования семей. Были предложены новые показатели возобновления, которые во многих случаях заключались в возрождении построений Лотки: функция дожития оставалась при этом прежней, но в функции плодовитости переменная возраста матери заменялась другими переменными, такими, как продолжительность брака, возраст вступления в брак или даже сочетание этих переменных

или одной из них с возрастом матери. Практически речь шла о вычислении коэффициентов воспроизводства для условных поколений женщин, неограниченно подверженных условиям данного момента в отношении плодовитости, смертности и брачности. В других случаях во внимание принимались браки и календарь рождений, т. е. промежутки времени между браком и первым рождением или между последовательными рождениями, иногда в сочетании с упомянутыми ранее переменными. Таким образом, модели постепенно усложняются. Они становятся как более строгими, так и охватывающими все большее число факторов, чтобы ближе подойти к действительности, и тем самым значительно приближают демографию к другим социальным наукам. В связи с этим следует упомянуть работы Джини, которые фактически восходят к периоду до второй мировой войны, а также работы Кармела, Квенселя, Кларка и Дайна, Буржуа-Пиша, Уэлптона и Анри.

5. Описанные только что дополнения и уточнения моделей есть в сущности результат их большей конкретизации. В основе традиционных методов лежит идея применения моделей с целью разделить, при данном состоянии населения, то, что можно приписать влиянию условий данного момента, и то, что обусловлено влиянием структуры, т. е. прошлого. Эта задача осталась неизменной, но была расширена путем введения новых переменных.

При изучении сдвигов, вызванных кризисом 1930-х годов, и вообще всякий раз, как демографические процессы сначала тормозились, а затем восстанавливались, было замечено, что влияние на годовое число рождений условий данного момента и структур, обусловленных прошлым, трудно разделить с помощью условного, поперечного анализа — иначе говоря, наблюдая рождения в разнородной группе женщин, которые принадлежат к разным когортам и поэтому в прошлом, особенно в период сдвига, могли вести себя в этом отношении совершенно по-разному. Вычисление на основе таких наблюдений некоторого обобщающего показателя — скажем коэффициента воспроизводства или, с тем же успехом, истинного коэффициента прироста, могло дать противоречивые, а иногда и абсурдные результаты — скажем, число первых рождений, превышающее число заключенных браков. Кроме того, обобщающие показатели для данного момента иногда создают ошибочное представление, что происходят колебания числа событий на душу населения, в то время как в действительности лишь изменилось распределение событий во времени. Так, например, сначала задержка, а затем наступление демографических событий, не оказывая влияния на общее число этих событий в каждом поколении, в показателях для календарного момента могут вызвать сильные колебания. Бессмысленно предполагать, что положение, наблюдавшееся в каждой точке этих колебаний, может сохраняться бесконечно. Поэтому после некоторых сомнений стали считать предпочтительными продольные обобщающие показатели для когорт и стали вычислять исчерпанную плодовитость в когортах женщин, поведение которых изучалось применительно не к одному календарному году, а ко всему периоду, когда они могут иметь детей. Среди упомянутых в предыдущем пункте авторов особенно известны своими исследованиями в этом направлении Уэлптон и Анри. Уэлптон анализировал такие переменные, как очередность рождения и возраст матери, а Анри — переменную очередность рождения, причем ввел новое понятие, получившее с тех пор широкое признание: *вероятность увеличения семьи,* называемое также вероятностью следующего рождения.

6. Последнее ограничение, налагаемое теоремой Лотки, это гипотеза, что население замкнуто. В действительности можно без большого труда ввести в модель, как предложил Хюрениус, функцию относительного сальдо миграции, которая в основном уравнении играла бы роль, аналогичную роли функции дожития. Это приводит к вычислению истинного коэффициента прироста, по смыслу почти не отличающегося от традиционного коэффициента: он представляет собой предельный коэффициент прироста для населения, неопределенно долго подчиняющегося режимам плодовитости, смертности и миграции, существующим в данный момент. Как и в случае стабильных населений, необходимо, разумеется, еще определить, при каких условиях эта теорема справедлива (условие непрерывности функций, превосходство по абсолютной величине действительного корня над действительными частями комплексных корней, чтобы обеспечивалась сходимость и т. д.).

Последняя очень интересная в теоретическом отношении работа, выполненная в основном Мьюсемом, посвящена изучению распределения населения по нескольким группам (безразлично географическим или социальным), между которыми существует миграция и которые могут различаться коэффициентами прироста. Ранее мы уже указали, насколько тесно связан этот процесс с процессом стабилизации населения, и не будем к этому возвращаться. Следует, однако, подчеркнуть ценность доказательств, проведенных в матричном исчислении.

В заключение можно сказать, что желательно, по-видимому, разрабатывать новые числовые модели для открытых населений с миграционными потоками как в них, так и из них, которые основывались бы на данных наблюдения и предусматривали бы целый ряд переменных и гипотез. Правда, как показали последние исследования, это связано с долгими и сложными вычислениями, так что легко представить себе, что успех в этой области может быть достигнут с применением электронной вычислительной техники.

Перевод *Е. М. Андреева, А. Г. Волкова, Л. Е. Дарского*

Жан Буржуа-Пиша

АНАЛИЗ НАСЕЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЕГО СТАБИЛИЗАЦИИ

Calculations of the total number of the population, annual births, annual growth and annual deaths in a stable population on the basis of a given initial population. The concept of a stable population. Application to the Study of populations of countries with incomplete demographic statistics. ST/SOA/Series A/39. (*Population studies*, № 39). United Nations. New York, 1968, ann. I, p. 117—137.

А. Введение

В гл. 3 настоящего труда[1] было дано понятие стабильного населения как предельного состояния некоторого исходного населения в результате процесса демографического развития, характеризуемого постоянной плодовитостью и постоянной смертностью. Отмечалось также, что, как показал Альфред Дж. Лотка, в ходе подобного процесса население приближается к стабильному экспоненциальному населению, или же, проще говоря, к стабильному населению, соответствующему принятым неизменными режимам смертности и плодовитости. Там же были выведены формулы, позволяющие вычислить для этого стабильного населения истинный коэффициент естественного прироста населения, общий коэффициент рождаемости, возрастное распределение населения и возрастное распределение смертей.

Были также приведены, *но без доказательств* формулы для вычисления общей численности населения и абсолютного числа рождений и смертей в предельном стабильном населении. Далее будет приведен вывод этих формул.

Б. Общая численность населения

Пусть в исходном населении — в нулевой момент времени — численность женщин в возрасте a равна $K_f(a, 0)da$. В момент времени y их численность возрастет до

---

[1] The concept of a stable population. Application to the study of populations of countries with incomplete demographic statistics, ST/SOA/Series A/39. United Nations. New York, 1968, p. 45—52.

$$\frac{K_f(a,\ 0)\,p_f(a+y)}{p_f(a)}\,da,$$

где $p_f(a)$ — функция дожития женщин, которая предполагается постоянной во времени. За период dy они родили dB дочерей, так что

$$dB = \frac{K_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\,p_f(a+y)\,\varphi_f(a+y)\,da\,dy,$$

где $\varphi_f(a+y)$ — коэффициент плодовитости женщин возраста $(a+y)$, вычисляемый для рождений только девочек. Согласно теореме Лотки для этой части рождений по прошествии достаточно длительного времени $(t—y)$ население, получающееся из соответствующей части родившихся, dB, становится стабильным. Общая численность этого населения, выраженная через dB, будет тогда экспоненциальной функцией времени, прошедшего с момента рождения, и будет линейной функцией исходной общей численности dB.

Иными словами, когда период времени t достаточно велик, исходная совокупность dB дочерей будет составлять женское население общей численностью:

$$Q\,\frac{K_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\,p_f(a+y)\,\varphi_f(a+y)\,e^{r(t-y)}\,da\,dy,$$

где Q — постоянная, остающаяся неизменной вне зависимости от возраста a и зависящая только от функций $p_f(a)$ и $\varphi_f(a)$, а r — истинный коэффициент естественного прироста стабильного населения, соответствующего режимам смертности и плодовитости $p_f(a)$ и $\varphi_f(a)$.

В момент времени t общее женское население, потомство совокупности женщин $K_f(a,\ 0)\,da$ нулевого момента времени, будет равно:

$$dN = \frac{QK_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\,da\int\limits_0^{v-a} p_f(a+y)\,\varphi_f(a+y)\,e^{r(t-y)}\,dy,$$

где v — возраст наступления менопаузы, после которого функция плодовитости $\varphi_f(y)$ становится равной нулю. Полагая $a+y=x$, это выражение можно записать как

$$dN = \frac{QK_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\,da\int\limits_a^{v} p_f(x)\,\varphi_f(x)\,e^{r(t+a-x)}\,dx$$

или же

$$dN = \frac{QK_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\,e^{r(t+a)}\,da\int\limits_a^{v} p_f(x)\,\varphi_f(x)\,e^{-rx}\,dx,$$

Предположим, что

$$g(a) = \int_a^v p_f(x)\,\varphi_f(x)\,e^{-rx}dx.$$

Тогда мы можем записать:

$$dN = Qe^{rt}\frac{K_f(a, 0)}{p_f(0)}\,e^{ra}g(a)\,da.$$

В момент времени t численность женского населения, представляющего собой потомство всех женщин момента времени нуль, будет:

$$N_f(t) = Qe^{rt}\int_0^v \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}\,e^{ra}g(a)\,da. \qquad (1)$$

Вычисление постоянной Q

Теперь обратимся к вычислению Q. Допустим, что в нулевой момент существует второе женское население, *равное единице* и имеющее возрастную структуру стабильного населения, отвечающего режимам $p_f(a)$ и $\varphi_f(a)$. В этом населении численность женщин возраста a равна

$$\frac{e^{-ra}p_f(a)}{\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da}\cdot 1.$$

В момент времени t численность рассматриваемого населения будет равна $e^{rt}\cdot 1$; и здесь можно применить формулу (1). Соответственно получаем, что

$$e^{rt} = Qe^{rt}\int_0^v \frac{e^{-ra}p_f(a)}{\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da}\cdot\frac{1}{p_f(a)}\cdot e^{ra}g(a)\,da.$$

Это можно записать как

$$\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da = Q\int_0^v g(a)\,da,$$

что в конечном итоге дает

$$Q = \frac{\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da}{\int_0^v g(a)\,da}.$$

Введя это значение Q в формулу (1), мы получим следующую формулу для общей численности населения в стабильном состоянии:

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{\infty} e^{-ra} p_f(a)\, da \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} \frac{g(a)}{\int_0^{v} g(a)\, da} e^{ra} da$$

или же

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{\omega} e^{-ra} p_f(a)\, da \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a)\, e^{ra} da. \qquad (2)$$

Полагая, что

$$G(a) = \frac{g(a)}{\int_0^{v} g(a)\, da}, \qquad (3)$$

мы можем также записать:

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{C_f(a)} G(a)\, da, \qquad (4)$$

где $C_f(a)$ — возрастное распределение женского стабильного населения.

Если коэффициент прироста r равен нулю, то население стационарно, и формула (2) принимает вид:

$$N_0(t) = \int_0^{\omega} p_f(a)\, da \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a)\, da$$

или

$$N_0(t) = e_0^0 \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a)\, da. \qquad (5)$$

Тогда формулу (4) можно записать как

$$N_0(t) = \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{{}_0C_f(a)} G(a)\, da, \qquad (6)$$

где ${}_0C_f(a)$ — возрастная структура стационарного населения.

Ежегодные рождения, смерти и прирост

Годовое число женских рождений получается путем умножения общей численности населения на общий коэффициент рождаемости стабильного населения.

$$b_f = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-ra} p_f(a)\, da}$$

или

$$B_f(t) = e^{rt} \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)\, e^{ra}}{p_f(a)} G(a)\, da. \qquad (7)$$

Годовой прирост женского населения равен произведению общей численности женского населения на истинный коэффициент естественного прироста r. Мы таким образом получаем:

$$A_f(t) = re^{rt}\int_0^{\omega} e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^{v}\frac{K_f(a,0)\,e^{ra}}{p_f(a)}G(a)\,da. \tag{8}$$

Годовое число женских смертей есть

$$D_f(t) = B_f(t) - A_f(t). \tag{9}$$

Мужское население

Вышеприведенные формулы относятся к женскому населению. С их помощью легко вывести характеристики мужского населения. Подсчитаем сначала годовое число мужских рождений. Если m есть соотношение числа мальчиков и девочек при рождении, то, очевидно, что

$$B_m(t) = mB_f(t),$$

откуда

$$B_m(t) = me^{rt}\int_0^{v}\frac{K_f(a,0)\,e^{ra}}{p_f(a)}G(a)\,da.$$

Численность мужского населения $N_m(t)$ равна ежегодному числу мужских рождений, деленному на мужской коэффициент рождаемости:

$$b_m = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-ra}\,p_m(a)\,da}.$$

Соответственно

$$N_m(t) = me^{rt}\int_0^{\omega} e^{-ra}p_m(a)\,da\int_0^{v}\frac{K_f(a,0)\,e^{ra}}{p_f(a)}G(a)\,da.$$

Годовой прирост мужского населения равен численности населения, умноженной на истинный коэффициент естественного прироста

$$A_m(t) = rN_m(t).$$

И наконец, годовое число мужских смертей получается как разность годового числа рождений и годового прироста

$$D_m(t) = B_m(t) - A_m(t).$$

Приведенное исходное население

Во всех приведенных формулах участвует исходное женское население $K_f(a,0)$ в возрастах от 0 до v лет. Исходное население старше возраста v, как и следовало бы ожидать, в расчет не принимается, поскольку оно не может иметь потомства. Далее, численность исходного населения в каждом возрасте умножается на коэффициент:

$$\frac{G(a)}{p_f(a)}\,e^{ra}.$$

Ряд величин

$$\frac{K_f(a,\,0)\,G(a)}{p_f(a)}\,e^{ra} \tag{10}$$

станем называть «приведенным исходным нетто населением»[2]. Средний возраст этого приведенного исходного нетто населения обозначим через γ.

Все полученные ранее результаты применимы вне зависимости от значений функций $p_f(a)$, $p_m(a)$ и $\varphi_f(a)$. Их можно значительно упростить, если предположить, что эти функции представляют функции смертности и плодовитости в человеческой популяции. Рассмотрим такую возможность в следующем разделе.

Функции $g(a)$ и $G(a)$ как функции в человеческой популяции

Мы пользовались следующей формулой:

$$g(a) = \int_a^v p_f(x)\,\varphi_f(x)\,e^{-rx}dx.$$

Ее подынтегральный элемент есть произведение трех сомножителей. $p_f(x)$ — это функция дожития женщин. Она равна единице, когда $x=0$, и нулю, когда x равно предельному возрасту живущих. В промежутке — это убывающая функция. $\varphi_f(x)$ — это функция женской плодовитости. Она равна нулю до возраста половой зрелости u и после возраста менопаузы v. В интервале (u, v) функция плодовитости сначала возрастает, а затем убывает, достигая своего максимума в возрасте 20—25 лет по-разному в каждом конкретном населении. e^{-rx} при положительных значениях r монотонно убывает в интервале между u и v, а при отрицательных значениях r она монотонно возрастает в интервале между u и v.

График произведения $p_f(x)\varphi_f(x)e^{-rx}$ представлен на рис. 1, а функция $g(a)$ на том же графике изображена как площадь заштрихованной области. Функция

$$G(a) = \frac{g(a)}{\int_0^\omega g(a)\,da}$$

есть функция распределения $g(a)$. Особо заметим, что функция $G(a)$ зависит только от характера возрастного распределения коэффициентов $\varphi_f(a)$, а не от их величины.

[2] Определение выражения «приведенное исходное брутто-население» будет дано ниже.

В табл. 1 и 2 дается пример численного расчета функции $G(a)$ при следующих условиях: принимается функция дожития женщин, соответствующая модельным таблицам смертности (промежуточный вариант) * с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года. Для возрастного распределения коэффициентов плодовитости было выбрано промежуточное распределение. И наконец, истинный коэффициент естественного прироста был принят равным 2%. В табл. 1 и 2 приведены детали вычисления соответственно функций $p_f(a)\varphi_f(a)e^{-ra}$ и $G(a)$.

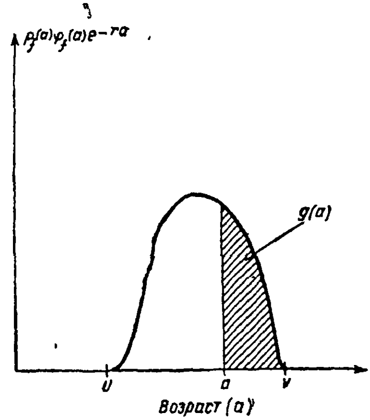

Рис. 1. Форма кривой $p_f(a)\varphi_f(a)e^{-ra}$

Аналогичные расчеты были выполнены для других значений функций дожития, возрастных распределений плодовитости и истинных коэффициентов естественного прироста. Результаты этих расчетов представлены в табл. 3 и 5.

В табл. 3 показано, как функция $G(a)$ изменяется по мере изменения истинного коэффициента естественного прироста. Мы пользуемся здесь той же таблицей дожития и тем же возрастным распределением коэффициентов плодовитости, что и для вычислений в табл. 1 и 2. При расчетах мы ограничивались такими значениями истинного коэффициента естественного прироста, которые встречаются на практике, а именно:

$$-0{,}02 < r < +0{,}04.$$

С помощью табл. 3 можно сделать вывод, что *на практике* функция $G(a)$ фактически независима от истинного коэффициента естественного прироста. Таким образом, достаточно просто исследовать воздействие на функцию $G(a)$ изменений функции дожития и возрастного распределения коэффициентов плодовитости для отдельно взятых величин истинного коэффициента естественного прироста. Именно это и делается в табл. 4 и 5, причем истинный коэффициент естественного прироста принимается равным нулю.

---

* Здесь и далее речь идет о модельных таблицах смертности (таблицах дожития), а также о модельной кривой возрастного распределения коэффициентов плодовитости (см. табл. 1), выработанных группой экспертов ООН — см.: The concept of a stable population, p. 139—168. Большинство ссылок относится к так называемому промежуточному распределению, которое представляет собой один из трех вариантов модельной кривой, мажорируемой сверху и снизу крайними вариантами.

Под возрастным распределением коэффициентов плодовитости автор понимает ряд возрастных коэффициентов плодовитости, сумма которых равна 100(%); всякая иная кривая получается на базе этой почленным умножением на соответствующий множитель. — *Прим. ред.*

Таблица 1

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ $p_f(a)\,\varphi_f(a)\,e^{-ra}$

Возрастная группа, лет	Медианный возраст	Функция дожития $p_f(a)$ 1*	$\varphi_f(a)$ 2*	Произведение величин двух предшествующих столбцов $p_f(a)\ \varphi_f(a)$	e^{-ra} для $r=0{,}02$	Произведение величин двух предшествующих столбцов $p_f(a)\varphi_f(a)e^{-ra}$
15—19	17,5	0,879940	0,100	0,08799400	0,70469	0,062008492
20—24	22,5	0,868080	0,273	0,23698584	0,63763	0,151109281
25—29	27,5	0,854070	0,263	0,22462041	0,57695	0,129594746
30—34	32,5	0,839220	0,188	0,15777336	0,52205	0,082365583
35—39	37,5	0,823344	0,121	0,09962462	0,47237	0,047059682
40—44	42,5	0,805484	0,055	0,04430162	0,42742	0,018935398
			1,000			

1* Функция дожития $p_f(a)$ — это функция дожития женщин из модельной таблицы смертности (промежуточный вариант) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года.

2* Коэффициенты $\varphi_f(a)$ — это такие коэффициенты женской плодовитости, которые можно наблюдать при промежуточной модели возрастного распределения, и брутто-коэффициенте воспроизводства, равном 5,00. Если коэффициент воспроизводства равен R', то коэффициенты $\varphi_f(a)$ следует умножить на $R'/5$. Как числитель, так и знаменатель функции $G(a)$, выраженный дробью, следует умножить на $R'/5$. Она, таким образом, независима от R' и зависит только от характера возрастного распределения коэффициентов плодовитости.

Таблица 2

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $g(a)$ и $G(a)$

(для величин $p_f(a)$, $\varphi_f(a)$ и r, приведенных в табл. 1)

Медианный возраст, лет	$p_f(a)\varphi_f(a)e^{-ra}$	Среднее арифметическое двух последовательных чисел в предыдущем столбце 1*	Накопленные итоги 1/5 $g(a)$	$G(a)$ (функция распределения $g(a)$)
2,5			0,491073180	0,1847
7,5			0,491073180	0,1847
12,5	0,000000000	0,031004246	0,491073180	0,1847
17,5	0,062008492	0,106558886	0,460068934	0,1729
22,5	0,151109281	0,140352013	0,353510048	0,1329
27,5	0,129594746	0,105980164	0,213158035	0,0802
32,5	0,082365583	0,064712632	0,107177871	0,0403
37,5	0,047059682	0,032997540	0,042465239	0,0160
42,5	0,018935398	0,009467699	0,009467699	0,0036
47,5	0,000000000			
			2,659067366	1,0000

1* Методика вычисления основывается, в сущности, на допущении о малой величине коэффициентов плодовитости в возрасте 12,5—15 лет и 45—47,5 года. Воздействие этой низкой плодовитости на величины, получаемые для $G(a)$, пренебрежимо мало.

Таблица 3

ФУНКЦИЯ $G(a)$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА[1*]

Возрастная группа, лет	Истинный коэффициент естественного прироста, %												
	−2,0	−1,5	−1,0	−0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0—4	17,32	17,55	17,56	17,74	17,89	18,03	18,18	18,32	18,47	18,90	18,76	18,91	19,05
5—9	17,32	17,55	17,56	17,74	17,89	18,03	18,18	18,32	18,47	18,90	18,76	18,91	19,05
10—14	17,32	17,55	17,56	17,74	17,89	18,03	18,18	18,32	18,47	18,90	18,76	18,91	19,05
15—19	16,60	16,70	16,74	16,87	16,96	17,05	17,14	17,22	17,30	17,65	17,46	17,52	17,60
20—24	13,73	13,76	13,67	13,60	13,55	13,49	13,43	13,36	13,29	13,42	13,14	13,04	12,97
25—29	9,35	9,24	9,11	8,87	8,70	8,53	8,36	8,19	8,02	6,42	7,67	7,50	7,32
30—34	5,37	5,22	5,06	4,86	4,68	4,52	4,35	4,19	4,03	3,93	3,72	3,57	3,43
35—39	2,41	2,31	2,21	2,09	1,98	1,88	1,72	1,69	1,60	1,53	1,43	1,35	1,27
40—44	0,60	0,60	0,53	0,50	0,47	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,31	0,29	0,27
0—44	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

[1*] Функция дожития женщин — это функция, взятая из модельной таблицы смертности (промежуточный вариант) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года; а в качестве возрастного распределения коэффициентов женской плодовитости принят промежуточный вариант распределения.

В табл. 4 даются значения функции $G(a)$ для трех возрастных распределений коэффициентов плодовитости, наблюдавшихся в Испании в 1940 г., на Ямайке в 1951 г., и, наконец, промежуточное распределение, уже приводившееся в табл. 3. Исходя из табл. 4, можно заметить, что изменения возрастного распределения коэффициентов плодовитости не влияют в сколь-либо значительной степени на функцию $G(a)$.

Таблица 4

ФУНКЦИЯ $G(a)$ В ЖЕНСКОМ СТАЦИОНАРНОМ НАСЕЛЕНИИ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ МОДЕЛЬНОЙ ТАБЛИЦЕ СМЕРТНОСТИ С ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ ДЛЯ ОБОИХ ПОЛОВ 60,4 ГОДА, ПО ТРЕМ ВОЗРАСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕНСКОЙ ПЛОДОВИТОСТИ

Возрастная группа, лет	Возрастное распределение коэффициентов женской плодовитости		
	Испания, 1940 г.	промежуточное распределение	Ямайка, 1951 г.
0—4	16,43	17,89	18,82
5—9	16,43	17,89	18,82
10—14	16,43	17,89	18,82
15—19	16,28	16,96	15,29
20—24	14,49	13,55	13,39
25—29	9,55	8,70	8,25
30—34	5,88	4,68	4,37
35—39	3,68	1,98	1,83
40—44	0,88	0,47	0,42
0—44	100,00	100,00	100,00

Таблица 5

ФУНКЦИЯ $G(a)$ В ПЯТИ ЖЕНСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ НАСЕЛЕНИЯХ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ПЯТИ МОДЕЛЬНЫМ ТАБЛИЦАМ СМЕРТНОСТИ; ДЛЯ ВОЗРАСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕНСКОЙ ПЛОДОВИТОСТИ ПРИНЯТ ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ВАРИАНТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Возрастная группа, лет	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для обоих полов, лет				
	30	40	50	60,4	70,2
0—4	18,28	18,10	17,98	17,89	17,83
5—9	18,28	18,10	17,98	17,89	17,83
10—14	18,28	18,10	17,98	17,89	17,83
15—19	17,21	17,10	17,02	16,96	16,93
20—24	13,42	13,47	13,52	13,55	13,57
25—29	8,25	8,45	8,60	8,70	8,77
30—34	4,22	4,43	4,58	4,68	4,75
35—39	1,69	1,82	1,97	1,98	2,02
40—44	0,38	0,42	0,45	0,47	0,48
0—44	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

И наконец, в табл. 5 демонстрируется воздействие изменений функции дожития на функцию $G(a)$. Функция $G(a)$ была вычислена с использованием промежуточного возрастного распределения коэффициентов плодовитости для пяти стационарных населений, соответствующих пяти модельным таблицам смертности (промежуточный вариант) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 30, 40, 50, 60,4 и 70,2 года соответственно. Из табл. 5 видно, что по мере изменения уровня смертности функция $G(a)$ изменяется незначительно.

Резюмируя, можно сказать, что в человеческой популяции при изменениях плодовитости и смертности функция $G(a)$ претерпевает незначительные изменения. На практике, таким образом, всегда можно пользоваться одной и той же функцией. Для нижеследующих расчетов были приняты значения функции $G(a)$, приводимые в табл. 6.

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $G(a)$, ПРИНЯТЫЕ ДЛЯ ОБЩИХ РАСЧЕТОВ

Возрастная группа, лет	$G(a)'$
0—4	18
5—9	18
10—14	18
15—19	17
20—24	13
25—29	9
30—34	5
35—39	2
40—44	0
0—44	100

Ранее мы неоднократно подчеркивали слова «практически» или же «на практике». Представляется весьма целесообразным постоянно иметь их в виду.

При численных расчетах значений функции $G(a)$ было, во-первых, сделано допущение, что уровень смертности отвечает представленному в модельных таблицах смертности (промежуточный вариант). Но модельные таблицы содержат только средние величины. Каждый конкретный вариант в большей или меньшей степени, отличается от среднего, и эти различия видоизменяют функцию $G(a)$. Когда мы имеем дело с человеческой популяцией, этими различиями в значениях функции $G(a)$ можно пренебречь, но если бы возникла необходимость применить приведенные ранее результаты к каким-либо иным самовозобновляющимся популяциям, отличным от человеческих популяций, то числовые значения функции $G(a)$ пришлось бы определять для каждого отдельного случая.

Во-вторых, было сделано допущение, что возрастное распределение коэффициентов женской плодовитости может меняться только в весьма небольших пределах. Распределения, значительно выходящие за указанные пределы, могут привести к тому, что значения функции $G(a)$ будут существенно отличаться от значений функции, выбранной для расчетов. И здесь также, пока речь идет о человеческой популяции, не опасно выйти далеко за указанные пределы, но все может оказаться не столь просто в случае исследования иных популяций.

Наконец, ранее при выполнении численных расчетов было сделано допущение, что истинный коэффициент естественного прироста был всегда относительно невелик, что обычно и характерно для человеческих популяций. Однако в дальнейшем для того, чтобы определить поведение некоторых демографических кривых, иногда придется рассматривать очень большие значения истинного коэффициента естественного прироста. В таких случаях необходимо иметь в виду, что кривые, полученные на основе указанных допущений, приемлемы только в определенных пределах.

Однозначно определить эти пределы сложно; они зависят от того, с какой степенью неточности готов примириться исследователь.

Таблица 7

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $G(a)$: (а) ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА; (б) ДЛЯ ДВУХ ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА (+10 И —10%) В ЖЕНСКОМ СТАБИЛЬНОМ НАСЕЛЕНИИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕМ МОДЕЛЬНОЙ ТАБЛИЦЕ СМЕРТНОСТИ С ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ ДЛЯ ОБОИХ ПОЛОВ 60,4 ГОДА, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ВОЗРАСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕНСКОЙ ПЛОДОВИТОСТИ; (в) ЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ

Возрастная группа, лет	Истинный коэффициент естественного прироста				Функция $G(a)$, принятая для расчетов
	(*а*)	(*б*)		(*а*)	(*в*)
	$+\infty$	+10%	—10%	$-\infty$	
0—4	33,33	20,73	15,26	11,11	18
5—9	33,33	20,73	15,26	11,11	18
10—14	33,33	20,73	15,26	11,11	18
15—19	00,00	18,24	15,04	11,11	17
20—24	00,00	11,68	13,86	11,11	13
25—29	00,00	5,28	11,37	11,11	9
30—34	00,00	1,95	8,10	11,11	5
35—39	00,00	0,57	4,51	11,11	2
40—44	00,00	0,10	1,34	11,11	0
0—44	100,00	100,00	100,00	100,0	100,0

В табл. 7 представлены:

а) экстремальные значения функции $G(a)$, когда r бесконечно велик[3];

б) значения функции $G(a)$, принятые для данных вычислений;

в) значения функции $G(a)$ для двух относительно больших величин истинного коэффициента естественного прироста (+10% и —10%), вычисленные на основании промежуточного возрастного распределения коэффициентов плодовитости и модельной таблицы смертности (промежуточный вариант) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года.

Можно увидеть, что при значениях истинного коэффициента естественного прироста, равных 10%, имеется заметное отклонение от функции $G(a)$, принятого для этих расчетов.

К счастью, коэффициенты естественного прироста в населении, встречающиеся на практике, всегда гораздо меньше 10%. Максимальное их значение, по-видимому, составляет 4—5%, а в этих пределах функция $G(a)$, принятая для расчетов, удовлетворительна.

В. Семейства населений с постоянной смертностью

На основе данного исходного населения можно получить бесконечное число стабильных населений, соответствующих комбинациям $p_f(a)$, $\varphi_f(a)$, принятым для расчетов. Точнее говоря, имеется некоторая двумерная бесконечная совокупность стабильных населений, поскольку существует бесконечное количество способов выбора либо $p_f(a)$, либо $\varphi_f(a)$. «Семейства населений» в этой двумерной бесконечной совокупности можно выделять, сохраняя постоянной или функцию дожития, или функцию плодовитости. Легче изучать семейства с постоянной функцией дожития, нежели с постоянной функцией плодовитости, поскольку мы имеем

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{\omega} p_f(a)\, e^{-ra} da \int_0^{v} \frac{K_f(a)}{p_f(a)} G(a)\, e^{ra} da.$$

Если функция дожития постоянна, то единственная переменная — это истинный коэффициент естественного прироста, потому что, как мы уже видели, функция $G(a)$ остается практически неизменной. С другой стороны, если постоянна функция плодовитости, то переменными в этом случае будут r и $p_f(a)$. Кроме того, эти две величины связаны соотношением

$$\int_0^{v} e^{-ra} p_f(a)\, \varphi_f(a)\, da = 1.$$

Как станет ясно далее, первый случай проще для исследования, чем второй, в силу чего в первую очередь будут рассмотрены семейства населений с постоянной функцией дожития.

Начнем с более строгой постановки задачи:

а) предполагается некоторое исходное женское население

[3] Вывод значений функции $G(a)$, когда r бесконечно велик, приводится в конце настоящей работы.

$K_f(a, 0)$. Например, женское население численностью 1 млн. человек с фактическим возрастным распределением;

б) выбирается женская смертность $p_f(a)$;

в) вычисляются все стабильные населения, получаемые из этого исходного населения путем сочетания всех *практически* возможных уровней плодовитости с выбранной таблицей дожития. «Семейство» населений, полученное таким образом, назовем семейством стабильных населений с постоянной смертностью.

Огибающая семейства населений с постоянной смертностью

Населения этого семейства имеют огибающую, поскольку они зависят только от одной переменной r. Абсцисса точки касания населения с его огибающей получается путем приравнивания производной функции dN/dr к нулю, что записывается в виде:

$$\frac{dN}{dr} = te^{rt}\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^v \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}e^{ra}G(a)\,da -$$

$$- e^{rt}\int_0^\omega ae^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^\omega \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}e^{ra}G(a)\,da +$$

$$+ e^{rt}\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^v \frac{aK_f(a, 0)}{p_f(a)}e^{ra}G(a)\,da$$

или

$$\frac{dN}{dr} = e^{rt}\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^v \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}G(a)\,e^{ra}da\,(t - \alpha + \gamma)$$

и

$$\frac{dN}{dr} = N(t)\,(t - \alpha + \gamma)$$

при условии, что

$$\alpha = \frac{\int_0^\omega ae^{-ra}p_f(a)\,da}{\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da}$$

и

$$\gamma = \frac{\int_0^v \frac{aK_f(a, 0)}{p_f(a)}e^{ra}G(a)\,da}{\int_0^v \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}e^{ra}G(a)\,da}.$$

α — это просто средний возраст стабильного населения, а γ — это средний возраст приведенного исходного нетто-населения. В точке касания, таким образом, $t_c-\alpha+\gamma=0$, откуда $t_c=\alpha-\gamma$. Ордината точки касания получается путем введения этого значения $(\alpha-\gamma)$ в формулу для численности населения:

$$N_c = e^{r(\alpha-\gamma)} \int_0^{\omega} p_f(a)\, e^{-ra} da \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)}\, G(a)\, e^{ra} da.$$

Ясно, что касательная к огибающей в точке касания есть также касательная к кривой населения. Угол ее наклона получается при замещении t на $\alpha-\gamma$ в производной функции $dN/dt=rN$. Таким образом, величина угла наклона в точке касания $p_c=rN_c$.

Форма огибающей

Во-первых, мы покажем, что угол наклона p_c равен нулю, когда $r=0$. Огибающая достигает максимума, когда население стационарно. Абсцисса этого максимума $\alpha_0-\gamma_0$, где α_0 и γ_0 соответственно указывают величины α и γ, отвечающие $r=0$.

Мы уже говорили, что на практике r может изменяться только в достаточно узких пределах. Однако с тем, чтобы узнать больше о форме огибающей, полезно вычислить экстремальные значения, соответствующие бесконечно большим величинам истинного коэффициента естественного прироста. Вычисления показывают[4], что, когда r приближается к $+\infty$, ордината точки касания t_c приближается к нулю, а абсцисса приближается к $-\gamma'$ — среднему возрасту матери в исходном населении при рождении ею ребенка. Когда r стремится к $-\infty$, ордината точки касания приближается к нулю, а абсцисса приближается к предельному возрасту живущих, ω. Более того, в этих двух точках касательные к огибающей горизонтальны.

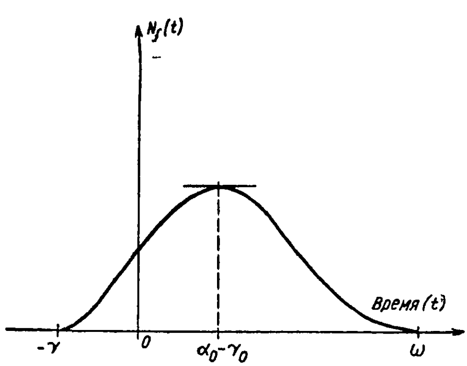

Рис. 2. Форма огибающей кривых численности населения (метрический масштаб для горизонтальной оси и вертикальной оси)

Форма огибающей показана на рис. 2.

Поскольку общая численность населения есть экспоненциальная функция времени, при графическом представлении удобно прибегнуть к использованию полулогарифмического графика, на котором время откладывается по горизонтальной оси в метрическом масштабе, а общая численность населения — на вертикальной оси

[4] Доказательство приводится в конце настоящей работы.

в логарифмическом масштабе. Общая численность населения тогда представляется прямой линией с тангенсом угла наклона r. На графиках подобного рода огибающая всегда достигает максимума для стационарного населения, но так как логарифм числа, приближающегося к нулю, бесконечно возрастает, огибающая имеет две вертикальные асимптоты с абсциссами $-\gamma'$ и ω. Ее форма представлена на рис. 3. На рис. 4 показана огибающая, полученная на основе женского населения Таиланда, с допущением, что женская смертность такая же, как и в модельных таблицах смертности (промежуточный вариант) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года. Приведенные ранее формулы были применены для следующих семи значений истинного коэффициента естественного прироста, выраженного в процентах: +10; +6, +0,87; 0; —1,57; —6, —10. Результаты вычислений приводятся в табл. 8.

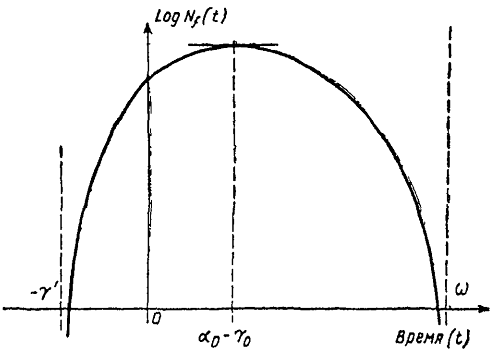

Рис. 3. Форма огибающей прямых численности населения (метрический масштаб для горизонтальной оси и логарифмический масштаб для вертикальной оси)

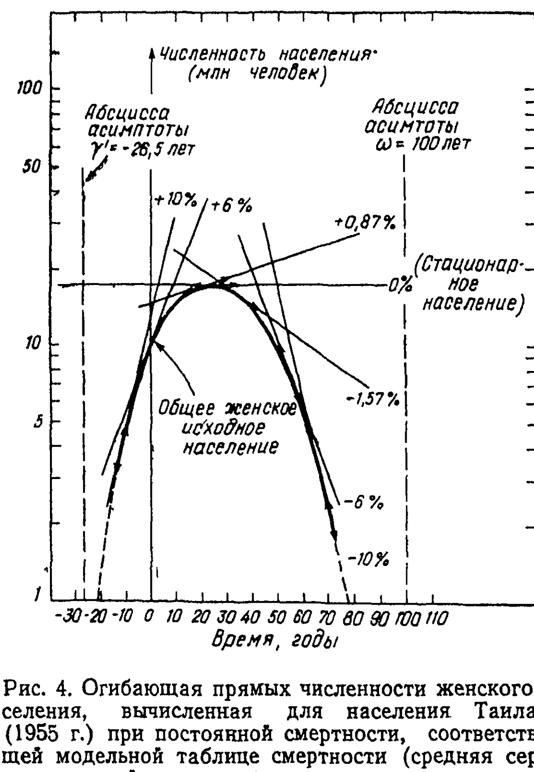

Рис. 4. Огибающая прямых численности женского населения, вычисленная для населения Таиланда (1955 г.) при постоянной смертности, соответствующей модельной таблице смертности (средняя серия) с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года и коэффициентами прироста от —10 до +10%

Здесь уместно вспомнить, что именно указывалось ранее относительно пределов возмож-

Таблица 8

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ, РАССЧИТАННЫЕ НА ОСНОВЕ НАСЕЛЕНИЯ ТАИЛАНДА В 1955 г. ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА

Истинный коэффициент естественного прироста r, %	$\int\limits_0^{\omega} e^{-ra} p_f(a)\,da$	$\int\limits_0^{v} \frac{K_f(a,0)}{p_f(a)} \times G(a)\,e^{ra}\,da$	Произведение величин двух предшествующих столбцов	Возраст α, годы	Возраст γ, годы	Разность $\alpha-\gamma$, годы	$r(\alpha-\gamma)$	$e^{r(\alpha-\gamma)}$	Ордината точки касания огибающей,[6*] млн. чел.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$+\infty$	0	$+\infty$[1*]	0	0	26,678[5*]	—26,678	$+\infty$	$+\infty$	0
+10	8,86396	1 493 319	13 236 720	9,863	21,553	—11,690	—1,1690	0,3106	4,111
+6	14,43263	680 205	9 817 147	15,405	17,767	—2,362	—0,1416	0,8679	8,521
+0,87	45,90099	308 380	14 154 947	32,470	13,220[4*]	—19,250	+0,1675	1,1820	16,732
0	62,04598	275 634	17 104 339	36,880	12,523[3*]	24,357	0	1,0000	17,104
—1 57	118,22975	228 479	27 013 000	45,270	11,370	33,900	—0,5323	0,5872	15,865
—6	1 405,04816	146 963	206 490 100	64,876	8,711	56,165	—3,3699	0,03554	7,340
—10	23 389,03381	107 530	2 515 022 826	77,820	7,006	70,814	—7,0814	0,0008404	2,114
$-\infty$	$+\infty$[2*]	0	0	ω	0	ω	$-\infty$	0	0

1* Этот интеграл стремится к $+\infty$, но произведение $e^{-r\omega} \int\limits_0^{v} \frac{K_f(a,\,0)}{p_f(a)}\, G(a)\, e^{ra}\, da$ стремится к нулю.

2* Этот интеграл стремится к $+\infty$, но произведение $e^{r\omega} \int\limits_0^{\omega} e^{-ra} p_f(a)\, da$ стремится к нулю.

3* Цифра взята из последней строки табл. III.2 (The Concept of a Stable Population, p. 49). Мы имеем: $\frac{34{,}5146}{2{,}75135} = 12{,}523$.

4* Цифра взята из последней строки табл III 3 (The Concept of a Stable Population, p. 50). Мы имеем: $\frac{40{,}7325}{3{,}0838} = 13{,}220$.

5* Напомним, что это — средний возраст γ' матери при рождении ею ребенка в исходном населении.

6* Произведение столбцов (4) и (9).

ных изменений r. Было отмечено, что 10% представляется предельно допустимой величиной. Таким образом, следует принимать во внимание только ту часть огибающей, которая изображена сплошной линией.

Если бы прямые численности населения, соответствующие более высоким значениям r, вычислялись непосредственно[5], а не просто путем применения формулы (2), то полученные подобным образом результаты отличались бы от тех, которые получены с помощью формулы (2). Даже при истинных коэффициентах естественного прироста, равных 10%, с неизбежностью будут наблюдаться заметные расхождения. Однако, как мы уже говорили, если ограничиться значениями коэффициентов, встречающимися на практике, то формула (2) дает весьма хорошие результаты.

Если истинный коэффициент естественного прироста *очень невелик,* то огибающая стягивается и превращается в свою вершину S, и прямые численности населения окружают точку S.

Воздействие изменений уровня смертности на огибающую

Каждая таблица смертности, конечно, будет иметь свою, отличную от прочих, огибающую. Изменения вершины S, как функция смертности, дают нам информацию относительно характера изменения огибающей по мере изменения смертности.

Координаты точки S были вычислены, исходя из следующих предположений:

а) было допущено, что смертность соответствует ряду модельных таблиц смертности (промежуточный вариант), и были выбраны шесть модельных таблиц с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов от 20 до 70,2 года;

б) в качестве исходного населения было взято женское население численностью 1 млн. человек, с тем же возрастным распределением, что и в населении Таиланда в 1955 г.

Результаты этих вычислений сведены в табл. 9 и представлены на рис. 5.

Когда уровень смертности снижается, $(\alpha_0—\gamma_0)$ увеличивается и как следствие огибающая смещается вправо. Кроме того, ордината вершины увеличивается, и огибающая сдвигается вверх. Если, начиная с данной возрастной структуры, задаться целью достигнуть стационарного состояния, то чем ниже уровень смертности, тем выше будет точка, соответствующая этому стационарному состоянию. Такой результат совершенно идентичен результату, полученному для нетто-коэффициента воспроизводства. Мы знаем, что для каждой кривой при неизменной плодовитости нетто-коэффициент воспроизводства по мере снижения смертности возрастает; следующий шаг — определить брутто-коэффициент воспроизводства, соответствующий максимальному нетто-коэффициенту воспроизводства, который достигается, если смертность отсутствует вплоть до

[5] Например, посредством метода передвижки по возрастам.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРШИНЫ ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВА НАСЕЛЕНИЙ С ПОСТОЯННОЙ СМЕРТНОСТЬЮ ДЛЯ ШЕСТИ УРОВНЕЙ СМЕРТНОСТИ, ВЫЧИСЛЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ЖЕНСКОГО НАСЕЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТЬЮ 1 МЛН. ЧЕЛОВЕК С ТЕМ ЖЕ ВОЗРАСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, ЧТО И В ЖЕНСКОМ НАСЕЛЕНИИ ТАИЛАНДА В 1955 г.

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для обоих полов, лет	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин, лет	Приведенное исходное население	Произведение величин двух предшествующих столбцов (ордината вершины)	Средний возраст стационарного населения (α_0), лет	Средний возраст приведенного исходного населения (γ_0), лет	Разность величин двух предшествующих столбцов ($\alpha_0 - \gamma_0$), лет
20	20,197	51 741	1 045 013	24,159	14,168	9,991
30	30,402	39 223	1 192 458	28,306	13,469	14,837
40	40,743	33 100	1 348 593	31,745	13,044	18,701
50	51,308	29 261	1 501 323	34,599	12,736	21,863
60,4	62,046	26 403	1 638 201	36,880	12,523	24,357
70,2	71,803	24 375	1 750 198	38,549	12,376	26,173
Брутто-уровень	80,000	23 513	1 881 040	40,573	12,303	28,270

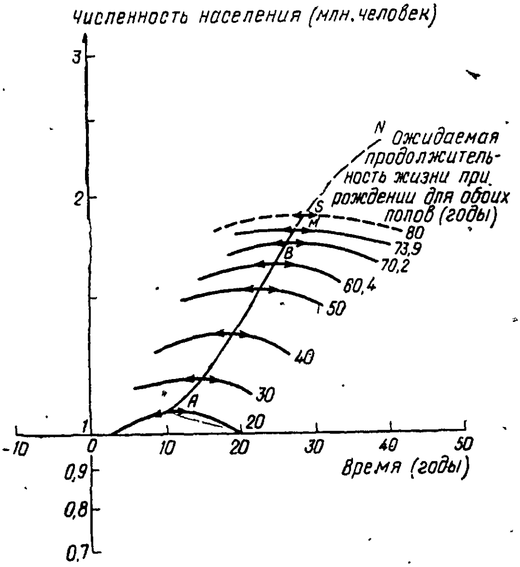

Рис. 5. Характеристики семейств населений с постоянной смертностью, вычисленные на основе населения численностью 1 млн. человек с возрастной структурой, характерной для женского населения Таиланда в 1955 г.

предельного возраста плодовитости v. Можно ли определить таким же образом брутто-стационарное население, т. е. тот максимум, которого может достигнуть нетто-стационарное население? Как и в случае с определением брутто-коэффициента воспроизводства, мы, очевидно, можем допустить, что смертность остается нулевой вплоть до возраста v, но для того, чтобы определить стационарное население, этого не достаточно. Нам надо еще сделать допущение относительно смертности после достижения возраста v, а здесь априори возможны любые гипотезы.

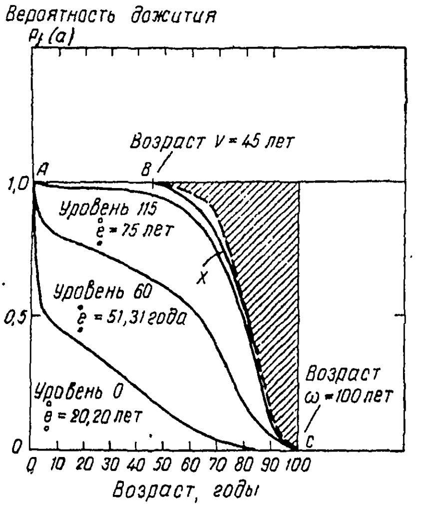

Рис. 6. Экстраполяция совокупности функций дожития для женщин из модельных таблиц смертности (средняя серия)

На рис. 6 показаны кривые дожития для женщин, отражающие верхний и нижний пределы ряда модельных таблиц смертности. Промежуточные кривые дожития лежат между этими двумя пределами. В качестве примера дана кривая дожития, соответствующая ожидаемой продолжительности жизни при рождении для женщин, равной 51, 31 года.

Если смертность предполагается нулевой вплоть до возраста v, то кривая дожития начинается с отрезка прямой AB. Затем она снижается от B к C. Очевидно, существует бесконечное число траекторий спуска кривой из точки B в точку C. Можно только заметить, что она не должна спускаться более круто, чем кривая дожития, соответствующая верхнему пределу модельных таблиц смертности. Это условие означает лишь то, что она не должна выходить за границы заштрихованной области на рис. 6. Очевидно, что для каждой возможной кривой дожития существует определенное стабильное население. На рис. 5 вершины S, соответствующие всем этим стабильным населениям, описывают отрезок кривой MN, причем точка N находится путем допущения, что смертность остается равной нулю вплоть до возраста ω и что по достижении этого возраста умирают все.

Всем этим стабильным населениям, однако, свойственна одна характерная особенность. Поскольку все они имеют один и тот же истинный коэффициент естественного прироста, они имеют и одно и то же абсолютное число рождений:

$$B = e^{rt} \int_0^v K_f(a, 0)\, G(a)\, e^{ra} da.$$

Стабильные населения, соответствующие модельным таблицам смертности, не будут обладать подобным свойством. Следовательно, снижение уровня смертности (в результате чего кривая дожития пройдет через заштрихованную область на рис. 6) привносит новые факторы, вследствие чего возможно возникновение в теории стабильного населения новых положений, отличающихся от наблюдаемых в том случае, когда учитываются только уровни смертности, отмеченные в модельных таблицах смертности. В частности, появления подобных явлений можно ожидать в семействах населений с постоянной плодовитостью, поскольку отмеченная особенность связана с рождениями, и, как мы сейчас же покажем, это и в самом деле обстоит подобным образом. Названные явления не окажут существенного воздействия только на стабильные населения, вычисленные на основе кривых дожития, проходящих через заштрихованную область на рис. 6 и около кривой BXC. Соответственно из всех возможных допущений относительно смертности после наступления возраста v мы ограничимся теми, кривые дожития которых не отклоняются сколь-либо значительно от кривой BXC. Исследование семейств населений с постоянной плодовитостью покажет что ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин равная 80 годам, обеспечивает хорошие результаты при экстраполяции совокупности модельных таблиц смертности. Если в качестве ожидаемой продолжительности жизни выбирается именно эта величина, то кривая дожития для возраста старше v определяется достаточно однозначно. Для вычисления брутто-стационарного населения была применена табл. 10. Средний возраст живущего в этом стационарном населении $\alpha_0'=40{,}788$ года. Вершина огибающей, соответствующей этой таблице дожития, есть точка S' на рис. 5.

Таблица 10

ТАБЛИЦА ДОЖИТИЯ ДЛЯ ЖЕНЩИН, ПРИМЕНЯЕМАЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ БРУТТО-СТАЦИОНАРНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Возраст, лет	Число доживших (на 1000 родившихся)
0	1 000
10	1 000
20	1 000
30	1 000
40	1 000
50	1 000
60	960
70	850
80	540
90	150
100	000

Теперь можно сформулировать следующие определения.

Ордината точки S' есть численность *брутто-стационарного населения:*

$$N_{s'} = 80\int_0^v K_f(a,\ 0)\, G(a)\, da. \tag{11}$$

Численность *брутто-приведенного исходного стационарного населения* есть величина:

$$N_{s'_l} = \int_0^v K_f(a,\ 0)\, G(a)\, da. \tag{12}$$

Численность *нетто-стационарного населения* есть величина:

$$N_s = e_0^0 \int_0^v \frac{K_f(a,\ 0)}{p_f(a)}\, G(a)\, da. \tag{13}$$

Численность *нетто-приведенного исходного стационарного населения* есть величина:

$$N_{s_l} = \int_0^v \frac{K_f(a,\ 0)\, G(a)}{p_f(a)}\, da. \tag{14}$$

В дискретной записи мы получим следующие формулы (для пятилетних возрастных групп):

$$N'_{S'} = 80\sum_0^v \frac{K_a}{5} G_a = 16\sum_0^v K_a G_a; \tag{15}$$

$$N_{s'_l} = \sum_0^v \frac{K_a G_a}{5}; \tag{16}$$

$$N_s = e_0^0 \sum_0^v \frac{K_a G_a}{L_a}; \tag{17}$$

$$N_{s_l} = \sum_0^v \frac{K_a G_a}{L_a}. \tag{18}$$

Абсцисса точки S' будет *моментом брутто-стационарности населения:*

$$t_{s'} = 40{,}788 - \gamma_0',$$

где $\gamma^{0'}$ есть средний возраст брутто-приведенного исходного стационарного населения. Абсцисса точки S будет *моментом нетто-стационарности населения:*

$$t_s = \alpha_0 - \gamma_0,$$

где α_0 — средний возраст нетто-стационарного населения, а γ_0 — средний возраст нетто-приведенного исходного стационарного населения.

В последней строке табл. 9 приводятся результаты расчетов численности брутто-стационарного населения и момента брутто-стационарности для женского населения Таиланда в 1955 г.

Приближенные формулы для перехода от брутто- к нетто-характеристикам

Приведенные ранее формулы обеспечивают возможность перехода без каких-либо трудностей от брутто- к нетто-величинам. Однако можно вывести еще более простые приближенные формулы.

Численность нетто-стационарного населения задается формулой

$$N_s = \int_0^{\omega} p_f(a)\,da \int_0^{v} \frac{K_f(a)\,G(a)}{p_f(a)}\,da.$$

Ее можно записать как

$$N_s = \frac{e_0^0}{p_f(x)} \int_0^{v} K_f(a)\,G(a)\,da = \frac{e_0^0}{80\,p_f(x)}\,N_{s'},$$

где x — возраст между u и v. Вычисление показывает, что этот возраст x изменяется лишь незначительно по мере изменения уровня смертности. Если взять конкретный пример, то были получены следующие величины:

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для обоих полов, лет	20	30	40	50	60,4	70,2
Возраст x	10,45	10,72	10,77	11,10	10,72	12,13

Это дает нам следующую приближенную формулу:

$$N_s = \frac{e_0^0}{80 p_f(11)}\,N_{s'}.$$

Численность нетто-стационарного населения равна численности брутто-стационарного населения, умноженной на коэффициент

$$\frac{e_0^0}{80 p_f(11)}.$$

Момент стационарности населения есть $t_s = \alpha_0 - \gamma_0$. Изменения γ_0 по мере изменения уровня смертности незначительны. Если игнорировать эти изменения и допустить, что $\gamma_0 = \gamma_0'$, то приближенная величина момента нетто-стационарности населения вычисляется по формуле

$$t_s = t_{s'} - (40{,}788 - \alpha_0).$$

В приближенных формулах численность нетто-стационарного населения выступает как произведение трех переменных множителей. Первый, e_0^0, есть ожидаемая продолжительность жизни при рождении. Он зависит только от уровня смертности. Второй, N_{S}, есть численность брутто-стационарного населения; он зависит только от исходной возрастной структуры. И наконец, множитель $1/[p_f(x)]$, который зависит как от смертности, поскольку он представляет вероятность дожития, так и от исходной возрастной структуры, поскольку от этой структуры зависит возраст x.

Момент нетто-стационарности населения в приближенной формуле выступает как разность двух величин. Первая, $t_{S'}$ — момент брутто-стационарности населения, зависит только от исходной возрастной структуры. Вторая величина $(40{,}788 - \alpha_0)$ зависит только от смертности.

Воздействие исходной возрастной структуры на огибающую

Для того чтобы узнать, каким изменениям подвергается огибающая в результате изменений исходной возрастной структуры, проделанные выше вычисления были повторены на основе женского населения численностью 1 млн. человек с тем же возрастным распределением, что и в женском населении ГДР. Результаты представлены в табл. 11, которая аналогична табл. 9. Вершины были нанесены на рис. 7[6]. Они образуют линию, аналогичную полученной на

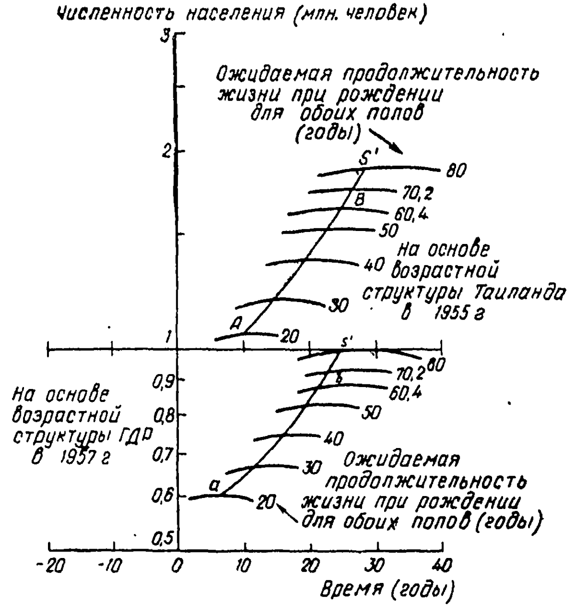

Рис. 7. Сравнение характеристик семейств кривых женского населения с постоянной смертностью, вычисленных на основе населения численностью 1 млн. человек: (А) с возрастной структурой женского населения Таиланда в 1955 г.; (а) с возрастной структурой женского населения ГДР в 1957 г.

[6] Мы нанесли на рис. 7 также кривую с рис. 5, полученную на основе населения Таиланда.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРШИН ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВ НАСЕЛЕНИЙ С ПОСТОЯННОЙ СМЕРТНОСТЬЮ ДЛЯ ШЕСТИ УРОВНЕЙ СМЕРТНОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ВЕЛИЧИНАМ ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ ДЛЯ ОБОИХ ПОЛОВ ОТ 20 ДО 70,2 ГОДА, ВЫЧИСЛЕННЫЕ НА ОСНОВЕ ЖЕНСКОГО НАСЕЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТЬЮ 1 МЛН. ЧЕЛОВЕК С ТЕМ ЖЕ ВОЗРАСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, ЧТО И В ЖЕНСКОМ НАСЕЛЕНИИ ГДР В 1957 г.

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для обоих полов, лет	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин, лет	Приведенное исходное население	Произведение величин двух предшествующих столбцов (ордината вершины)	Средний возраст стационарного населения (α_0), лет	Средний возраст приведенного исходного населения (γ_0), лет	Разность величин двух предшествующих столбцов, ($\alpha_0 - \gamma_0$), лет
20	20,197	29 876	603 406	24,159	18,188	6,971
30	30,422	22 039	610 050	28,306	16,521	11,785
40	40,743	18 281	744 823	31,745	16,085	15,660
50	51,308	15 967	819 235	34,599	15,777	18,822
60,4	62,046	14 281	886 079	36,880	15,557	21,323
70,2	71,803	13 104	940 907	38,549	15,404	23,145
Нулевая смертность вплоть до возраста v	80,000	12 603	1 008 240	40,7875	15,325	25,4625

основе возрастной структуры Таиланда, но сдвинутую вниз и влево. Была применена приближенная формула, дающая ординату вершины, исходя из допущения, что $x=16$. Практически для различных уровней смертности были получены следующие возраста x.

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет	20	30	40	50	60,4	70,2
Возраст x	15,94	16,20	16,24	16,17	16,22	16,87

Мы, таким образом, имеем:

$$N_s = \frac{e_0^0}{80p_f\,(16)} N_{s'} .$$

Как и в предыдущем случае, по мере изменения уровня смертности возраст x изменяется лишь незначительно, и приближенная формула, дающая абсциссу вершины, по-прежнему, имеет вид:

$$t_s = t_{s'} - (40{,}7875 - \alpha_0).$$

Как можно было ожидать, возраст x изменяется по мере изменения исходной возрастной структуры. Однако две исходные возрастные структуры, принятые здесь, значительно отличаются одна от другой, и максимальным можно считать расхождение для возраста x величиной в пять лет. В возрасте 10—20 лет пятилетнее различие не приводит к значительному расхождению вероятностей дожития. Собственно говоря, при низких коэффициентах смертности это различие пренебрежимо мало. Вторую приближенную формулу можно вывести таким образом, приняв в качестве возраста x «среднюю» величину, независимую от исходной возрастной структуры. Если, например, мы допустим, что $x=12{,}5$ года, то вторую приближенную формулу можно будет записать следующим образом:

$$N_s = \frac{e_0^0}{80p_f(12{,}5)} N_{s'} .$$

В табл. 12 приводятся результаты, полученные на основе двух приближенных формул, и результаты точных вычислений. Теперь можно измерить воздействия различия исходных возрастных структур при неодинаковых уровнях смертности на координаты стационарных вершин. Это сделано в табл. 13.

Таблица 12

РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМУЛ, ПРЕДЛОЖЕННЫХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КООРДИНАТ СТАЦИОНАРНОЙ ВЕРШИНЫ

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет	Ордината вершины N_s, млн. чел.			Абсцисса вершины t_s, годы	
	точное вычисление	первое приближение	второе приближение	точное вычисление	приближение
I. Исходная возрастная структура, характерная для Таиланда в 1955 г.					
20	1,045	1,052	1,073	10,0	11,9
30	1,192	1,195	1,209	14,8	16,0
40	1,349	1,350	1,260	18,7	19,4
50	1,501	1,503	1,510	21,9	22,3
60,4	1,638	1,639	1,642	24,4	24,6
70,2	1,750	1,749	1,751	26,2	26,2
80,0*	1,881	1,881	1,881	28,3	28,3
II. Исходная возрастная структура, характерная для ГДР в 1957 г.					
20	0,603	0,604	0,575	7,0	8,8
30	0,670	0,699	0,648	11,8	13,0
40	0,745	0,744	0,729	15,7	16,4
50	0,819	0,819	0,809	18,8	19,3
60,4	0,886	0,887	0,880	21,3	21,6
70,2	0,941	0,940	0,938	23,1	23,2
80,0*	1,001	1,001	1,001	25,5	25,5

* Уровень, принятый в формуле для брутто-стационарного населения.

Таблица 13

СРАВНЕНИЕ КООРДИНАТ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРШИН, ВЫЧИСЛЕННЫХ НА ОСНОВЕ ИСХОДНОЙ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ТАИЛАНДА В 1955 г., И КООРДИНАТ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРШИН, ВЫЧИСЛЕННЫХ НА ОСНОВЕ ИСХОДНОЙ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ГДР В 1957 г.

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет	Отношение между ординатами			Различие между абсциссами	
	точное вычисление	первое приближение	второе приближение	точное вычисление	приближение
20	173,2	174,2	186,6	3,0	3,0
30	177,8	178,6	186,6	2,0	3,0
40	181,1	181,5	186,6	3,0	3,0
50	183,3	183,5	186,6	3,0	3,0
60,4	184,9	184,8	186,6	3,1	3,0
70,2	186,2	186,1	186,6	3,1	3,0
80,0*	186,6	186,6	186,6	3,0	3,0

* Уровень смертности, принятый для формулы брутто-стационарного населения.

При уровне смертности, соответствующем ожидаемой продолжительности жизни при рождении в 50 лет, переход от возрастной структуры ГДР к возрастной структуре Таиланда увеличивает ординату стационарной вершины на 83,3%, а ее абсциссу на 3 года. Из табл. 12 видно, что воздействия, вызываемые изменением исходной возрастной структуры, примерно одинаковы вне зависимости от уровня смертности и что приближенные формулы позволяют достаточно точно измерить эти воздействия.

Потенциал роста возрастной структуры

На полулогарифмическом графике, когда истинные коэффициенты естественного прироста невелики, прямые численности населения окружают вершину S. Здесь возникает искушение прибегнуть к терминологии геометрической оптики и сказать, что вершина огибающей семейства стационарных населений есть изображение исходной возрастной структуры посредством модельных таблиц смертности.

Если после выбора исходной возрастной структуры и модельной таблицы смертности мы проведем на полулогарифмическом графике большое количество прямых численности населения для истинных коэффициентов естественного прироста, которые будут лишь незначительно отличны от нуля, то мы увидим, что все эти линии исходят из точки, которая есть не что иное, как стационарная вершина S, подобно лучам света, исходящим из изображения светящейся точки оптической системы. Аналогия еще более усиливается благодаря требованию, чтобы истинный коэффициент естественного прироста был невелик. Известно, что простые оптические инструменты не дают резкого изображения, если световые лучи не наклонены под небольшим углом к оси линзы и светосила линзы не велика. Так и в данном случае «изображение» исходной возрастной структуры через модельную таблицу смертности достаточно «резко» только тогда, когда истинный коэффициент естественного прироста невелик. В противном случае прямые численности населения отклоняются от стационарной вершины и имеют огибающую, характеристики которой были определены выше. Эта огибающая встречается также и в оптических инструментах. Если условия относительно резкости изображения не удовлетворены, то лучи света могут иметь так называемую «каустическую огибающую» *. Конечно, эта аналогия не должна заводить нас слишком далеко, но терминология из области оптики может облегчить понимание некоторых положений.

Если мы возьмем ряд исходных возрастных структур K_1, K_2, K_3 и т. д., то будет существовать соответствующий ряд «изображений» S_1, S_2, S_3 и т. д. через данные модельные таблицы смертности. Если изменится таблица смертности, то изображения сдвигаются без искажения. Таким образом, изображение *само по себе* не зависит от смертности. Оно зависит исключительно от исходных возрастных структур. Смертность просто фиксирует его место на графике. Следовательно, изображение, образуемое контуром S_1, S_2, S_3 и т. д., позволяет выделить воздействие каждой из исходных возрастных структур на потенциал роста населения с такой возрастной структурой. Сказанное можно пояснить на примере. Был выполнен ряд последовательных вычислений женского брутто-стационарного населения в расчете на 1 млн. человек исходного населения с теми же возрастными структурами, которые наблюдались за последнее время в 28 странах. Полученное таким образом на основе населений 28 стран изображение представлено на рис. 8. Два экстремальных значения дают ГДР и Таиланд, и это показывает, что, выбрав две названные страны в качестве примеров, мы охватили все варианты, которые могут встретиться в действительности. Изменения абсциссы стационарной вершины невелики, и ими можно в первом приближении пренебречь. Изменения ее ординаты значительны, и верхний экстремум в два раза больше, чем нижний. Для ГДР мы находим численность брутто-стационарного населения равной 1 008 000 человек. Это означает, что население численностью 1 млн. человек, с такой же возрастной структурой, как женское население ГДР в 1957 г. с нетто-коэффициентом воспроизводства, равным 1,00 (т. е. в данном случае брутто-коэффициент воспроизводства равен единице), и подчиняющееся функции дожития, представленной в в табл. 10, стремилось бы к стационарному населению численностью 1 008 000 человек. Для Тайваня в 1959 г. мы находим численность брутто-стационарного населения равной 1 894 000 человек.

* Каустической огибающей (поверхностью, кривой или просто каустикой) в оптике называют геометрическое место точек пересечения после отражения в оптической системе пучков параллельных лучей. — *Прим. ред.*

Если бы была принята другая функция дожития, вместо той, что представлена в табл. 10, то вычисленные нетто-стационарные населения отличались бы от брутто-стационарных населений. Новая ломаная линия, которая была бы получена на рис. 8 для рассматриваемых 28 стран, стала бы результатом преобразования ломаной линии, соответствующей брутто-стационарному населению. В частности, соотношение между новыми ординатами для Тайваня и ГДР

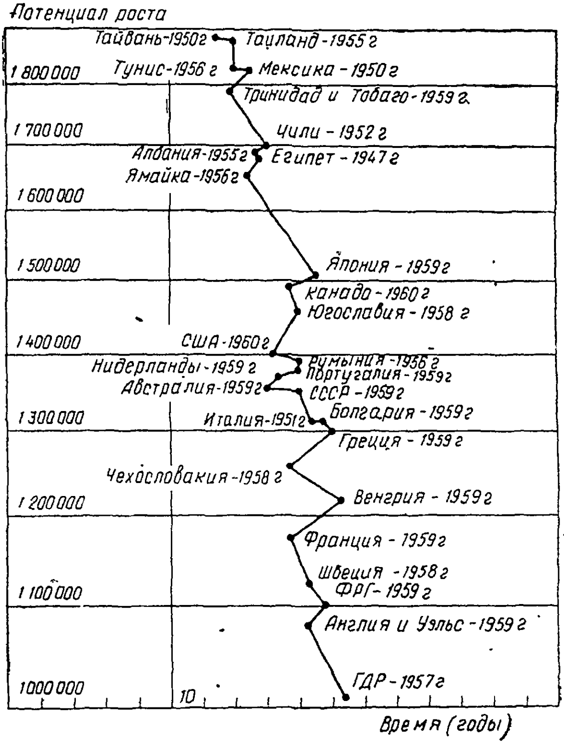

Рис. 8. Женское брутто-стационарное население из расчета 1 млн. человек исходного населения в 28 странах по последним данным (потенциал роста)

было бы таким же, как соотношение между 1 008 000 и 1 894 000. Иными словами, Тайвань рассматривается как имеющий почти вдвое бо́льшую «способность к росту», чем ГДР, исключительно в силу различия их возрастных структур. Численность брутто-стационарного населения, таким образом, представляет собой меру «потенциала роста» возрастной структуры. Выражение «потенциал роста» населения — это название статьи, представленной в Статистическое общество Парижа Полем Венсаном в 1945 г.[7]. Наша за-

[7] Paul Vincent: Potentiel d'accroissement d'une population. *Journal de la Société de statistique de Paris* (janv.—févr., 1945), p. 16 et suiv.

дача аналогична той, которую Поль Венсан рассматривал в своей статье, а предложенное им решение очень близко к нашему.

Г. Семейства населений с постоянной плодовитостью

Как было отмечено ранее, математическое исследование семейств населений с постоянной плодовитостью не столь просто, как исследование семейств с постоянной смертностью. Две категории семейств определяются двумя формулами:

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{\omega} p_f(a)\, e^{-ra} da \int_0^{v} \frac{K_f(a)}{p_f(a)} G(a)\, e^{ra} da$$

и

$$\int_0^{v} e^{-ra} p_f(a)\, \varphi_f(a)\, da = 1.$$

В семействах с постоянной смертностью каждому значению r соответствует единственное значение N. В семействах с постоянной плодовитостью известное значение r еще не определяет значения N. Действительно, существует столько значений N, сколько имеется функций $p_f(a)$, удовлетворяющих второму условию. Задача становится определенной после установления второго условия — относительно того, что смертность должна изменяться в соответствии с рядом модельных таблиц смертности. Обычно[8], когда дело обстоит подобным образом, функция $p_f(a)$ однозначно определяется второй формулой для каждой пары значений r и $\varphi_f(a)$, а условия, налагаемые в этом случае, такие же, как и при исследовании семейств населений с постоянной смертностью. Величина N тогда зависит только от единственного параметра r. Ясно, однако, что анализ, который мы можем проделать, связан в таком случае с рядом выбранных модельных таблиц смертности; иными словами, после того как принят ряд модельных таблиц смертности, становится оправданным *эмпирическое* изучение семейств населений с постоянной плодовитостью. Ряд модельных таблиц смертности (средняя серия) послужил для этого эмпирического исследования. Мы уже отмечали, что можно записать

$$N_f(t) = e^{rt} \int_0^{v} \frac{K_f(a, 0)\, G(a)}{C_f(a)}\, da,$$

где $C_f(a)$ есть возрастная структура стабильного населения. Когда

---

[8] Оговорка «обычно» необходима, поскольку можно представить ряд модельных таблиц смертности, в которых несколько значений $p_f(a)$ могут соответствовать единственной паре r, $\varphi_f(a)$. Уточним, что сказанное не относится к модельным таблицам, публикуемым Секретариатом ООН. Эти таблицы принадлежат к общепринятому типу. Однако таблицы смертности, которыми пользовались для определения брутто-стационарного населения и которые соответствуют кривым дожития, находящимся в пределах заштрихованной области на рис. 6, — это, по сути дела, таблицы, где уже нет связи между $p_f(a)$, $\varphi_f(a)$ и r.

смертность изменяется в соответствии с рядом модельных таблиц смертности, выбранных для анализа, это не оказывает значительного воздействия на возрастную структуру стабильных населений. Такая структура зависит в основном от плодовитости. Это значит, что для некоторой заданной функции плодовитости возрастная

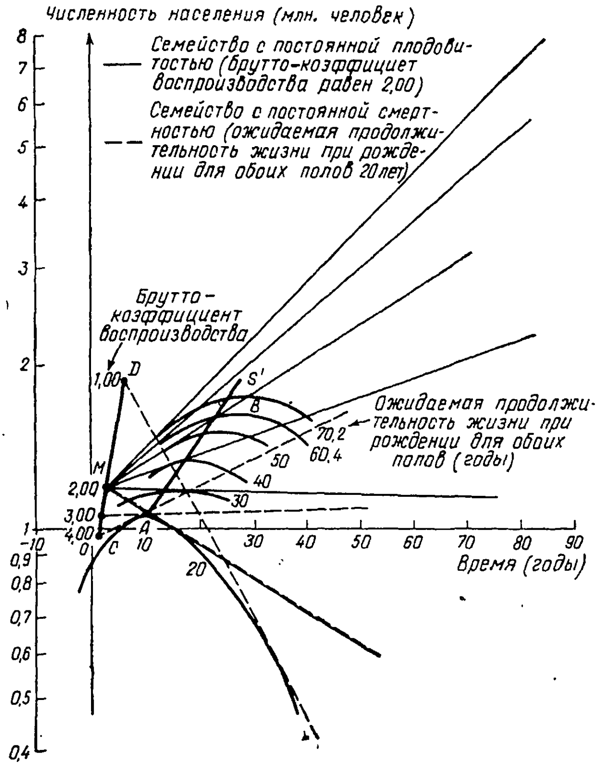

Рис. 9. Характеристики семейств женских населений с постоянной плодовитостью и постоянной смертностью, вычисленные на основе населения численностью 1 млн. человек с возрастной структурой, характерной для женского населения Таиланда в 1955 г.

структура существенно не меняется. Соответственно, когда $t=0$, различные значения $N_f(0)$ будут достаточно близкими. Для данной функции плодовитости на полулогарифмическом графике мы можем таким образом рассчитывать найти прямые, которые окружают некоторую точку в окрестности вертикальной оси. Рис. 9 подтверждает наше предположение. Будет видно, что для всех значений истинного коэффициента естественного прироста, которые на практике имеют место в человеческих популяциях, каждое семейство населений с постоянной плодовитостью на полулогарифмическом графике сводится к пучку прямых линий [9]. В табл. 14 приводятся координаты вершины пучков семейств населений с постоянной плодовитостью для четырех уровней плодовитости (брутто-коэффициенты воспроизводства 4,00; 3,00; 2,00; 1,00), определенные *эмпирически* на основе населения численностью 1 млн. человек с возрастными

Таблица 14

КООРДИНАТЫ ВЕРШИНЫ ПУЧКОВ ЖЕНСКИХ НАСЕЛЕНИЙ С ПОСТОЯННОЙ СМЕРТНОСТЬЮ ДЛЯ 1 МЛН. ЖЕНЩИН В НУЛЕВОЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ И ДЛЯ РАЗНЫХ УРОВНЕЙ ПЛОДОВИТОСТИ

Брутто-коэффициент воспроизводства	Абсцисса вершины, лет	Ордината вершины
Возрастная структура населения Таиланда в 1955 г.		
4,00	1,7	990 000
3,00	2,0	1 040 000
2,00	2,6	1 200 000
1,00	5,5	1 880 000
Возрастная структура населения Таиланда в 1955 г.		
4,00	1,0	580 000
3,00	1,4	600 000
2,00	2,0	670 000
1,00	4,9	980 000

структурами, характерными для населения Таиланда в 1955 г. и ГДР в 1957 г. На рис. 9 вершины пучков, определенные на основе возрастной структуры Таиланда, образуют кривую *CD*. Каждая точка этой кривой соответствует некоторому уровню плодовитости, и можно сказать, что эта точка есть «изображение» возрастной структуры Таиланда через этот уровень плодовитости. *В данном случае, однако, «изображение» вполне «резкое», даже если истинные коэффициенты естественного прироста высоки.* Если, основываясь на возрастной структуре населения Таиланда и на данном уровне плодовитости, мы изобразим ряд прямых численности населения на полулогарифмическом графике, то по мере изменения

[9] На метрическом графике каждое семейство будет представлено совокупностью экспоненциальных кривых, проходящих через фиксированную точку.

смертности эти прямые будут отклоняться от точки, расположенной на кривой CD. Вспомним, что аналогичный результат был получен при исследовании прямых численности населения с постоянной смертностью. Полученные прямые будут расходиться из точки, расположенной на кривой AB, при условии, что истинный коэффициент естественного прироста будет невелик. Таким образом, эти два результата могут быть теперь объединены. Если мы вычислим большое количество стабильных населений на основе возрастной структуры Таиланда при различных кривых смертности и плодовитости и если мы нанесем соответствующие прямые численности населения на полулогарифмический график, то можно будет заметить, что на графике появятся две кривые — AB и CD. Первая кривая, AB, будет определена очень плохо, так как в ее образовании принимают участие только прямые роста численности населения с низким истинным коэффициентом естественного прироста. Вторая же кривая, CD, определится очень четко, так как огибающая семейства населений с постоянной плодовитостью сводится к точке. Два отрезка кривых, AB и CD, суть «изображения» возрастной структуры Таиланда, реализованные посредством пространств смертности и плодовитости.

На рис. 9 отражены *два примера семейств* женских населений с уровнем плодовитости, соответствующим брутто-коэффициенту воспроизводства, равному 2,00. Прямые численности населения, вычисленные на основе возрастной структуры населения Таиланда, начинаются из точки M. Они изображены *сплошными прямыми линиями.* Все прямые численности женского населения, вычисленные на основе той же самой возрастной структуры, но с постоянной смертностью, соответствующей модельной таблице смертности с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 20 лет, будут касательными к кривой, помеченной числом 20[10]. Они изображены *пунктиром.*

Воздействие изменений возрастной структуры на пучки населений с постоянной плодовитостью

Каждая возрастная структура имеет соответствующую ей кривую CD. На рис. 10 показаны две кривые, полученные на основе возрастных структур женского населения Таиланда и ГДР. Видно, что переход от населения Таиланда к населению ГДР, как и в случае кривой стационарных вершин, ведет к сдвигу вниз и влево. Исходя из табл. 15, можно заметить, что сдвиг вниз одинаков по порядку величин в обоих случаях, тогда как сдвиг влево заметно меньше для изображения, соответствующего постоянной плодовитости, чем для изображения, соответствующего постоянной смертности. Если рассматривать $ABCD$ как единое целое, то можно сказать, что при переходе от населения Таиланда к населению ГДР изображение $ABCD$ сдвигается вниз и сжимается.

[10] Такое значение ожидаемой продолжительности жизни при рождении было выбрано из соображений наглядности рисунка. Это — предельная величина, крайне редко встречающаяся на практике.

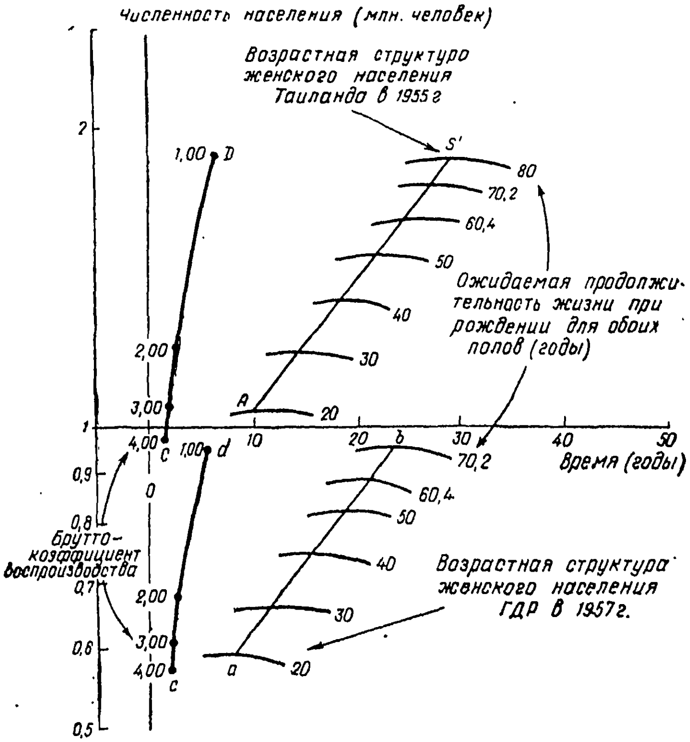

Рис. 10. Сравнение характеристик семейств женских населений с постоянной плодовитостью и постоянной смертностью, вычисленных на основе населения численностью 1 млн. человек: (А) с возрастной структурой женского населения Таиланда в 1955 г.; (а) с возрастной структурой женского населения ГДР в 1957 г.

Таблица 15

СРАВНЕНИЕ «ИЗОБРАЖЕНИЙ» НАСЕЛЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СМЕРТНОСТЬЮ И С ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ ЖЕНСКИХ НАСЕЛЕНИЙ ТАИЛАНДА В 1955 г. и ГДР в 1957 г. ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ УРОВНЕЙ ПЛОДОВИТОСТИ

Брутто-коэффициент воспроизводства	Величина, на которую абсцисса точки Таиланда превосходит абсциссу точки ГДР, лет	Ордината точки Таиланда, деленная на ординату точки ГДР
4,00	0,6	1,707
3,00	0,6	1,716
2,00	0,6	1,765
1,00	0,6	1,837

Снижение уровня смертности в старческих возрастах

Мы видели, что в модельной таблице смертности с максимальной ожидаемой продолжительностью жизни смертность была низкой вплоть до достижения возраста v, т. е. до конца репродуктивного периода, и что ряд модельных таблиц смертности можно экстраполировать, приняв кривую дожития равной единице вплоть до достижения возраста v, с последующим уменьшением от единицы до нуля вплоть до достижения возраста ω, предельного возраста живущих. Однако наряду с этим мы видели, что это единственное условие снижения уровня смертности оставляет кривую дожития в возрастах старше v в значительной степени неопределенной. Рассмотрим теперь, каким образом исследование семейств населений с постоянной смертностью помогает, по крайней мере частично, уменьшить эту неопределенность.

Для каждого отдельно взятого уровня плодовитости существует истинный коэффициент естественного прироста, превысить который невозможно. Это — значение r, соответствующее нулевой смертности вплоть до достижения возраста v, или, иными словами, значение r, полученное путем экстраполяции одной из кривых дожития описанным выше образом[11]. Этот максимально возможный коэффициент есть действительный корень уравнения

$$\int_0^v \varphi_f(a)\, e^{-ra} da = 1.$$

В табл. 16 этот максимальный коэффициент вычислен для различных значений брутто-коэффициентов воспроизводства при условии, что возрастное распределение коэффициентов плодовитости есть промежуточное распределение.

Таблица 16

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИСТИННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗЛИЧНЫМ УРОВНЯМ ПЛОДОВИТОСТИ

(промежуточное возрастное распределение коэффициентов плодовитости)

Брутто-коэффициент воспроизводства	r, %
1,00	0,00
1,32	1,00
1,74	2,00
2,00	2,53
2,28	3,00
2,97	4,00
3,00	4,04

[11] Неопределенная природа кривой дожития в возрастах старше v не воздействует на значение максимального коэффициента.

Если «изображение» возрастной структуры для этих максимальных коэффициентов резкое, то прямые численности населения пройдут через точки на кривых CD, соответствующие значениям брутто-коэффициента воспроизводства, приведенным в табл. 16. Их можно изобразить, поскольку известен тангенс угла их наклона r. Это и сделано на рис. 11 для пяти истинных коэффициентов естественно-

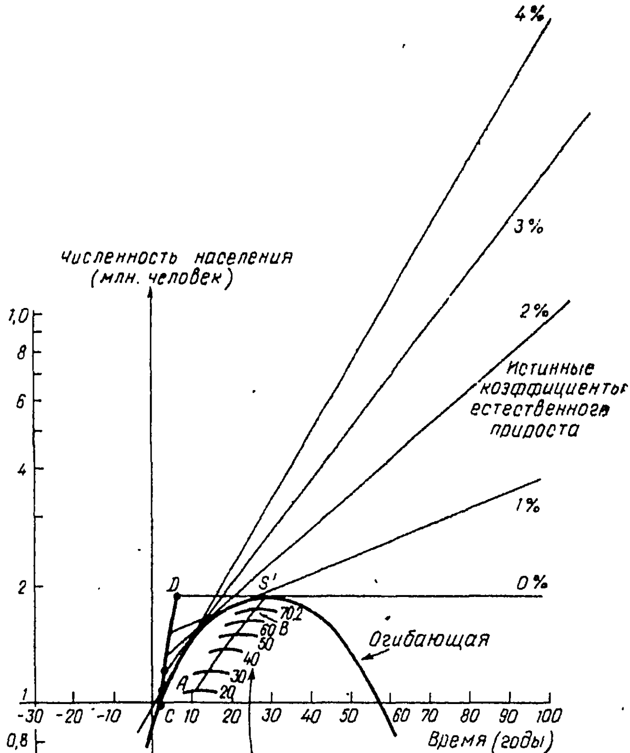

Рис. 11. Огибающая прямых численности населения, соответствующих максимальным значениям истинных коэффициентов естественного прироста для различных уровней плодовитости

го прироста: 0,00; 0,01; 0,02; 0,03 и 0,04. Огибающая этих прямых, проведенная от руки, по-видимому, представляет собой удачную экстраполяцию ряда огибающих, соответствующих модельным таблицам смертности. На кривой AB имеется соответствующая вершина S', ордината которой, как видно на рисунке, равна 1 880 000. Разделив эту величину на численность приведенного исходного брутто-населения, получаем 79,86, или округленно 80. Это — ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин, которую должна иметь таблица смертности при отсутствии смертности вплоть до возраста v в том случае, если соответствующая огибающая будет такой же, как огибающая прямых численности населения, имеющих максимальные истинные коэффициенты естественного прироста в качестве тангенсов углов наклона. Степень неопределенности в такой таблице очень мала, и именно подобным образом была получена таблица смертности для определения брутто-характеристик, нашедшая отражение в табл. 11, резюмируя, можно сказать, что для ряда модельных таблиц смертности, дополненных таблицей смертности из табл. 11, «изображение» возрастной структуры с постоянной плодовитостью сохраняет резкость при всех значениях истинного коэффициента естественного прироста, встречающихся на практике.

Уровни смертности с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении более 80 лет

Когда ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин превышает 80 лет, «изображение» перестает быть «резким». Поскольку плодовитость известна, известен также истинный коэффициент естественного прироста. Он равен максимальному коэффициенту естественного прироста, вычисленному выше. В результате все прямые численности населения, соответствующие данной плодовитости, имеют один и тот же тангенс угла наклона и, следовательно, параллельны. Таким образом, они, по-прежнему, проходят через одну и ту же точку, но эта точка бесконечно удалена. Это выглядит так, как если бы точка на кривой CD, которую окружают прямые численности населения, была бы неожиданно устремлена к бесконечности, в тот момент, когда тангенс угла наклона прямой численности населения достиг величины максимального коэффициента, причем движение осуществлялось бы в направлении прямой, тангенс угла наклона которой равен этому максимальному истинному коэффициенту естественного прироста. Следовательно, для ожидаемой продолжительности жизни при рождении более 80 лет характер рассматриваемого явления совершенно иной.

Новая интерпретация понятия брутто-стационарного населения

Брутто-стационарное население, понятие которого было определено выше, предстает теперь перед нами в новом свете. Его ордината не что иное, как ордината точки D, которую окружают прямые численности населения, *когда брутто-коэффициент воспроизводства равен единице*. Абсцисса точки D изменяется весьма незначительно по мере изменения возрастной структуры (для столь несходных между собой возрастных структур Таиланда и ГДР различие между абсциссами точки D составляет 0,6 года) и, в сущности, изменяется только ордината точки D. Можно сказать, что на практике абсцисса точки D всегда равна 5 годам. Иными словами, все «изображения» ряда возрастных структур через постоянный брутто-коэффициент воспроизводства, равный единице, должны лежать на прямой, параллельной вертикальной оси и сдвинутой на 5 лет вправо от точки начала координат; а ординаты этих изображений должны быть равны численности брутто-стационарных населений. Далее, изображения будут «резкими» для всех истинных коэффициентов естественного прироста, встречающихся на практике. Таким образом, очевидно, что брутто-стационарное население есть средство измерения потенциала роста населений.

Д. Семейства кривых числа рождений

Мы уделили много внимания рассмотрению общей численности населения, но, естественно, могут быть также исследованы кривые числа рождений, прироста населения и числа смертей. Мы ограничимся семействами с постоянной смертностью; начнем с рождений. Формула для числа рождений в момент времени t имеет следующий вид:

$$B_f(t) = e^{rt} \int_0^u \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da.$$

Изменяя истинный коэффициент естественного прироста r, мы получаем ряд кривых с огибающей; абсцисса точки касания получается, если принять величину $dB_f(t)/dr$ равной нулю. Мы имеем

$$\frac{dB_f(t)}{dr} = te^{rt} \int_0^u \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da +$$

$$+ e^{rt} \int_0^u \frac{aK_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da = B_f(t) [t_c + \gamma].$$

Это выражение равно нулю при $t_c = -\gamma$; как уже отмечалось, γ означает средний возраст:

$$\gamma = \frac{\int_0^u \frac{aK_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da}{\int_0^u \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da}.$$

Было показано, что, когда r изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, γ увеличивается от нуля до γ'; γ' есть средний возраст матери в исходном населении при рождении ею ребенка.

Ордината точки касания есть

$$B_c = B_f(t_c) = e^{-r\gamma} \int_0^u \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a) e^{ra} da$$

и тангенс угла наклона касательной к огибающей в точке касания есть rB_c. Этот тангенс угла наклона равен нулю при $r=0$. Огибающая, таким образом, достигает максимума, когда население становится стационарным. Исходя из ранее приведенных рассуждений, B_c и rB_c приближаются к нулю, когда r приближается к $\pm\infty$. И наконец, форма огибающей показана на рис. 12. На полулогарифмическом графике огибающая прямых числа рождений имеет две вертикальные асимптоты с абсциссами 0 и $-\gamma$ (см. рис. 13).

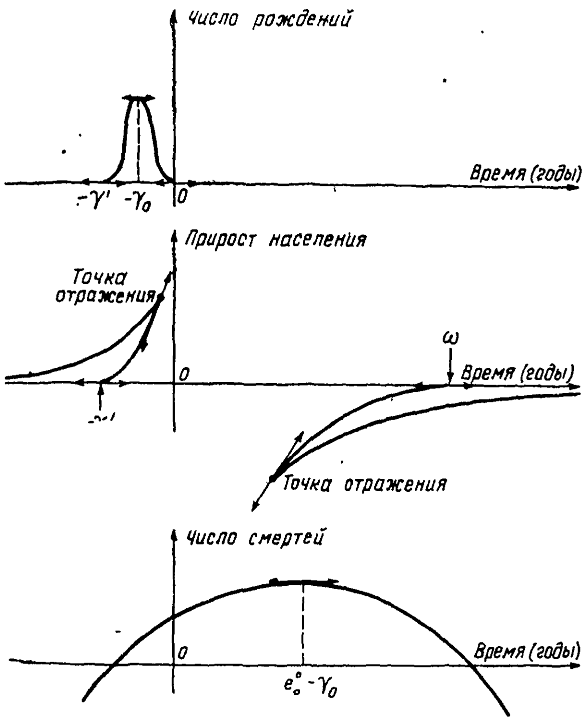

Рис. 12. Форма огибающей числа рождений, прироста населения и числа смертей в семействах населений с постоянной смертностью (метрический масштаб для обеих осей)

Огибающая прямых числа рождений, таким образом, аналогична по форме огибающей прямых численности населения. Две асимптоты огибающей прямых числа рождений ближе друг к другу, чем асимптоты огибающей прямых численности населения (расстояние между ними есть γ' в первом случае и $\gamma'+\omega$ во втором). Огибающая прямых числа рождений, следовательно, «компактнее», чем огибающая прямых численности населения. Таким образом, «изображение» числа рождений остается «резким» на протяжении более широкого диапазона изменения r, чем изображение общей численности населения.

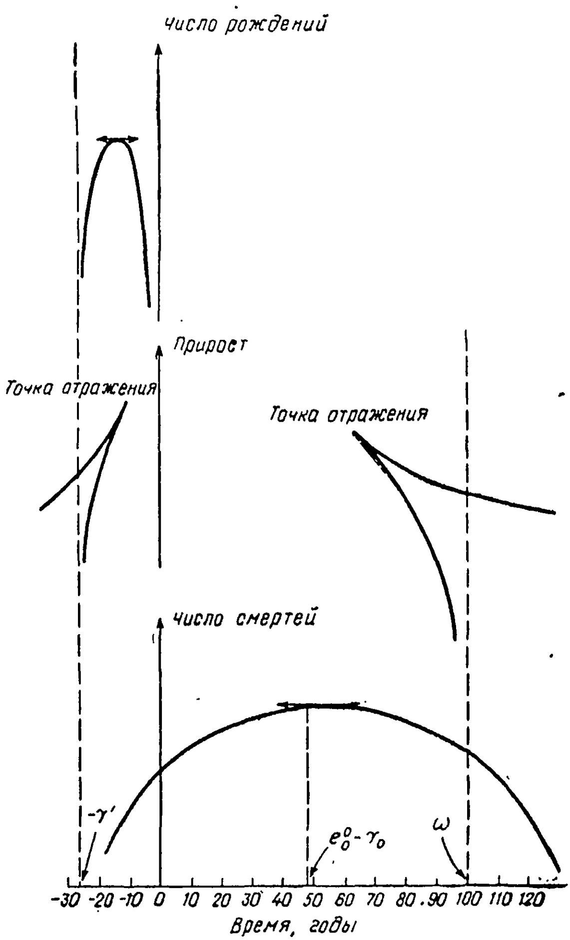

Рис. 13. Форма огибающей числа рождений, прироста населения и числа смертей в семействах населений с постоянной смертностью (метрический масштаб для горизонтальной оси и логарифмический масштаб для вертикальной оси)

Е. Семейства кривых прироста населения

Прирост населения в момент времени t выражается в виде

$$A_f(t) = rN_f(t) = re^{rt}\int_0^\omega e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^\omega \frac{K_f(a,0)}{p_f(a)}G(a)\,e^{ra}da.$$

В тех случаях, когда смертность постоянна, кривые $A_f(t)$ при различных значениях истинного коэффициента естественного прироста имеют огибающую. Абсцисса точки касания огибающей получается путем приравнивания производной $A_f(t)$ по r к нулю:

$$\frac{dA_f(t)}{dr} = N_f(t) + \frac{rdN_f(t)}{dr}.$$

Ранее мы видели, что

$$\frac{dN_f(t)}{dr} = N_f(t)\,(t-\alpha+\gamma).$$

Находим, таким образом,

$$\frac{dA_f(t)}{dr} = N_f(t)\,[1 + r\,(t-\alpha+\gamma)],$$

что равно нулю для величины

$$t_c = \alpha - \gamma - \frac{1}{r},$$

равной абсциссе точки касания огибающей. Ее ордината есть

$$A_f(t_c) = re^{rtc}\int_0^{\omega} e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^{\omega}\frac{K_f(a,\,0)}{p_f(a)}G(a)\,e^{ra}da,$$

или

$$A_f(t_c) = rN_f(t_c).$$

Тангенс угла наклона касательной есть

$$\alpha\,[A_f(t_c)]\,/\,dt = r^2N_f(t_c) = A_f(t_c) = rN_f(t_c) =$$
$$= r^2e^{rtc}\int_0^{\omega} e^{-ra}p_f(a)\,da\int_0^{u}\frac{K_f(a,\,0)}{p_f(a)}G(a)\,e^{ra}da.$$

Когда r приближается к нулю, t_c увеличивается до бесконечности и, следовательно, асимптота огибающей есть горизонтальная ось. Более того, исходя из предшествующих результатов, легко заметить, что, когда r приближается к $+\infty$, t_c стремится к $-\gamma'$, $A_f(t_c)$ стремится к нулю и тангенс угла наклона касательной в точке касания огибающей также стремится к нулю. Когда r приближается к $-\infty$, t_c стремится к ω, $A_f(t_c)$ стремится к нулю и $rA_f(t_c)$ также стремится к нулю.

Следует, однако, заметить, что выражение $t_c = \alpha - \gamma - 1/r$ имеет минимальное и максимальное значения. Это можно увидеть на рис. 14, где показаны изменения t_c, вычисленные на основе женской таблицы смертности, соответствующей ожидаемой продолжительности жизни при рождении для обоих полов 60,4 года. Огибающая показывает точку отражения для максимального и минимального значений t_c. И наконец, форма огибающей показана на рис. 12.

Когда мы обращаемся к полулогарифмическому графику, возникает новая трудность, так как отрицательные числа не имеют логарифмов. Вместо того, чтобы рассматривать прирост населения, мы проиллюстрируем преобладание рождений над смертями для положительных истинных коэффициентов естественного прироста и преобладание смертей над рождениями для отрицательных истинных коэффициентов естественного прироста. Это демонстрируется на рис. 13.

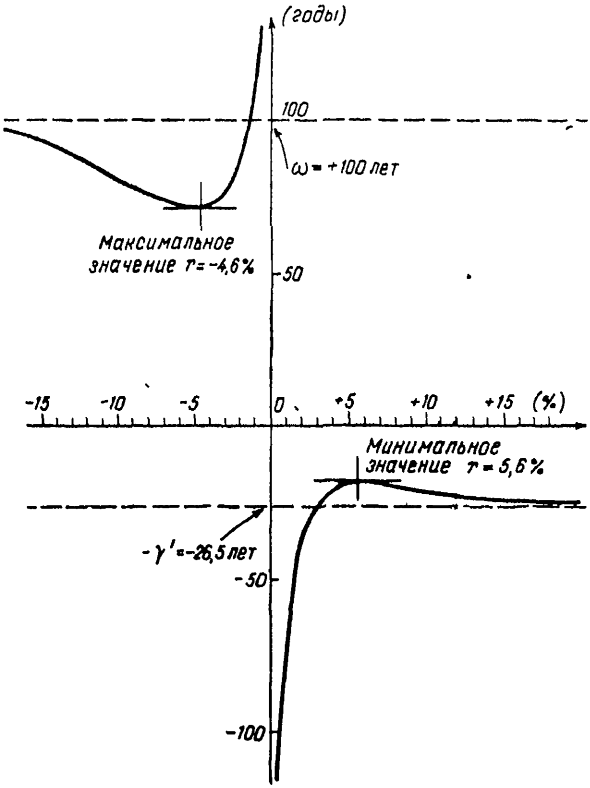

Рис. 14. Изменение $t_c = \alpha - \gamma - 1/r$ как функции r (средняя серия модельных таблиц смертности с ожидаемой продолжительностью жизни при рождении для обоих полов 60,4 года)

Ж. Семейство кривых числа смертей

Число смертей в момент времени t определяется формулой

$$D_f(t) = B_f(t) - A_f(t),$$

где мы можем просто заменить $B_f(t)$ и $A_f(t)$ выражениями, представленными выше. Когда r изменяется, кривые $D_f(t)$ имеют огибающую. Абсцисса точки касания получается путем приравнивания производной от $D_f(t)$ к нулю:

$$\frac{dD_f(t)}{dr} = \frac{dB_f(t)}{dr} - \frac{dA_f(t)}{dr}.$$

Основываясь на предшествующих расчетах, мы можем записать это выражение как

$$\frac{dD_f(t)}{dr} = (t+\gamma)\,B_f(t) - N_f(t)\,[1 + r(t - \alpha + \gamma)],$$

или

$$\frac{dD_f(t)}{dr} = B_f(t)\left\{t + \gamma - \frac{1}{b}\,[1 + r(t - \alpha + \gamma)]\right\}.$$

Это выражение равно нулю для

$$t_c = \frac{1 - rd + \gamma d}{d} = \frac{1 - ra}{d} - \gamma,$$

где d есть общий коэффициент смертности. Следует тут же указать, что для стационарного населения t_c есть очень простая величина. Если $r=0$, то мы имеем

$$t_c = \frac{1}{d} - \gamma_0 = e_0{}^0 - \gamma_0,$$

где $e_0{}^0$ есть ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин. Для того чтобы вычислить значения t_c при бесконечно увеличивающемся r, нужно знать предельные значения для бесконечного r. Выражение для d имеет следующий вид:

$$d = \frac{\int\limits_0^\omega e^{-ra}\,p_f(a)\,g_f(a)\,da}{\int\limits_0^\omega e^{-ra}\,p_f(a)\,da},$$

где $g_f(a)$ есть вероятность смерти.

Если r приближается к $+\infty$, то d стремится к $g_f(0)$.

Если r приближается к $-\infty$, то d стремится к $g_f(\omega) = 1$. Теперь легко заметить, что

t_c стремится к $-\infty$, когда r стремится к $+\infty$;

t_c стремится к $+\infty$, когда r стремится к $-\infty$.

Тангенс угла наклона касательной к огибающей равен $rD(t)$. Он равен нулю для $r=0$. Максимум огибающей приходится на стационарное население. Наконец, мы имеем кривую на рис. 12 с метрическими координатами и кривую на рис. 13 с полулогарифмическими координатами. Эта кривая чем-то сходна с огибающей семейств населений, но она более плоская, поскольку вытягивается к бесконечности как по горизонтали, так и по вертикали, когда r становится бесконечным. При постоянной смертности, для данного диапазона изменения r, *«изображение» смертей менее «резко», чем изображение населений.* Для рождений картина была обратной.

3. Заключение

Наши рассуждения о числе рождений, приросте населения и числе смертей подходят к концу. *Исследование этих вопросов есть, по сути дела, исследование семейств населений.* Предшествующие разработки привели нас к понятию «потенциала роста» населения. Оно было предложено Полем Венсаном в 1945 г.[12] и до сих пор, в сущности, не находило себе применения в демографии.

В своей работе П. Венсан определил «потенциал роста населения» следующим образом:

$$A = \int_0^v K_f(a, 0)\, H(a)\, da.$$

$H(a)$ — функция, значения которой приведены в табл. 17. Значения $H(a)$ при различных (a) пропорциональны, так что их вполне можно вычислять и пользуясь функцией $h(a)$ и возрастным распределением $H(a)$. Будет показано, что $h(a)$ весьма близка к функции $G(a)$ в наших расчетах[13].

Таблица 17

СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА РОСТА НАСЕЛЕНИЯ, ПРИ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ЭТОГО ПОТЕНЦИАЛА

Возрастная группа, лет	Функция, предложенная П. Венсаном		Функция, применяемая в настоящей работе $G(a)$
	$H(a)$	$h(a)$	
0—4	4,416	15,70	18
5—9	4,498	15,99	18
10—14	4,538	16,13	18
15—19	4,550	16,17	17
20—24	4,090	14,54	13
25—29	3,053	10,85	9
30—34	1,877	6,67	5
35—39	0,875	3,11	2
40—44	0,221	0,79	0
45—49	0,013	0,05	0
0—49	28,131	100,00	100

Таким образом, предлагаемое в настоящей работе определение потенциала роста населения практически идентично определению П. Венсана с точностью до множителя пропорциональности.

Преимущество нашего определения состоит в более широкой

[12] Paul Vincent. Op. cit.

[13] Функция $h(a)$ почти идентична функции $G(a)$, вычисленной в табл. 14 на основании возрастного распределения женских коэффициентов плодовитости, наблюдавшихся в Испании в 1940 г. Это объясняется тем, что П. Венсан основывал свои расчеты на коэффициентах плодовитости Швеции в 1921—1930 гг., возрастное распределение которых очень близко к распределению для Испании.

возможности его толкования, а также в том, что оно имеет весьма общий характер. Можно надеяться, что в этой новой форме «потенциал роста населения» ожидает лучшее будущее.

Таблица 18

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА РОСТА НАСЕЛЕНИЯ ЕГИПТА В 1948 г.

Возрастная группа, лет	Женское население по материалам переписи 1947 г.	Функция $G(a)$	Произведение двух предшествующих столбцов
0—4	1 305 235	0,18	234 942
5—9	1 191 197	0,18	214 415
10—14	1 071 153	0,18	192 808
15—19	917 427	0,17	155 963
20—24	706 152	0,13	91 800
25—29	786 537	0,09	70 788
30—34	689 549	0,05	34 477
35—39	653 645	0,02	13 073

Таблица 19

ПОТЕНЦИАЛ РОСТА 28 НАСЕЛЕНИЙ ПО ПОСЛЕДНИМ ДАННЫМ*

(на 1000 человек)

Страна	Год	Потенциал роста
Тайвань	1959	1 894
Таиланд	1955	1 881
Тунис	1956	1 826
Мексика	1950	1 826
Тринидад и Тобаго	1959	1 790
Чили	1952	1 698
Албания	1955	1 689
Египет	1947	1 685
Ямайка	1956	1 659
Япония	1959	1 508
Канада	1960	1 486
Югославия	1958	1 458
США	1960	1 401
Румыния	1956	1 387
Португалия	1959	1 371
Нидерланды	1959	1 363
Австралия	1959	1 363
СССР	1959	1 351
Италия	1951	1 312
Болгария	1959	1 312
Греция	1959	1 302
Чехословакия	1958	1 254
Венгрия	1959	1 214
Франция	1959	1 174
Швеция	1958	1 121
ФРГ	1959	1 098
Англия и Уэльс	1959	1 079
ГДР	1957	1 008

* В расчете приняты возрастные структуры женских населений, опубликованные в Demographic Yearbook, 1960 (United Nations Publication, Sales № 61.XIII,1).

В заключение приведем пример вычисления *потенциала роста населения* (табл. 18). Согласно нашему определению это не что иное, *как брутто-приведенное исходное население в расчете на 1 млн. человек исходного населения* Брутто-приведенное исходное население получается путем умножения итога последнего столбца на 16, т. е. 1 008 266·16 = 16 132 256. Согласно материалам переписи Египта 1947 г. численность женского населения составляла 9 575 039 человек. Приведенное исходное население в расчете на 1 млн. человек исходного населения, таким образом, равно:

$$\frac{16\,132\,256}{9\,575\,039} = 1\,684\,824.$$

Выраженный в расчете на тысячу человек, потенциал роста населения Египта в 1947 г. будет 1685. В табл. 19 приводятся результаты аналогичных вычислений для 28 стран. По этим данным был построен рис. 8.

И. Некоторые замечания относительно величин, применявшихся в различных формулах настоящей работы для бесконечно больших значений истинного коэффициента естественного прироста r

Функция $G(a)$

С целью изучения функции $G(a)$ для бесконечно больших значений r удобно прибегнуть к дискретной записи. Последовательные возрастные интервалы можно обозначить через $0, 1, 2, \ldots, u, \ldots$ $\ldots, n, \ldots, v, \ldots, \omega$. Таким образом, u есть начало первого возрастного интервала, для которого плодовитость не равна нулю, v есть начало последнего интервала, для которого плодовитость не равна нулю, и ω есть начало последнего возрастного интервала с ненулевой численностью живущих. Если обозначить через $\bar{n}$ медианный возраст интервала, начало которого есть n, через l — длину каждого интервала и через F_n — интервальную функцию распределения коэффициентов женской плодовитости, которую примем неизменной и независимой от r, то можно записать:

$$G_n = \frac{\sum\limits_{n}^{v} p_f(\bar{n}')\, F_n e^{-r\bar{n}'} \cdot l}{\sum\limits_{0}^{v}\sum\limits_{n}^{v} p_f(\bar{n})\, F_n e^{-r\bar{n}} \cdot l}.$$

Первый случай: r стремится к $+\infty$. Когда r стремится к $+\infty$, тогда член $p_f(n) F_n e^{-r\bar{n}'} \cdot l$, стоящий в числителе суммы, превосходит все другие, вследствие чего в каждом из первых $(u+1)$ интервалов эта сумма равна $p_f(\bar{u}) F_u e^{-r\bar{u}} \cdot l$.

Для следующих $(v-u)$ интервалов она равна $p_f(\bar{n}) F_n e^{-r\bar{n}} \cdot l$.

Сумма, стоящая в знаменателе, тогда равна

$$(u+1)\,p_f(\overline{u'})\,F\mathrm{e}^{-r\overline{u'}}\cdot l+\sum_{u+1}^{v}p_f(\overline{n'})\,F_n\mathrm{e}^{-r\overline{n'}}\cdot l,$$

и член $\mathrm{e}^{-r\overline{n}}$ превосходит все остальные.

Таким образом, для первых $(u+1)$ интервалов находим, что

$$G_n=\frac{p_f(\overline{u})\,F_u\mathrm{e}^{-r\overline{u}}\cdot l}{(u+1)\,p_f(\overline{u})\,F_n\mathrm{e}^{-r\overline{u}}\cdot l}=\frac{1}{u+1}.$$

Для следующих $(v-u)$ интервалов имеем:

$$G_n=\frac{p_f(\overline{n})\,F_n\mathrm{e}^{-r\overline{n}}}{(u+1)\,p_f(\overline{u})\,F_u\mathrm{e}^{-r\overline{u}}}.$$

Когда r стремится к $+\infty$, G_n стремится к нулю для последних $(v-u)$ интервалов. И наконец, G_n есть постоянная вплоть до интервала u включительно, а после него равна нулю. Допустив, что первый интервал с ненулевой плодовитостью есть интервал с начальным возрастом 15 лет, находим, что $u\cdot l=15$. Для каждой из трех последовательных пятилетних возрастных групп 0—4, 5—9, 10—14 находим, что

$$G_{0-4}=G_{5-9}=G_{10-14}=\frac{u}{3(u+1)}=\frac{15}{3(15+l)}.$$

Возвращаясь к непрерывной записи с величиной l, стремящейся к нулю, получаем

$$G_{0-4}=G_{5-9}=G_{10-14}=\frac{15}{3\cdot 15}=\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$$

Второй случай: r стремится к $-\infty$. Вернемся к выражению

$$G_n=\frac{\sum\limits_{n}^{v}p_f(\overline{n})\,F_n\mathrm{e}^{-r\overline{n}}}{\sum\limits_{0}^{v}\sum\limits_{n}^{v}p_f(\overline{n})\,F_n\mathrm{e}^{-r\overline{n}}}.$$

В сумме, стоящей в числителе, когда r стремится к $-\infty$, член $p_f(\overline{v})F_v\mathrm{e}^{-r\overline{v}}$ превосходит все остальные, вследствие чего эта сумма равна

$$p_f(\overline{v})\,F_v\mathrm{e}^{-r\overline{v}}\cdot l.$$

Сумма, стоящая в знаменателе, тогда равна

$$(V+1)\,p_f(\overline{v})\,F_v\mathrm{e}^{-r\overline{v}}\cdot l$$

и G_n есть постоянная, равная

$$\frac{1}{v+1}.$$

Допустив, что последний интервал, для которого плодовитость не равна нулю, есть интервал, непосредственно предшествующий возрасту 45 лет, мы находим, что $v \cdot l = 45$.

Для каждой из пятилетних возрастных групп мы имеем

$$\underbrace{G_{0-4} = G_{5-9} = G_{10-14} = \ldots = G_{40-44}}_{9\ \text{групп}} = \frac{v}{9(v+1)} = \frac{45}{9(45+l)}.$$

Возвращаясь к непрерывной записи с величиной l, стремящейся к нулю, мы находим, что

$$G_{0-4} = G_{5-9} = G_{10-14} = \ldots = G_{40-44} = \frac{45}{9 \cdot 45} = \frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots$$

Приведенное исходное нетто-население

Приведенное исходное нетто-население имеет в непрерывной записи следующее выражение

$$\pi = \int_0^v \frac{K_f(a, 0)}{p_f(a)} G(a)\, e^{ra}.$$

Первый случай: r стремится к $+\infty$. Теперь рассмотрим поведение произведения $G(a) e^{ra}$, когда r стремится к $+\infty$. Для этого прибегнем к дискретной записи. Для первых $(u+1)$ интервалов это произведение будет равно

$$\frac{e^{r\overline{n}}}{u+1}.$$

Для последующих $(v-u)$ интервалов оно равно

$$\frac{p_f(\overline{n}) F_n}{(u+1)\, p_f(\overline{u})\, F_u e^{-r\overline{u}'}}.$$

Приведенное исходное нетто-население можно тогда записать как

$$\pi = \frac{1}{u+1} \sum_0^{u-1} \frac{K_n e^{r\overline{n}}}{p_f(n)} + \frac{e^{r\overline{u}'}}{(u+1)\, p_f(\overline{u})\, F_u} \sum_u^v K_n F_n.$$

Когда r стремится к $+\infty$, выражение π стремится к $+\infty$.

Второй случай: r стремится к $-\infty$. Мы видели, что, когда r стремится к $-\infty$, G_n равно $1/(v+1)$, так что произведение $e^{r\overline{n}} G_n$ равно

$$\frac{e^{r\overline{n}}}{v+1}.$$

Приведенное исходное нетто-население, таким образом, равно:

$$\pi = \frac{1}{v+1} \sum_0^v \frac{K_n e^{rn}}{p_f(\overline{n})}.$$

Когда r стремится $-\infty$, это выражение стремится к нулю.

Средний возраст γ приведенного исходного нетто-населения

Первый случай: r стремится к $+\infty$. В выражении π первые u членов пренебрежимо малы по сравнению с последующими $(v-u+1)$ членами. Как следствие средний возраст приведенного исходного нетто-населения равен:

$$\gamma = \frac{\sum_u^v K_n F_n \cdot \overline{n}}{\sum_u^v K_n F_n}.$$

Это выражение есть не что иное, как средний возраст γ' матери в исходном населении при рождении ею ребенка. Таким образом, когда r стремится к $+\infty$, γ стремится к γ'.

Второй случай: r стремится к $-\infty$. Начнем с выражения

$$\frac{\sum_0^v \frac{K_n e^{r\overline{n}} \cdot \overline{n}}{p_f(\overline{n})}}{\sum_0^v \frac{K_n e^{r\overline{n}}}{p_f(\overline{n})}}.$$

В числителе и знаменателе этой формулы слагаемое для первого интервала превосходит все остальные, и величина γ равна:

$$\gamma = \frac{K_0 e^{r\overline{0}} \cdot \overline{0}}{K_0 e^{r\gamma}} = \overline{0}.$$

$\overline{0}$ есть средний возраст первого интервала, и мы, таким образом, находим, что

$$\gamma = \frac{l}{2}.$$

Когда l стремится к нулю, γ стремится к нулю. И наконец, когда r стремится к $-\infty$, γ стремится к нулю.

Огибающая семейств населений с постоянной смертностью

Рассмотрим теперь, что происходит с точкой касания огибающей и с касательной к ней при бесконечно больших значениях r. Ордината точки касания N_c определяется по формуле

$$N_c = e^{rt_c} \int_0^{\omega} e^{-ra} p_f(a)\, da \int_0^{v} \frac{K_f(a)}{p_f(a)} G(a)\, e^{ra} da,$$

где $t_c = \alpha - \gamma$ есть *абсцисса точки касания.* Тангенс угла наклона касательной к огибающей равен rN_c.

Первый случай: r стремится к $+\infty$. Мы видели, что α стремится к нулю[14], а γ к γ', когда r приближается к $+\infty$. Абсцисса точки ка-

[14] α есть средний возраст стабильного населения. Он стремится к нулю, когда r стремится к $+\infty$, и к ω, когда r стремится к $-\infty$

сания стремится, таким образом, к $-\infty$. В дискретной записи N_c равна:

$$N_c = \left[e^{-r\gamma'} \sum_{0}^{\omega} e^{-r\bar{n}} p_f(\bar{n}) \right] \cdot \left[\frac{e^{r\bar{u}}}{(u+1)\, p_f(\bar{u})\, F_u} \sum_{u}^{v} K_n F_n \right].$$

Это можно записать как

$$N_c = \frac{e^{-r\gamma' + r\bar{u}}}{(u+1)\, p_f(u')\, F_u} ; \frac{1}{6} \sum_{u}^{v} K_n F_n,$$

где b есть общий коэффициент рождаемости стабильного населения. Поскольку γ' больше, чем u, $e^{-r\gamma'+ru}$ стремится к нулю, когда r стремится к $+\infty$. Общий коэффициент рождаемости стабильного населения стремится к $+\infty$, и, таким образом, $1/b$ стремится к нулю. И наконец, очевидно, что N_c стремится к нулю.

Тангенс угла наклона касательной к огибающей rN_c также стремится к нулю, поскольку произведение $r \cdot e^{-r\gamma'+ru}$ стремится к нулю.

Второй случай: r стремится к $-\infty$. Когда r стремится к $-\infty$, α стремится к ω, а γ' к нулю. Таким образом, абсцисса точки касания стремится к ω.

Ордината точки касания равна:

$$N_c = e^{\bar{\omega} r'} \sum_{0}^{\bar{\omega}} e^{-r\bar{n}} p_f(\bar{n}) \frac{1}{v+1} \sum_{0}^{v} \frac{K_n e^{r\bar{n}}}{p_f(\bar{n})}.$$

В сумме $\sum_{0}^{\omega} e^{-r\bar{n}} p_f(\bar{n})$ член $e^{-r\bar{\omega}} p(\bar{\omega})$ превосходит все остальные, когда r стремится к $-\infty$, а величина N_c равна:

$$\frac{e^{r\bar{\omega}}}{e^{r\bar{\omega}}} \frac{p_f(\bar{\omega})}{\omega + 1} \sum_{0}^{v} \frac{K_n e^{r\bar{n}}}{p_f(\bar{n})} = \frac{p_f(\bar{\omega})}{\omega+1} \sum_{0}^{v} \frac{K_n e^{rn}}{p_f(\bar{n})}.$$

Эта величина стремится к нулю, когда r стремится к $-\infty$. И наконец, очевидно, что ордината точки касания стремится к нулю.

Тангенс угла наклона касательной можно записать как

$$rN_c = \frac{r p_f(\omega)}{v+1} \sum_{0}^{v} \frac{K_n e^{r\bar{n}}}{p_f(\bar{n})}.$$

В сумме $\sum_{0}^{v} \frac{K_n e^{r\bar{n}}}{p_f(\bar{n})}$ член $\frac{K_0 e^{r\bar{0}}}{p_f(0)}$ превосходит все остальные, и мы находим, что

$$rN_c = \frac{p_f(\bar{\omega})}{v+1} \frac{K_0 e^{r\bar{0}}}{p_f(\bar{0})} = \frac{K_0 p_f(\bar{\omega})\, r e^{rl/2}}{(v+1)\, p_f(\bar{0})}.$$

Эта величина стремится к нулю после того, как величина l выбирается столь малой, сколь это необходимо. Таким образом, тангенс угла наклона касательной стремится к нулю.

Перевод *В. Л. Гопмана*

Жан Буржуа-Пиша

СТАБИЛЬНЫЕ, ПОЛУСТАБИЛЬНЫЕ НАСЕЛЕНИЯ И ПОТЕНЦИАЛ РОСТА

Jean Bourgeois-Pichat. Stable, semi-stable populations and growth potential. *Population studies*, vol. 25, № 2, 1971, p. 235—254.

В ООН недавно опубликовано исследование в области стабильных населений[1]. Как автор этого исследования, я пользуюсь случаем прокомментировать здесь некоторые моменты, заслуживающие более детального рассмотрения.

Экспоненциальное население

Альфред Лотка ввел в демографию понятие *экспоненциальное население* *. Оно определяется как население, в котором смертность и распределение по возрасту остаются неизменными во времени. В своем исследовании А. Лотка не разделял население по полу, так что следует рассматривать три вида населений:

женские населения;

мужские населения;

населения обоих полов.

Рассмотрим женское экспоненциальное население. Из определения следует, что это население будет расти с постоянным темпом r. Существует бесконечное число таких экспоненциальных населений; их можно классифицировать двояким образом:

1. Если функция дожития $l(x)$ известна, то для любого заданного значения r существует одно и только одно экспоненциальное население. Рассматривая все возможные функции дожития $l(x)$ и все возможные значения r, как это представлено в табл. 1, мы видим, что для каждой клетки таблицы существует единственное экспоненциальное население.

Обозначим это население через $H(r)$.

---

[1] The concept of a stable population: application to the study of populations of countries with incomplete demographic statistics. ST/SOA/SER. A/39. United Nations. New York, 1968. Часть этой работы публикуется в этом сборнике (с. 89).

* Автор вслед за А. Лоткой пользуется термином *мальтузианское население*. Однако в нашей литературе этот термин не принят, и поэтому такую модель мы называем *экспоненциальным населением*. — *Прим. пер.*

Таблица 1

ПЕРВЫЙ МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ МНОЖЕСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ

Функции дожития	Коэффициенты прироста					
	r_1	r_2	r_3	r_4	...	ρ
$l_1(x)$	$H_1(r_1)$	$H_1(r_2)$	$H_1(r_3)$	$H_1(r_4)$	...	
$l_2(x)$	$H_2(r_1)$	$H_2(r_2)$	$H_2(r_3)$	$H_2(r_4)$	...	
$l_3(x)$	$H_3(r_1)$	$H_3(r_2)$	$H_3(r_3)$	$H_3(r_4)$	...	
.		.				
.						
.						
$l_f(x)$	...	...	...	...		$H(r)$

Утверждение, что каждой из пар r и $l(x)$ соответствует лишь одно население, означает, что существуют формулы, выражающие зависимость r и $l(x)$ и дающие возможность вычислить характеристики экспоненциального населения $H(r)$. Наиболее важные из этих формул приводятся далее.

Если мы обозначим через $c(x)dx$ долю женщин в возрасте от x до $x+dx$, то имеем:

$$c(x) = \frac{e^{-rx}l(x)}{\int_0^{\omega} e^{-rx}l(x)dx}.$$

Общий коэффициент рождаемости [2]:

$$b = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-rx}l(x)\,dx}.$$

Если $\Phi(x, t)$ — функция плодовитости [3] населения, то

$$\int_m^M e^{-rx}l(x)\,\Phi(x, t)\,dx = 1, \tag{1}$$

где m и M — начальный и конечный возраст детородного периода.

2. Другой метод классификации множества экспоненциальных населений заключается в следующем.

---

[2] Поскольку мы рассматриваем женское население, рождения мальчиков в расчет не принимаются. Следовательно, рассматриваемый здесь общий коэффициент рождаемости есть женский коэффициент рождаемости, полученный делением числа рождений девочек на общее число женщин.

[3] Плодовитость представлена рядом женских повозрастных коэффициентов плодовитости, вычисленных путем деления для каждого возраста числа женщин, родивших девочек в данном календарном году, на общее число женщин того же возраста. Функция плодовитости обычно не остается неизменной, а зависит от времени t.

Если известно распределение населения по возрасту, то существует единственное экспоненциальное население, полученное при сочетании этого возрастного распределения с некоторым определенным значением r. Рассматривая все возможные возрастные распределения и все возможные значения r, как это представлено в табл. 2, мы видим, что для каждой клетки таблицы существует единственное экспоненциальное население; обозначим его через $F(r)$.

Таблица 2

ВТОРОЙ МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ МНОЖЕСТВА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ

Возрастной состав	Коэффициенты прироста				
	r_1	r_2	r_3	r_4	
$C_1(x)$	$F_1(r_1)$	$F_1(r_2)$	$F_1(r_3)$	$F_1(r_4)$	...
$C_2(x)$	$F_2(r_1)$	$F_2(r_2)$	$F_2(r_3)$	$F_2(r_4)$	...
$C_3(x)$	$F_3(r_1)$	$F_3(r_2)$	$F_3(r_3)$	$F_3(r_4)$	...
.					
.					
.					

Как и в предыдущем случае, утверждение, что каждой клетке табл. 2 соответствует единственное экспоненциальное население $F(r)$, означает, что существуют формулы, выражающие зависимость r и $c(x)$, дающие возможность вычислить характеристики экспоненциального населения $F(r)$. Наиболее важные из них:

общий коэффициент рождаемости: $b=c(0)$;

функция дожития: $l(x)=\frac{c(x)}{c(0)}e^{rx}$.

Если $\Phi(x,t)$ — функция плодовитости, то предыдущее равенство (1) принимает вид:

$$\int_m^M \frac{c(x)}{c(0)} e^{-rx}e^{rx}\Phi(x, t)\,dx=1,$$

что можно записать как

$$\int_m^M c(x)\Phi(x, t)\,dx=b. \qquad (2)$$

Это соотношение очевидно; умножение возрастного распределения на значения функции плодовитости дает общий коэффициент рождаемости.

Экспоненциальные населения табл. 1 и 2 идентичны. Два рассмотренных метода указывают лишь два разных пути классификации одного и того же множества населений.

Стабильное население

Вернемся к табл. 1 и сосредоточим наше внимание на всех экспоненциальных населениях $H(r)$, соответствующих данной функции дожития женщин $l(x)$.

Примем дополнительное условие, а именно, что функция плодовитости неизменна во времени и известна; тогда $\Phi(x, t)$ не будет зависеть от t, и равенство (1) может быть записано следующим образом:

$$\int_m^M e^{-rx} l(x)\, \Phi(x)\, dx = 1. \qquad (3)$$

Это уравнение относительно r имеет только один действительный корень ρ. Иными словами, существует единственное экспоненциальное население, для которого функция дожития постоянна и равна $l(x)$, а функция женской плодовитости постоянна и равна $\Phi(x)$. Коэффициент роста этого экспоненциального населения есть не что иное, как действительный корень ρ уравнения (3) относительно r. Такое экспоненциальное население $H(\rho)$ было названо Лоткой стабильным населением, соответствующим функциям $l(x)$ и $\Phi(x)$.

Экспоненциальное население всегда можно рассматривать как стабильное население, и для этого есть множество путей. Рассмотрим экспоненциальное население $H(r)$, соответствующее функции дожития $l(x)$. Существует бесконечное множество функций плодовитости, удовлетворяющих уравнению

$$\int_m^M e^{-rx} l(x)\, \Phi(x)\, dx = 1.$$

Обозначим эти функции через $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x), \ldots$ и т. д. $H(r)$ соответствует любому из следующих сочетаний:

$$l(x),\ \Phi_1(x);\ l(x), \Phi_2(x);\ l(x), \Phi_3(x) \text{ и т. д.}$$

До сих пор мы рассматривали только женское население, но подобные рассуждения можно провести и относительно мужского населения и относительно населения обоих полов. Однако в последнем случае определение функции плодовитости представляет некоторые трудности, и этот вопрос обычно не затрагивают.

Обобщение: население обоих полов

Определение, данное Лоткой для случая населения одного пола, легко обобщить на население, состоящее из лиц двух полов. Предположим, что доля рождений мальчиков, p, постоянна и что женское население экспоненциальное. Что можно сказать о мужском населении?

Поскольку число женских рождений меняется по экспоненте, число мужских рождений будет следовать тому же закону.

$$B_m(t) = \frac{p}{1-p} B_f(t) = \frac{p}{1-p} B_f(0)\, e^{rt}.$$

Возрастной состав мужского населения в момент t будет[4]:

$$C_m(x,\ t) = \frac{\frac{p}{1-p} B_f(0)\, e^{rt} e^{-rx} l_m(x,\ t)}{\frac{p}{1-p} B_f(0)\, e^{rt} \int\limits_0^{\omega} e^{-rx} l_m(x,\ t)\, dx},$$

что дает:

$$C_m(x,\ t) = \frac{e^{-rx} l_m(x,\ t)}{\int\limits_0^{\omega} e^{-rx} l_m(x,\ t)\, dx} = C_m(0,\ t)\, e^{-rx} l_m(x,\ t). \qquad (4)$$

Если функция дожития мужчин постоянна, то $l_m(x, t)$ не зависит от t, а из уравнения (4) видно, что $C_m(x, t)$ также не зависит от t. Таким образом, мужское население есть экспоненциальное население. Если возрастной состав мужского населения постоянен, то $C_m(x, t)$ не зависит от t, а уравнение (4) показывает, что $l_m(x, t)$ также постоянно. Мужское население есть экспоненциальное население и в этом случае.

Отсюда следует, что население, состоящее из лиц двух полов, также есть экспоненциальное население. Экспоненциальное население можно определить, следовательно, как население, в котором:

а) постоянна доля рождений мальчиков, p;

б) постоянны три из следующих четырех функций:
функция дожития женщин;
распределение женщин по возрасту;
функция дожития мужчин;
распределение мужчин по возрасту.

Стабильное население как предел процесса демографической эволюции

Рассмотрим теперь реальное население. Обычно функции дожития мужчин и женщин и мужская и женская функции плодовитости изменяются во времени. В любой данный момент времени t_0 функции дожития для женщин и для мужчин выражаются соответственно как $l_f(x, t)$ и $l_m(x, t)$; женская функция плодовитости — как $\Phi_f(x, t)$. Вообще, население в момент t_0 не соответствует модели экспоненциального населения. Предположим теперь, что обе функции дожития и функция женской плодовитости остаются неизменными на уровне, существующем в момент t_0. Эти гипотезы будут определять воспроизводство населения в будущем. Можно показать, что при этих предположениях население стремится к стабиль-

[4] В этой формуле $l_m(x, t)$ выражает смертность в промежутке времени от $(t-x)$ до t. Следовательно, это выражение не есть функция дожития мужчин в момент t.

ному населению $H(\rho)$, соответствующему функциям $l_f(x, t_0)$, $l_m(x, t_0)$ и $\Phi_f(x, t_0)$. Иными словами, при достаточно больших значениях T население в момент $t=t_0+T$ практически совпадает с $H(\rho)$ [5].

Вместо женской функции плодовитости можно было бы, конечно, рассмотреть мужскую функцию плодовитости $\Phi_m(x, t)$. Если предположить, что с момента t_0 неизменны функции $l_f(x)$, $l_m(x)$ и $\Phi_m(x)$, то мы будем иметь дело с другим процессом демографической эволюции, который ведет к стабильному населению, соответствующему функциям $l_f(x, t_0)$, $l_m(x, t_0)$, $\Phi_m(x, t_0)$. Здесь нет оснований полагать, что пределом этой эволюции будет то же стабильное население, что и в первом случае, и, вообще говоря, такие два стабильных населения будут разными.

Полустабильное население

Величина T зависит от характеристик населения в тот момент, когда смертность и плодовитость становятся постоянными. Существует ли такое население, для которого $T=0$?

Рассмотрим население, которое в момент t_0 совпадает со стабильным населением $H(\rho)$, определяемым функциями $l_f(x, t_0)$, $l_m(x, t_0)$ и $\Phi_f(x, t_0)$. Если $C_f(x, t_0)$ — возрастное распределение женского населения в момент t_0, то мы можем записать:

$$l_f(x, t_0) = \frac{C_f(x, t_0)\, e^{x\rho(t_0)}}{C_f(0, t_0)}. \tag{5}$$

Если $N_f(t_0)$ — число женщин в момент t_0, то число женщин в возрасте от x до $x+dx$ равно

$$N_f(t_0)\, C_f(x, t_0)\, dx.$$

Определим число женщин, доживающих до момента $t+dt$. Это женщины в возрасте от $(x+dt)$ до $(x+dt+dx)$, а их число равно

$$N_f(0)\, C_f(x, t_0)\, \frac{l_f(x+dt, t_0)}{l_f(x, t_0)}\, dx,$$

но в соответствии с (5)

$$l_f(x+dt, t_0) = \frac{C_f(x+dt, t_0)}{C_f(0, t_0)}\, e^{x\rho(t_0)}\, e^{\rho(t_0)\, dt},$$

следовательно, число доживающих женщин равно:

$$N_f(t_0)\, C_f(x, t_0)\, \frac{C_f(x+dt, t_0)}{C_f(x, t_0)} \cdot \frac{e^{x\rho(t_0)}\, e^{\rho(t_0)\, dt}}{e^{x\rho(t_0)}} =$$

$$= N_f(t_0)\, C_f(x+dt, t_0)\, e^{\rho(t_0)\, dt}. \tag{6}$$

[5] Здесь T точно не определено. Его можно определить, например, как время, требующееся для того, чтобы расхождение между населением и $H(\rho)$ не превысило некоторых произвольно выбранных границ.

Но число доживающих женщин равно также общей численности женского населения в момент $t+dt$, умноженной на $C_f(x+dt, t_0+dt)$, т. е.

$$N_f(t_0)\, e^{\rho(t_0)\,dt} C_f(x+dt,\ t_0+dt). \tag{7}$$

Приравнивая (6) и (7), получаем:

$$C_f(x+dt,\ t_0) = C_f(x+dt,\ t_0+dt). \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что в населении, которое в момент t_0 совпадает со стабильным населением $H(\rho)$, соответствующим функциям $l_f(x,t_0)$ и $\Phi_f(x,t_0)$, возрастное распределение должно оставаться постоянным во времени.

Легко показать, что верно и обратное предложение. Иными словами, если возрастное распределение остается постоянным, то население в каждый момент t совпадает со стабильным населением, соответствующим функциям $l_f(x,t)$ и $\Phi_f(x,t)$.

Рассмотрим поэтому население с постоянным возрастным распределением $c(x)$. Если $N(t_0)$ есть численность населения в момент t_0, то число женщин в возрасте от x до $x+dx$ равно $N(t_0)c(x)dx$.

Определим, сколько из этих женщин доживает до момента t_0+dt. Число таких женщин равно

$$N(t_0+dt)\, c(x+dt)\, dx.$$

Но

$$N(t_0+dt) = N(t_0)\, e^{r(t_0)\,dt},$$

и число доживших женщин равно

$$N(t_0)\, c(x+dt)\, e^{r(t_0)\,dt} dx.$$

Оно равно также

$$\frac{N(t_0)\, c(x)\, l_f(x+dt,\ t_0)}{l_f(x,\ t_0)}\, dx.$$

Приравнивая эти два результата, получаем равенство:

$$c(x+dt)\, e^{r(t_0)\,dt} = c(x)\, \frac{l_f(x+dt,\ t_0)}{l_f(x,\ t_0)},$$

которое можно записать следующим образом:

$$\left[\frac{c(x)+c'(x)\,dt}{c(x)}\right][1+r(t_0)\,dt+\ldots] = \frac{l_f(x,\ t_0)+l_f'(x,\ t_0)\,dt+\ldots}{l_f(x,\ t_0)},$$

или, пренебрегая членами выше первого порядка:

$$1+\frac{c'(x)}{c(x)}\,dt + r(t_0)\,dt = 1+\frac{l_f'(x,\ t_0)}{l_f(x,\ t_0)}\,dt,$$

т. е.

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{l'_f(x,\ t_0)}{l_f(x,\ t_0)} - r(t_0).$$

Интегрируя, получаем:

$$\log \frac{c(x)}{K} = \log l_f(x, t) + e^{-xr(t_0)},$$

что дает

$$c(x) = Kl_f(x, t_0)\, e^{-r(t_0)x}$$

при $x=0$, $c(x) = c(0) = K$, т. е. есть не что иное, как общий коэффициент рождаемости b. Так что, окончательно

$$c(x) = bl_f(x, t_0)\, e^{-r(t_0)x}.$$

Это — фундаментальное соотношение в стабильном населении, связывающее возрастное распределение, функцию дожития, коэффициент прироста и общий коэффициент рождаемости. Иными словами, в момент t_0 в этом населении существуют те же соотношения, что и в экспоненциальном населении, соответствующем функциям $l_f(x, t_0)$ и $r(t_0)$.

Имеем, следовательно,

$$\int_m^M l_f(x, t_0)\, \Phi_f(x, t_0)\, e^{-r(t_0)x} dx = 1.$$

Это значит, что $r(t_0) = \rho$, коэффициенту прироста стабильного населения, соответствующего двум функциям $l_f(x, t_0)$ и $\Phi_f(x, t_0)$; тем самым наши рассуждения завершаются.

Население с постоянным возрастным распределением совпадает в любой момент времени со стабильным населением, соответствующим функции дожития $l_f(x, t)$ и женской функции плодовитости $\Phi_f(x, t)$ для этого момента.

Мы предлагаем называть населения с постоянным возрастным распределением *полустабильными.*

В случае постоянства возрастного распределения $C(x)$ население проходит через все экспоненциальные населения $F(r)$ в строке табл. 2, соответствующей $c(x)$. Коэффициент прироста и функция дожития изменяются при условии, что выполняется следующее соотношение:

$$l(x, t) = \frac{c(x)}{c(0)} e^{xr(t)}.$$

Функция плодовитости изменяется также при условии, что

$$\int_m^M \Phi(x, t)\, c(x)\, dx = c(0).$$

Экспоненциальное население из табл. 2 можно всегда рассматривать как полустабильное. Мы видели, что любое экспоненциальное население из табл. 1 можно рассматривать как стабильное. Поскольку экспоненциальные населения в табл. 1 и 2 одни и те же, экспоненциальные населения, стабильные населения и полустабильные населения представляют собой три способа рассмотрения одного и того же населения.

Все приведенные выше соображения можно повторить, пользуясь мужской функцией плодовитости вместо женской. Следовательно, то положение, что стабильное население, соответствующее женской функции плодовитости, идентично стабильному населению, соответствующему мужской функции плодовитости, справедливо и применительно к полустабильному населению.

Конкретные случаи полустабильных населений

В действительности возрастное распределение населения в данный момент есть результат прошлых тенденций смертности и плодовитости. Случилось так, что изменения смертности, наблюдавшиеся до сих пор в человеческом обществе, оказали лишь незначительное влияние на возрастное распределение. Отсюда следует, что в населении *с постоянной плодовитостью*, в котором смертность изменяется так, как показывает опыт прошлого, возрастное распределение будет оставаться более или менее постоянным. Иными словами, такое население имеет характер полустабильного. Именно такой была до сих пор эволюция населения большинства развивающихся стран. Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: населения развивающихся стран эволюционировали до сих пор наподобие полустабильных населений [6]. Предыдущие рассуждения, казавшиеся сугубо теоретическими, имеют, следовательно, большое практическое значение.

Инерция населения

Во второй части этой работы я намерен использовать предшествующие выводы, чтобы сделать более точным понятие инерции населения. Интуитивно мы чувствуем, что население не может мгновенно изменить направление своей эволюции. В физике закон инерции гласит: тело, движущееся в данном направлении с данной скоростью, продолжает неограниченно двигаться в том же направлении с той же скоростью при условии, что на него не действует никакая сила. Этот закон инерции можно выразить иным образом, а именно: при действии данного ряда сил тело движется по определенной траектории. Если в точке P воздействие этих сил прекращается, то тело продолжает двигаться по касательной к его траектории в точке P со скоростью, достигнутой к моменту, когда воздействие этого ряда сил прекратилось. Подобный закон можно найти и в демографии. Тот или иной коэффициент естественного движения играет роль скорости, с которой изменяется население. Если коэффициенты изменяются, то это значит, что начинает действовать некоторая сила. Если в некотором населении коэффициенты естественного движения постоянны, мы можем сделать заключение об отсутствии действия каких-либо сил. Мы видели, что, когда коэффициенты постоянны,

[6] Поскольку плодовитость в развивающихся странах близка к тому, чтобы снизиться, это заключение едва ли окажется справедливым на будущее.

население достигает стабильного состояния, т. е. такого состояния, когда все характеристики населения, за исключением его численности, остаются постоянными.

Следовательно, стабильное население, соответствующее некоторым заданным функциям смертности и плодовитости, играет ту же роль, что и касательная к траектории, а численность населения аналогична пути, проходимому телом по этой касательной. Однако в отличие от физического тела население не может немедленно достигнуть состояния стабильности. После того как коэффициенты перестают изменяться, должно пройти некоторое время, прежде чем будет достигнуто состояние стабильности. Этот временнóй лаг не имеет эквивалента в динамике движущегося тела. В демографии стадия стабильности достигается немедленно и временной лаг отсутствует только тогда, когда население изменяется как полустабильное.

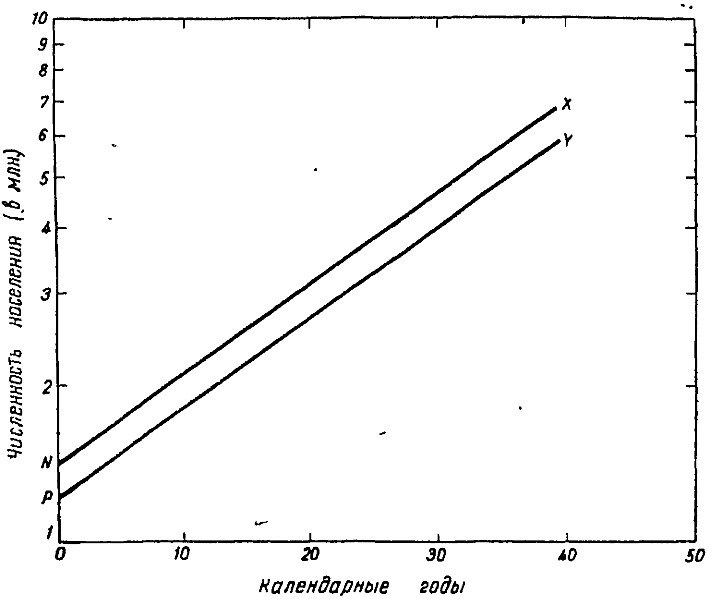

Рис 1. Иллюстративный график, показывающий, как можно вычислить коэффициент инерции населения

Чтобы представить это явление, удобно воспользоваться полулогарифмическим графиком. Время указывается на оси абсцисс в метрическом измерении, а численность населения — на оси ординат в логарифмическом измерении. На таком графике демографическая эволюция при постоянных коэффициентах естественного движения будет представлена прямой линией. Начиная с точки P, смертность и плодовитость остаются постоянными. По прошествии некоторого времени достигается состояние стабильности; NX — прямая линия, соответствующая этому состоянию. Если бы не было временного лага, то прямая была бы PY. Если, например, численность населения в начальной точке P была 1 200 000, а в точке N — 1 400 000, то мы можем вычислить коэффициент инерции, который равен:

$$\frac{1\,400\,000}{1\,200\,000} = 1{,}167.$$

Этот коэффициент соответствует существующим в точке P уровням коэффициентов смертности и плодовитости, которые, как предполагается, будут с этого времени оставаться постоянными. Другое сочетание смертности и плодовитости даст, естественно, другой результат. Результат зависит также от возрастной структуры населения в точке P. Интересно выделить, с одной стороны, влияние на коэффициент инерции функций смертности и плодовитости, с другой — влияние на него возрастного распределения населения в точке P. Это и будет сделано далее.

Тут нам необходимо аналитическое выражение состояния стабильности. Этот вопрос подробно рассматривался в приложении № 1 к исследованию, опубликованному ООН *. Здесь мы приведем только его результаты.

Отсчет времени мы начинаем с точки P. Обозначим через $K_f(x, 0)$ число женщин в момент P в возрасте от x до $x+dx$, через $l(x)$ — функцию дожития женщин и через $\Phi_f(x)$ — женскую функцию плодовитости; ρ — это коэффициент прироста стабильного населения, соответствующего $l_f(x)$ и $\Phi_f(x)$; $N_f(t)$ — численность женского населения в момент t в состоянии стабильности населения. Для достаточно больших значений t имеем:

$$N_f(t) = e^{\rho t} \int_0^{\omega} e^{-\rho x} l_f(x)\,dx \int_0^{M} \frac{K_f(x, 0)}{l_f(x)} G(x)\,e^{\rho x} dx, \qquad (9)$$

где $G(x)$ — функция, которая не изменяется, в то время как $l_f(x)$ и $\Phi_f(x)$ изменяются в пределах, наблюдавшихся в прошлом[7]. Коэффициент прироста ρ — действительный корень уравнения относительно r.

$$\int_m^M e^{-rx} l_f(x)\,\Phi_f(x)\,dx = 1. \qquad (3)$$

* The concept of a stable population Annex I. Публикуется в этом сборнике (с. 89). — *Прим. ред.*

[7] Мужское население задано в виде.

$$N_m(t) = \frac{p}{1-p}\, e^{rt} \int_0^{\omega} e^{-\rho x} l_m(x)\,dx \int_0^{M} \frac{K_f(x, 0)}{l_f(x, 0)} G(x)\; e^{\rho x}\,dx,$$

где p — доля мальчиков среди родившихся, составляющая практически примерно 0,51.

Мы рассматриваем стабильные населения, соответствующие женским функциям плодовитости. Результаты справедливы и для стабильных населений, соответствующих мужским функциям плодовитости. Однако функция $G(x)$ для мужчин и для женщин должна различаться. В исследовании, опубликованном ООН, рассматривались только женские функции плодовитости. Поэтому далее мы ограничимся стабильными населениями, соответствующими женским функциям плодовитости.

На полулогарифмической шкале уравнение (6) представлено прямой линией. Варьируя $\Phi_f(x)$ и $l_f(x)$, мы можем получить бесконечное число прямых линий. В этом множестве мы будем рассматривать различные семейства таких линий.

1. Семейства населений с постоянной смертностью

Предположим, что $l_f(x)$ и $l_m(x)$ неизменны. Когда $\Phi_f(x)$ изменяется, уравнение (3) дает все возможные значения ρ. Уравнение (9) представляет множество прямых линий, зависящих только от одного параметра, ρ. Это множество прямых может быть представлено огибающей, которая обладает вершиной, соответствующей $\rho = 0$, когда население называется стационарным. Если ρ изменяется, но пока остается небольшим, то прямые линии будут сосредоточены около вершины огибающей. Существует огибающая для каждого значения $l_f(x)$. Для того чтобы изучить влияние на огибающую изменений $l_f(x)$, необходимо определить совокупность значений, принимаемых величиной $l_f(x)$, например по серии модельных таблиц смертности. Рис. 2 нарисован, исходя из предположе-

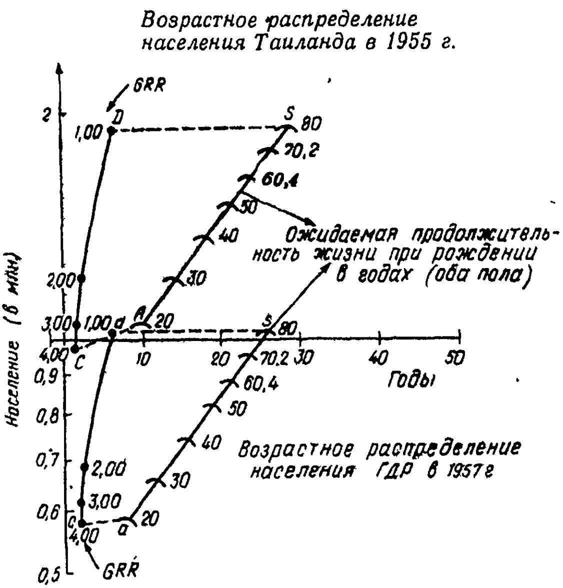

Рис. 2. Огибающие разных семейств стабильных населений

ния, что $l_f(x)$ меняется так же, как в модельных таблицах смертности ООН (средний вариант). Были сделаны два расчета, начиная с населения в 1 млн. При первом предполагалось, что в момент времени 0 возрастная структура населения, $K_f(x, 0)$, соответствует возрастной структуре населения Таиланда в 1955 г. Для второго расчета был принят возрастной состав населения Германской Демократической Республики в 1957 г. Так как ожидаемая продолжительность жизни при рождении (для обоих полов) изменяется от 20 лет до 70,2 года, вершина огибающей располагается по двум линиям — соответственно по AS и as. Ряды модельных таблиц смертности были экстраполированы[8] до таких таблиц смертности, по которым от 0 до M смертность отсутствует и ожидаемая продолжительность жизни при рождении составляет 80 лет. Вершины огибающей, соответствующие этим экстраполированным таблицам смертности, — точки S и s. На рис. 2 изображены только небольшие отрезки различных огибающих возле вершины.

2. Семейства населений с постоянной плодовитостью

В этом случае неизменна $\Phi_j(x)$. Поскольку $l_j(x)$ изменяется, уравнение (3) дает все возможные значения ρ. Уравнение (9) представляет бесконечное число прямых линий, зависящих от ρ и от $l_f(x)$. Для одного значения ρ существует бесконечное число $N_f(t)$, соответствующих всем функциям $l_f(x)$, удовлетворяющим уравнению:

$$\int_m^M e^{-\rho x} l_f(x)\, \Phi_f(x)\, dx = 1.$$

Если мы, кроме того, предположим, что $l_f(x)$ изменяется как в серии модельных таблиц смертности, то существует вообще только одна функция $l_f(x)$, соответствующая каждому значению ρ, а бесконечное число $N_f(t)$ зависит только от одного параметра — ρ. Как и в предыдущем случае, это множество может быть представлено огибающей с вершиной в $\rho=0$. Практически для всех значений ρ, наблюдавшихся до сих пор в человеческих популяциях, огибающая может быть приведена к этой вершине[9]. Огибающая существует для каждой функции плодовитости. Для того чтобы исследовать влияние изменений плодовитости на вид этой огибающей, необходимо определить ряд возможных значений $\Phi_f(x)$, воспользовавшись, например, серией модельных таблиц плодовитости. Рис. 2 построен, исходя из предположения, что возрастное распределение повозрастных коэффициентов плодовитости постоянно. Затем уровень плодовитости определялся через брутто-коэффициент воспроизводства (GRR). Поскольку GRR изменяется от 4,00 до 1,00, огибающие

---

[8] Подробное описание экстраполяции приведено в исследовании, опубликованном ООН. См. The concept of a stable population ....

[9] Этим мы обязаны тому факту, что различия в смертности мало влияют на возрастное распределение населения

располагаются вдоль линии CD при первом варианте расчета (возрастное распределение населения Таиланда) и вдоль линии cd — при втором варианте расчета (возрастное распределение населения ГДР).

Если прямые линии (9), представляющие большое число стабильных населений, нарисовать карандашом, то темное изображение, получающееся в результате их скопления, расположится вдоль линий AS, CD, которые будут постепенно возникать из рисунка. Для AS это скопление менее значительно, чем для CD[10]. Поэтому AS должна выглядеть как светлая линия, а CD — как темная. Положение двух таких линий, AS и CD, можно рассматривать как изображение исходного населения с такими изменениями смертности и плодовитости, какие имеют место в описанном случае. Очевидно, что ряды кривых (AS, CD) и (as, cd) расположены на разных частях поля, ограниченного двумя осями координат.

Изменения внутри (AS, CD) или (as, cd) обусловлены изменениями смертности и плодовитости. Различия в расположении (AS, CD) по отношению к (as, cd) обусловлены различиями в возрастном распределении населения Таиланда и ГДР. Таким образом, мы получили искомый результат, выделив влияние на коэффициент инерции:

а) изменений плодовитости и смертности;

б) изменений в возрастном распределении населения в момент 0.

Потенциалы роста

Для оценки влияния (б) (изменений в возрастном распределении населения в момент времени 0) мы делаем следующее. Выбираем подобные прямые линии в (AS, CD) и (as, cd) и вычисляем два коэффициента инерции, как показано на рис. 1. Отношение этих двух результатов показывает влияние на коэффициент инерции перехода от одного возрастного распределения населения к другому. Результат практически не зависит от выбранных прямых при условии, что в (AS, CD) и в (as, cd) они определены аналогично.

Воспользуемся стационарным населением, соответствующим вершине S. Для этого стационарного населения $\rho=0$, ожидаемая продолжительность жизни при рождении равна 80 годам и отсутствует смертность между 0 и M. При таких условиях равенство (9) принимает вид:

$$N_s(t) = 80\int_0^M K_f(x,\ 0)\, G(x)\ dx. \tag{10}$$

Это выражение очень легко вычисляется. Можно задать следующие конкретные значения $N_s(t)$.

Если в точке P смертность соответствует экстраполированной модельной таблице смертности, а женская плодовитость такова, что при этой модельной таблице смертности нетто-коэффициент воспро-

[10] Для AS огибающая подходит к вершине только в случае, если ρ остается небольшим. Но для CD величина ρ может принимать большие значения.

изводства равен 1, и если смертность и плодовитость с этого момента остаются постоянными на этих уровнях, то население в конечном итоге превращается в стационарное население численностью $N_s(t)$, указываемое формулой (10).

Отношение $\frac{P}{G}=\frac{N_s(t)}{N(0)}$ представляет собой потенциал роста, заключенный в самом возрастном распределении населения в момент P. Это понятие было введено в демографию еще в 1945 г. Полем Венсаном[11]. В определении этого понятия он следовал иной линии рассуждения, но в определенном смысле его результаты совпадают с нашими.

Поскольку в формуле (10) смертность между 0 и M отсутствует, я предложил бы назвать результат *брутто-потенциалом роста* (gross growth potential), а это сразу же приводит к определению *нетто-потенциала роста* (net growth potential). Он будет получен, если вместо предполагаемого уровня смертности по экстраполированной модельной таблице смертности ввести уровень смертности $l_f(x)$, действительно существующий в момент P. Плодовитость также должна быть иной. Она должна быть такой, какая при функции $l_f(x)$ соответствовала бы нетто-коэффициенту воспроизводства, равному 1. Тогда выражение (10) принимает вид:

$$N(t)=e_0\int_0^M \frac{K_f(x,0)}{l_f(x)}G(x)\,dx, \qquad (11)$$

где e_0 есть ожидаемая продолжительность жизни при рождении, соответствующая функции дожития $l_f(x)$.

Нетто-потенциал роста будет:

$$\frac{P}{N}=\frac{N(t)}{N(0)}.$$

Когда население эволюционирует как полустабильное, формула (11) может быть значительно упрощена.

В полустабильном населении возрастное распределение

$$\frac{K_f(x,0)}{N_f(0)}=\frac{l_f(x)\,\mathrm{e}^{-rx}}{\int_0^\omega \mathrm{e}^{-rx}l_f(x)\,dx}=b_f l_f(x)\,\mathrm{e}^{-rx},$$

следовательно, (11) принимает вид:

$$\frac{P}{N}=e_0 b_f\int_0^\omega \mathrm{e}^{-rx}G(x)\,dx. \qquad (12)$$

$G(x)$ не изменяется, а это означает, что

$$I(r)=\int_0^M \mathrm{e}^{-rx}G(x)\,dx$$

[11] Vincent P. Potentiel d'accroissement d'une population. *Journal de la Société de statistique de Paris* (janv. — fevr., 1945), p. 16 et suiv.

зависит только от r, и можно вычислить таблицу, дающую значения $l(r)$ для каждого значения r. Зная e_0, b и r в момент P можно вычислить P_N простым перемножением. В равенстве (12) ожидаемая продолжительность жизни при рождении — это ожидаемая продолжительность жизни женского населения, а общий коэффициент рождаемости — женский общий коэффициент рождаемости[12].

Практические расчеты

Теперь рассмотрим практические проблемы вычисления. Обычно данные о населении в точке P имеются в годах по пятилетним возрастным группам: 0—4, 5—9 и т. д. Запишем K_{0-4}, K_{5-9} и т. д. для этих возрастных групп. Предположим, что в пределах каждой возрастной группы население распределено равномерно. Кроме того, мы предполагаем, что значение функции дожития для каждой возрастной группы постоянно и равно ее значению в середине интервала возраста. Тогда (10) и (11) можно записать:

$$N_s(t) = 80\left[\frac{1}{5} K_{0-4}\int_0^4 G(x)\,dx + \frac{1}{5} K_{5-9}\int_5^9 G(x)\,dx + \ldots\right] =$$

$$= 16\left[K_{0-4}\int_0^4 G(x)\,dx + K_{5-9}\int_5^9 G(x)\,dx + \ldots\right], \tag{10a}$$

$$N(t) = e_0\left[\frac{K_{0-4}}{5l(2,5)}\int_0^4 G(x)\,dx + \frac{K_{5-9}}{5l(7,5)}\int_5^9 G(x)\,dx + \ldots\right]. \tag{11a}$$

Интеграл $G(x)$ в пределах пятилетних возрастных групп один и тот же для всех населений. Значения его даны в табл. 3.

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ $\int G(x)\,dx$ ДЛЯ ПЯТИЛЕТНИХ ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП

Возрастные группы, лет	Интеграл
0—4	0,18
5—9	0,18
10—14	0,18
15—19	0,17
20—24	0,13
25—29	0,09
30—34	0,05
35—39	0,02
40—44	0,00
0—44	1,00

[12] Применение обычного общего коэффициента рождаемости и обычной ожидаемой продолжительности жизни при рождении для обоих полов вносит лишь очень незначительную ошибку.

При этих значениях $G(x)$ были вычислены

$$I(r)=\int_0^M e^{-rx}G(x)\,dx.$$

Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА $I(r)=\int_0^M e^{-rx}G(x)\,dx$

Коэффициент прироста (на 1000 человек) (r)	Интеграл $I(r)$	Разности	Коэффициент прироста (на 1000 человек) (r)	Интеграл $I(r)$	Разности
—20	1,369	23	16	0,797	11
—19	1,346	23	17	0,786	10
—18	1,323	22	18	0,776	10
—17	1,301	22	19	0,766	10
—16	1,279	21	20	0,756	10
—15	1,258	20	21	0,746	10
—14	1,238	19	22	0,736	10
—13	1,219	18	23	0,726	9
—12	1,201	18	24	0,717	9
—11	1,183	18	25	0,708	9
—10	1,165	17	26	0,699	9
— 9	1,148	17	27	0,690	8
— 8	1,131	17	28	0,682	8
— 7	1,114	17	29	0,674	8
— 6	1,097	17	30	0,666	8
— 5	1,080	17	31	0,658	8
— 4	1,063	16	32	0,650	8
— 3	1,047	16	33	0,642	8
— 2	1,031	16	34	0,634	8
— 1	1,015	15	35	0,626	7
0		15			
1	0,985	14	36	0,619	7
2	0,971	14	37	0,612	7
3	0,957	14	38	0,605	7
4	0,943	13	39	0,598	7
5	0,930	13	40	0,591	7
6	0,917	13	41	0,584	7
7	0,904	13	42	0,577	7
8	0,891	13	43	0,570	7
9	0,878	12	44	0,563	6
10	0,866	12	45	0,557	6
11	0,854	12	46	0,551	6
12	0,842	12	47	0,545	6
13	0,830	11	48	0,539	6
14	0,819	11	49	0,533	5
15	0,808	11	50	0,528	

Для того чтобы применить формулу (11а), необходимо знать ожидаемую продолжительность жизни при рождении. Иногда таблицы смертности уже вычислены, но так бывает не всегда. К счастью, в полустабильных населениях при условии, что коэффициент рождаемости велик, существует простое соотношение между общим коэффициентом смертности и ожидаемой продолжительностью жизни при рождении. Это соотношение было четко установлено в опубликованном ООН исследовании. Оно представлено в таблице, показывающей значения общего коэффициента смертности, соответствующие любому данному значению ожидаемой продолжительности жизни при рождении (табл. 5).

Таблица 5

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОЕ* СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОЖИДАЕМОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ ЖИЗНИ ПРИ РОЖДЕНИИ И ОБЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СМЕРТНОСТИ В СТАБИЛЬНЫХ И ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЯХ

Коэффициент рождаемости выше, чем	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет	Общий коэффициент смертности (на 1000 человек)	
		коэффициент	разность
30	30	34,7	12
30	31	33,5	13
30	32	32,2	13
30	33	30,9	11
30	34	29,8	11
30	35	28,7	11
30	36	27,6	11
30	37	26,5	9
30	38	25,6	10
30	39	24,6	10
30	40	23,6	9
30	41	22,7	8
30	42	21,9	8
30	43	21,1	8
30	44	20,3	7
30	45	19,6	7
30	46	18,9	8
30	47	18,1	7
30	48	17,4	7
30	49	16,7	8
30	50	15,9	7
30	51	15,2	7
30	52	14,5	6
30	53	13,9	7
30	54	13,2	6
30	55	12,6	6
30	56	12,0	6
30	57	11,4	6
30	58	10,8	5
30	59	10,3	6
30	60	9,7	6
31	61	9,1	5
32	62	8,6	6
33	63	8,0	5
34	64	7,5	5
35	65	7,0	6
36	66	6,4	5
37	67	5,9	5
38	68	5,4	5
39	69	4,9	4
40	70	4,5	4
41	71	4,1	4

* Соотношение имеет силу только в том случае, когда общий коэффициент рождаемости превышает значение, данное в 1-м столбце.

Располагая этой таблицей, достаточно знать общий коэффициент рождаемости и общий коэффициент смертности, чтобы можно было применить формулу (12). Коэффициент прироста r получается вычислением их разности, а соответствующие значения $I(r)$ берутся из табл. 4. Значение e_0 берется из табл. 5.

В принципе все применяемые общие коэффициенты — это коэффициенты для женского населения. Однако применение общих коэффициентов для всего населения (мужчин и женщин вместе) не вносит существенной ошибки.

Теперь рассмотрим некоторые конкретные случаи.

I. Начнем с применения предыдущей формулы к теоретическому населению, взятому из серии региональных стабильных населений, вычисленных Коулом и Демени[13]: женское население серии Запад, соответствующее $e_0=62{,}5$ года для женщин (уровень 18) и коэффициенту прироста $r=30{,}0$ на 1000. Тогда женский коэффициент рождаемости $b=38{,}73‰$. Для $r=30{,}0‰$ табл. 4 дает $I(r)=0{,}666$. В табл. 6 показано, как вычисляются P_B и P_N.

Таблица 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ P_B И P_N В СТАБИЛЬНОМ НАСЕЛЕНИИ

Возрастные группы (1)	Интеграл $G(x)$ (2)	Население (3)	(2) × (3) (4)	$5l_f(x)$ (5)	(4) : (5) (6)
0—4	0,18	1 673	301,1	4,651	64,74
5—9	0,18	1 410	252,0	4,558	55,28
10—14	0,18	1 204	216,7	4,522	47,92
15—19	0,17	1 027	174,6	4,484	38,94
20—24	0,13	873	113,5	4,430	25,62
25—29	0,09	741	66,7	4,364	15,28
30—34	0,05	627	31,3	4,289	7,30
35—39	0,02	528	10,6	4,203	2,52
Все возрасты		10 000	1 166,5		257,60

Примечание. Данные столбца 3 берутся из серий модельных стабильных населений Коула и Демени: женщины, Запад, с. 60, столбец $R=30{,}00$. Данные столбца 5 берутся из серии модельных таблиц смертности Коула и Демени: женщины, Запад, таблица (уровень 18), с. 19, столбец L(X)

$$P_B=\frac{1166{,}5\cdot 16}{10\,000}=1{,}866;$$

$$P_N=\frac{62{,}5\cdot 257{,}60}{10\,000}=1{,}610.$$

Так как население находится в состоянии стабильности, то имеем также

$$P_N=e_0 bI(r)=62{,}5\cdot 38{,}73\cdot 0{,}666=1{,}612.$$

[13] Coale A. J. and Demeny P. Regional model life tables and stable populations. Princeton, New Jersey, 1966.

Если же мы примем в расчет вид кривой $l_f(x)$ в человеческой популяции, то можно избежать вычисления столбца 6 табл. 6. Итог столбца 6 приближенно равен итогу столбца 4, деленному на $5l_f(10)$.

Здесь $l_f(10) = 0{,}90762$ и

$$\frac{1166{,}5}{0{,}90762 \cdot 5} = 257{,}04,$$

что дает $P_N = 1{,}607$.

Это значит, что мы имеем приближенную формулу:

$$P_N = \frac{e_0}{5l_f(10)} \cdot \frac{P_B}{16} = \frac{e_0}{80l_f(10)} P_B, \tag{13}$$

и обратно

$$P_B = \frac{80l_f(10)}{e_0} P_N. \tag{14}$$

В полустабильном населении ввиду того, что $P_N = e_0 bI(r)$, имеем:

$$P_B = \frac{80l_f(10)}{e_0} e_0 bI(r) = 80l_f(10)\, bI(r). \tag{15}$$

II. Теперь приведем пример вычислений на реальном населении: женское население Мексики по переписи 1960 г. Таблицы смертности были вычислены в Коледжио де Мехико для 1959—1961 гг.[14] Они дают для женщин ожидаемую продолжительность жизни при рождении 60,32 года.

В табл. 7 показано подробно вычисление P_B и P_N. Как и в большинстве развивающихся стран, население Мексики имело возрастное распределение, мало изменяющееся во времени (табл. 8). Это означает, что оно может рассматриваться как полустабильное население. Поэтому P_N можно вычислять по формуле $P_N = e_0 bI(r)$.

В табл. 9 приведены данные, позволяющие вычислить общий коэффициент рождаемости женского населения b и коэффициент прироста r. Находим: $b = 45{,}2‰$ и $r = 34{,}5‰$; при таком значении r величина $I(r) = 0{,}630$.

Следовательно,

$$P_N = \frac{60{,}32 \cdot 45{,}2 \cdot 0{,}630}{1000} = 1{,}718.$$

По сравнению с предыдущим значением (1,620) различие существенно и заслуживает некоторых комментариев.

1. Во-первых, когда вычисляются таблицы смертности, как в случае Мексики, данные переписи обычно корректируются, чтобы принять в расчет недоучет детей в младших возрастах. Отсюда сле-

[14] Zenteno Raul Benitez and Acevedo Gustavo Cabrera. Tablas abreviadas de mortalidad de la poblacion de Mexico, 1930, 1940, 1950, 1960. El Colegio de Mexico. Mexico.

дует, что ожидаемая продолжительность жизни при рождении, соответствующая таблице смертности, не согласуется с зарегистрированным общим коэффициентом смертности.

В случае Мексики в табл. 7 исправленная[15] численность в первой возрастной группе 0—4 равна 3 271 000 вместо 2 840 000. При этом значении мы имеем:

исправленное $P_B = 1{,}905$;
исправленное $P_N = 1{,}638$.

Таблица 7

ВЫЧИСЛЕНИЕ P_B И P_N ДЛЯ ЖЕНСКОГО НАСЕЛЕНИЯ МЕКСИКИ, 1961 г.

Возрастные группы (1)	Интеграл $G(x)$ (2)	Население по переписи 1960 г., тыс (3)	(2) × (3) (4)	$5l_f(x)$ (5)	(4) : (5) (6)
0—4	0,18	2 840	511,2	4,556	112,2
5—9	0,18	2 611	470,0	4,397	106,9
10—14	0,18	2 123	382,1	4,350	87,8
15—19	0,17	1 796	305,3	4,320	70,7
20—24	0,13	1 542	200,5	4,270	47,7
25—29	0,09	1 309	117,8	4,206	28,0
30—34	0,05	1 043	52,2	4,123	12,7
35—39	0,02	0 962	19,2	4,024	4,8
Все возрасты		17 508	2058,3		470,1

$$P_B = \frac{2058{,}3 \cdot 16}{17\,508} = 1{,}881;$$

$$P_N = \frac{470{,}1 \cdot 60{,}32}{17\,508} = 1{,}620.$$

Примечания: Столбец (3). Данные взяты из таблиц смертности, опубликованных Коледжио де Мехико (op. cit., p. 34).

Столбец (5). Данные взяты из таблиц смертности, опубликованных Коледжио де Мехико (op. cit., Cuadro 3, p. 60, столбец ${}_nL_x$).

2. При вычислении таблиц смертности для населения Мексики было принято предположение, что в регистрации смертей недоучет отсутствует. Мексиканские власти считают регистрацию полной, однако известно, что достичь этого очень трудно, и, возможно, некоторый недоучет остается. Поэтому значение ожидаемой продолжительности жизни при рождении, принятое в предыдущих вычислениях, преувеличено.

В табл. 7 незначительная ошибка в значении e_0 не оказала существенного влияния на результаты. В этой таблице мы делим возрастной состав реального населения на возрастной состав стационарного населения, соответствующего таблице смертности, приня-

[15] Исправленные значения взяты из таблиц смертности, опубликованных Коледжио де Мехико (op. cit., Cuadro 3, p. 14).

Таблица 8

ВОЗРАСТНОЙ СОСТАВ ЖЕНСКОГО НАСЕЛЕНИЯ ПО ПЕРЕПИСЯМ НАСЕЛЕНИЯ МЕКСИКИ 1930, 1940, 1950 И 1960 гг.

Возрастные группы	1930 г.	1940 г.	1950 г.	1960 г
0	29 772	26 278	30 830	162 688
1—4	117 442	115 992	119 929	
5—9	133 338	139 361	138 465	149 558
10—14	95 335*	116 107	105 875	121 646
15—19	105 799*	103 136	94 320	102 894
20—24	99 863	81 141*	79 433	88 333
25—29	91 695	84 317*	56 082*	74 970
30—34	68 903	68 743	61 097*	59 713
35—39	62 710	70 407	47 634	55 074
40—44	50 661	48 971	41 235	39 350*
45—49	38 067	39 699	32 359	35 690*
50—54	34 326	31 818	20 411	30 702
55—59	19 261	22 054	22 106	22 607
60—64	23 547	21 571	12 967	21 348
65—69	10 175	11 583	9 735	12 068
70—74	8 866	8 446	5 049	9 856
75—79	4 014	4 500	3 941	5 534
80—84	3 831	3 363		4 037
85—89	1 139	2 510	2 974	3 924
90+	734			
	336			
	187			
0—14	375 887	397 738	404 782	433 892
15—44	479 631	456 715	444 441	420 334
45 и старше	144 483	145 544	150 777	145 766
Все возрасты	1 000 001	999 997	1 000 000	999 992

* Снижение рождаемости вследствие гражданской войны с последующим компенсаторным подъемом числа рождений.

Таблица 9

МЕКСИКА. ЗАРЕГИСТРИРОВАННОЕ ЧИСЛО РОЖДЕНИЙ И СМЕРТЕЙ

	Зарегистрированное число рождений (оба пола)	Число женских смертей
1959 г.	1 589 606	187 791
1960 г.	1 608 174	190 019
1961 г.	1 647 006	183 792
Среднегодовое число	1 614 929	187 201
Число рождений девочек *	791 315	
Численность женского населения	17 507 809	

* Общее число рождений, умноженное на 0,49.

Женский коэффициент рождаемости: $\frac{791\ 315}{17\ 507\ 809} = 0{,}0452$

Женский коэффициент смертности: $\frac{187\ 201}{17\ 507\ 809} = 0{,}0107.$

Коэффициент прироста $= 0{,}0345.$

той для вычислений. Небольшие расхождения в таблице смертности не изменят очень существенно возрастной состав стационарного населения.

Однако, когда мы применяем формулу $P_N = e_0 bI(r)$, ошибка в e_0 полностью отразится на P_N. При ожидаемой продолжительности жизни при рождении, равной 57,5, вместо 60,32, два вычисления дали бы сходные результаты.

Вычисления в табл. 7 не должны быть очень сильно затронуты этим снижением e_0 на 2,8 года, и формула $P_N = e_0 bI(r)$ дала бы

$$P_N = \frac{57{,}5 \cdot 45{,}2 \cdot 0{,}630}{1\,000} = 1{,}638.$$

3. Население Мексики не является в точности полустабильным, и формула $P_N = e_0 bI(r)$ дает только приближенный результат.

III. Наконец, мы даем в табл. 10 и 11 брутто-потенциал роста P_B и нетто-потенциал роста P_N для стабильных населений серии Запад, вычисленных Коулом и Демени. Рис. 3 и 4 иллюстрируют эти две таблицы. На каждом графике изображена кривая, соответствующая постоянной плодовитости при брутто-коэффициенте воспроизводства, равном 3,00. Она представляет примерно путь, которым шла эволюция населения в большинстве развивающихся стран в течение последних 30 лет.

Таблица 10

НЕТТО-ПОТЕНЦИАЛ РОСТА В СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЯХ СЕРИИ ЗАПАД, ВЗЯТЫХ ИЗ «РЕГИОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ И СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ»

Коэффициент прироста (на 1000 человек)	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин, лет						
	30	40	50	60	70	75	77,5
10	1,134	1,163	1,189	1,211	1,234	1,248	1,257
20	1,251	1,310	1,364	1,411	1,460	1,492	1,510
30	1,350	1,439	1,520	1,593	1,669	1,718	1,746
40	1,431	1,547	1,653	1,750	1,852	1,916	1,952
50	1,493	1,633	1,762	1,881	2,005	2,082	2,126
Брутто-коэффициент воспроизводства (GRR) равный 3,00	1,158	1,326	1,485	1,654	1,797	1,880	1,927

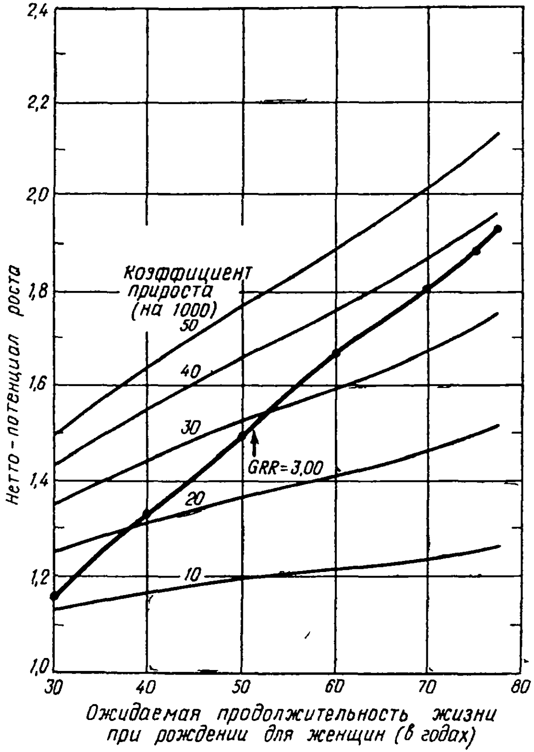

Рис 3. Нетто-потенциал роста в серии модельных стабильных населений (Коул А и Демени П. Запад)

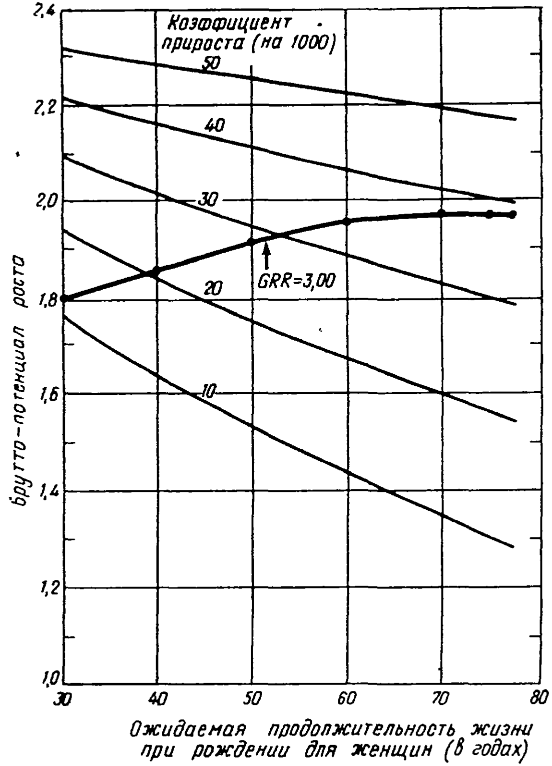

Рис. 4. Брутто-потенциал роста в серии модельных стабильных населений (Коул А. и Демени П. Запад)

Таблица 11

БРУТТО-ПОТЕНЦИАЛ РОСТА В СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЯХ СЕРИИ ЗАПАД, ВЗЯТЫХ ИЗ «РЕГИОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ И СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ»

Коэффициент прироста (на 1000 человек)	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении для женщин, лет						
	30	40	50	60	70	75	77,5
10	1,758	1,630	1,523	1,435	1,352	1,306	1,284
20	1,939	1,836	1,747	1,672	1,599	1,562	1,542
30	2,093	2,017	1,947	1,888	1,828	1,798	1,783
40	2,218	2,168	2,117	2,074	2,028	2,005	1,994
50	2,315	2,289	2,257	2,229	2,196	2,179	2,171
Брутто-коэффициент воспроизводства населения (GRR) равный 3,00	1,795	1,852	1,902	1,960	1,968	1,968	1,968

Вследствие снижения смертности нетто-потенциал роста P_N увеличился очень значительно. Напротив, брутто-потенциал роста P_B увеличился ненамного. Объясняется это тем, что снижение смертности не изменило существенно возрастной состав населения. Снижение смертности несколько увеличило долю молодых людей, что привело к некоторому увеличению P_B.

Перевод *Г. А. Бондарской.*

Густав Файхтингер

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЫБЫТИЯ В СТАТИСТИКЕ НАСЕЛЕНИЯ

G. Feichtinger. Stochastische Dekrementmodelle der Bevölkerungsstatistik, *Biometrische Zeitschrift,* Heft 2, 1972, S. 106—125.

I. ВЕРБАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. Введение

В первой части работы мы рассмотрим вопрос о той роли, которую математические методы играют в статистическом изучении населения. В статье характеризуется современное состояние моделирования и обосновывается необходимость второй, формальной части работы. Далее будет введено точное определение демографического явления и на основе общей характеристики схемы стохастического процесса выбытия будет показано, как стохастические модели выбытия могут применяться для моделирования таких основных демографических явлений, как «смертность», «брачность», «разводимость» и т. д.

2. Наука о народонаселении

2.1. Положение науки о народонаселении в ФРГ

Наилучшее представление о положении науки о народонаселении в ФРГ и других германоязычных странах дают две статьи Шубнелла[1]. Ситуация, описанная в этих статьях, вряд ли изменилась в пользу демографии за время, прошедшее со дня публикации.

Не останавливаясь на подробностях, можно сказать, что развитие науки о народонаселении в ФРГ в послевоенный период существенно отстает от ее стремительного развития в США, Франции, Скандинавских странах, Англии. Ярким доказательством подобного утверждения может стать тот факт, что во всей Федеративной Рес-

---

[1] Schubnell H. Die Entwicklung der Demographie in Deutschland, ihr gegenwärtiger Stand und ihre Aufgaben. *Studium Generale,* vol. 12, 1959, S. 255—273; Schubnell H. Demography in Germany. *The Study of Population,* Chicago, 1959.

публике (как и в Австрии) нет ни одной кафедры демографии (академическое представительство этой науки обеспечивается экономико-статистическими кафедрами). Демография в ФРГ среди прочих социальных наук занимает относительно скромное положение, что не соответствует ее значению, которое наверняка еще возрастет в будущем (демографический взрыв, планирование семьи, кризис образования и т. д.). Учитывая эти обстоятельства, можно понять и мотивы написания настоящей статьи: внести небольшой вклад в изучение демографии.

Мы рассмотрим здесь некоторые математико-демографические модели с тем, чтобы увеличить по возможности круг лиц, потенциально заинтересованных в таких моделях. С нашей точки зрения, было бы, разумеется, неверно в возможном «демографическом ренессансе» опираться на теории, преодоленные развитием математической статистики. Именно поэтому мы и начинаем с математических методов как части демографического анализа (см. 2.2). Положение математического исследования населения в ФРГ оставляет желать много лучшего. Немецкое Статистическое общество (один из основных центров демографических исследований) настоятельно рекомендует в своем циркулярном письме № 53 от октября 1969 г. пользоваться математическими методами с ориентировкой на их практическое применение в экономических и социальных науках. В то время как современные экономико-математические методы (сравнительно) успешно применяются и в ФРГ с помощью эконометрии и исследования операций, в демографии иное положение: книга В. Винклера «Демометрия», которая среди работ по математике населения в США выглядит как описательное произведение, в ФРГ оценивается как руководство к расчетам.

2.2. Место математических методов в демографии

Согласно Прессу[2] различают три этапа демографических исследований, а именно:

а) сбор *статистических* данных;

б) демографический *анализ*;

в) изучение *факторов* демографических явлений.

Задача *статистики населения* состоит в *регистрации* демографических событий (рождений, смертных случаев, браков и т. д.), с одной стороны, и в *измерении* длительности отдельных демографических состояний (длительности жизни — возраста, продолжительности брака, интервала между двумя последующими родами у женщины и т. д.) — с другой.

После того как демографические явления получают свое количественное описание (пункт а), вся собранная количественная информация должна быть подвергнута дальнейшей обработке, в ходе которой «сырой» материал преобразуется в специальные «тонкие»

[2] Pressat R. L. L'Analyse Démographique. Concepts-Méthodes-Résultats. Deuxième Edition. Paris, 1969. (Есть русский перевод с первого издания: Пресса Р. Народонаселение и его изучение. М., «Статистика», 1966)

показатели. Как известно, методами такой обработки занимается теоретическая статистика. Известный пример дает статистика смертности: на основе данных о числе смертных случаев в течение некоторого интервала времени, подразделенных по полу и по возрасту умерших, строятся таблицы смертности. Этап исследований, получивший название *демографический анализ,* занимает ключевую позицию: он является не только основой для изучения факторов демографических явлений, но и определяет характер и технику статистического наблюдения населения.

Получение данных на основе статистических наблюдений и последующая сводка информации не являются самоцелью, хотя представляют собой неизбежный этап статистического исследования. Цель демографических исследований состоит в более глубоком проникновении в механизмы процессов воспроизводства населения для получения более точных демографических прогнозов. Наконец, статистика населения должна оказать содействие в разработке политики населения (в смысле оптимального контроля, имея в виду планирование семьи). Анализ *факторов демографических явлений* можно описать следующим образом: выбирается некоторая количественная характеристика определенного демографического явления (пункт б) и ряд демографических, социальных и экономических характеристик, влияние изменения которых на изучаемое явление представляется существенным, и исследуется связь изменения этих признаков с вариацией выбранной численной характеристики. *Пример:* плодовитость (измеренная с помощью одного из многочисленных показателей) в зависимости от места жительства (город или село), вероисповедания, образования, дохода и т. д.

Основой для анализа факторов демографических явлений служит, таким образом, демографический анализ, тесно связанный с *моделированием.* Необходимость применения демографических моделей вызвана прежде всего тем, что изучаемая статистическая информация отражает влияние комплекса факторов, что мешает выделить реальные факторы, определяющие изменение характера движения населения. Формальная модель вынуждает исследователя, в противоположность словесным объяснениям, к точному указанию всех положенных в основу модели предпосылок, и выводы, полученные на основе модели, должны с логической строгостью следовать из этих предпосылок. Вследствие этого недостатки формальной модели видны гораздо лучше, чем в случае чисто словесного объяснения. Значение демографического моделирования еще более возрастает из-за того, что в социальных науках (в отличие от естественных) возможность для экспериментов весьма ограничена. Построение моделей принимает в силу этого на себя ряд функций, заменяющих *эксперимент* в естественных науках. Более того, выясняется, что демографические модели имеют ярковыраженный специфический характер среди моделей, принятых в других социальных науках (см. Бартоломью[3]).

---

[3] Bartholomew D. J. Stochastic Models for Social Processes, London, 1967.

Другим, с нашей точки зрения, решающим преимуществом демографического моделирования представляется возможность пользоваться для качественно различных демографических процессов одним и тем же (или близким) формальным аппаратом. В качестве примера мы напомним теорию замещения (в непрерывной или дискретной форме), которая привлекается при моделировании роста населения и в некоторых моделях плодовитости (см. Файхтингер[4]). Возможность применения однотипных демографических таблиц как для описания смертности, так и для измерения брачности дает другой пример (см. ниже).

Математическая теория населения может быть определена как теория построения формальных демографических моделей. Тем самым она призвана создавать основу для конкретного демографического анализа. Правда, и теперь ряд исследователей, полагаясь скорее на свою особую интуицию, отрицает полезность формальных моделей, поскольку существенные черты реальности не отражаются при моделировании. В споре с ними статистика населения (в рамках нашей схемы к ней относятся этапы а и б) сама по себе служит убедительным доказательством необходимости моделей: многое в ней не однозначно и ее история знала немало ошибок (см., например, 5.2, где рассматривается вопрос о среднем возрасте вступления в брак). Значение демографических моделей возрастает в связи с тем, что *ряд показателей может быть интерпретирован только в рамках модели.* Внутри моделирования различают три фазы: построение модели, анализ и проверка модели (на этом мы еще остановимся во второй части). В заключение укажем еще несколько работ, посвященных математике населения. Среди них работы Кейфица, Хюрениуса, Хоума, Винклера[5].

2.3. Макро- и микродемография

Экономическая теория логически может быть подразделена на микро- и макротеорию. Некоторые авторы предложили подобное разделение и в статистике населения (см. работы Хюрениуса, Ледермана, Винклера, Файхтингера[6]).

---

[4] Feichtinger G. Stochastische Modelle demographischer Prozesse, *Unveröffentlichte Habilitationsschrift an der Rechts und Staatswissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn,* 1970.

[5] Keyfitz N. Introduction ti the Mathematics of population, Massachusetts, 1968, p. 113—128; Hyrenius H. Demometri. Den formella befolkningsläarans grunder. Göteborg, 1966; Hoem J. M. Probabilistic fertility models of the life table type. *Workings papers from the Central Bureau of Statistics of Norway,* Oslo, 1969; Winkler W. Demometrie, Berlin, 1969; Keyfitz N. Population Mathematics. *General Conference of the IUSSP,* London, 1969, vol. 1, p. 113—128. Liege, 1971. (См. русский перевод в настоящем сборнике.)

[6] Hyrenius H. New Technique for studying demographic-economic-social interrelations. *Demographic Institute, Report* 3. University of Göteborg, Sweden, 1965; Ledermann S. The use of population models. *Proceedings of the World Populations Conference* (Belgrade, 1965), vol. III. New York, 1967, 234—237; Winkler W. Demometrie, Berlin, 1969; Feichtinger G. Op. cit.

Макромодель: различные состояния этих моделей описываются через численности совокупностей лиц, распределенных по некоторому набору демографических признаков, изучаемые в их временном развитии. Поскольку состояния модели описываются через распределения, назовем эти модели *моделями распределений. Пример:* теория стабильного населения, разработанная Лоткой[7] в непрерывной форме и Лесли[8] и его последователями в дискретной форме; при этом рассматривается распределение по полу и возрасту.

Микромодель: если моделировать демографические процессы на индивидуальном уровне, как бы рассматривая их через увеличительное стекло, то различные состояния модели будут описываться как те состояния, в которых могут находиться отдельные лица (например, брачное состояние). Каждый индивид характеризуется набором демографических признаков (состояний) в их последовательности во времени *(индивидуальные модели)*.

Отдельные *параллельно протекающие микропроцессы* при объединении дают основу демографических *таблиц,* модель для анализа и статистического описания развития *когорт* (см. работы Шварца, Фрейтага и Файхтингера[9]). Модели, включающие в себя признаки отдельных лиц, и связанные с этим проблемы оценки интенсивности микропроцессов могут трактоваться как связующее звено между микро- и макротеорией.

В данной работе мы ограничимся микромоделями.

2.4. Стохастические модели в демографии

Классические математические методы в демографии, неразрывно связанные с именем Лотки, опираются на *детерминистические* модели. Согласно Родсу[10] это означает:

если известно состояние населения на момент t_0 (в частности, состояние населения может быть описано распределением населения по полу и возрасту), то и для каждого будущего момента $t > t_0$ это состояние можно точно предсказать на основе теории.

Вместе с тем, как подчеркивал Д. Г. Кендел[11], адекватная трактовка процессов движения населения должна учитывать влияние *случая.* Детерминистические модели не принимают в расчет возмож-

---

[7] Lotka A. J. Théorie Analytique des Associatons Biologiques. II. Analyse démographique avec application particuliére à l'espèce humaine. *Actualités Scientifiques et Industrielles,* n. 780, Paris, 1939.

[8] Leslie P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika,* vol. 33, 1945, p. 183—212.

[9] Schwarz K. Die Längsschnittbeobachtung als neue Aufgabe der Bevölkerungsstatistik. *Allgemeines Statistisches Archiv,* vol. 52, 1968, S. 44—58; Freytag H. L. Statistische Probleme einer systematischen Beobachtung der Bevölkerungsbewegung. — «Das Konzept der Demographischen Gesamtrechnung». *Allgemeines Statistisches Archiv,* vol. 53, 1969, S. 329—345; Feichtinger G. Op. cit.

[10] Rhodes E. C. Population mathematics I, II, III. *Journal of the Royal Statistical Society,* vol. 103, 1940, p. 61—89, p. 218—245, p. 362—387.

[11] Kendall D. G. Stochastic processes and population growth. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series B, vol. 11, 1949, p. 230—264.

ность того, что если бы процесс неоднократно повторялся, то из одного и того же начального состояния можно было бы прийти к различным реализациям движения населения. Только стохастические модели позволяют выявить случайные отклонения от направления развития.

Правда, здесь следует отметить, что в макродемографии (например, в прогнозах населения) в связи с тем, что показатели замещения групп мало подвержены случайным колебаниям, детерминистические классические модели вполне достаточны для практических целей. (Для небольших совокупностей, в частности при уменьшении численности населения, стохастический анализ может, напротив, иметь действительно практическое значение.) И все же стохастический анализ моделей распределений, который приводит к многомерным ветвящимся процессам[12], имеет несомненный теоретический интерес. Итак, если в макромоделях в большинстве случаев случайные колебания компенсируются, сглаживаются (точнее, дисперсия мала), то в микромоделях стохастические колебания представляют собой необходимый, обязательный элемент модели.

Следует привести еще и другие соображения в пользу *стохастических моделей:*

возможность оценки ошибок прогноза;

статистическая оценка границ изменения параметров моделей и проверка демографических гипотез (применяется в изучении факторов демографических явлений);

выявление расхождений или противоречий между ранее проведенным анализом и последующими результатами;

получение адекватных измерителей для демографических явлений (значение моделирования в практике статистики населения);

возможность интерпретации некоторых статистических данных из числа публикуемых Федеральным статистическим управлением с учетом того, что в них сказалось действие определенных случайных факторов (в результате этого повысится точность и улучшится сопоставимость данных официальной статистики).

3. Демографические явления

Наша тема — *демографические микромодели.* В течение жизни человека или некоторого ее периода происходят различные изменения его демографических признаков. На протяжении своей жизни человек проходит через ряд состояний. При прогнозе будущего хода подобного индивидуального развития на множестве возможных состояний возникает элемент неопределенности. Итак можно сказать, что явления, изучаемые демографической микротеорией, суть *индивидуальные, динамические* и *стохастические* явления.

---

[12] Feichtinger G. Op. cit.

3.1. Введенные понятия

Демографические микромодели описывают различные демографические явления. Примером этого могут служить: смертность, брачность (точнее, первый брак, повторный брак), плодовитость, расторжение брака и т. д. Прессa[13] дал точное определение для понятия *демографического явления*. Для анализа демографических явлений пригоден методический инструментарий элементарной статистики[14].

Объекты, изучаемые в рамках статистики населения, назовем *демографическими единицами*. Ими являются индивиды (лица) или выделенные небольшие группы индивидов (супружеские пары, домашние хозяйства).

Демографическим признаком называется такой *перечень* понятий, характеризующих демографическую единицу, что каждой единице соответствует одно и только одно понятие из данного перечня. *Пример:* пол, вероисповедание, место рождения, продолжительность состояния в браке. Значения *признака* (определяющие понятия) мы назовем *демографическими состояниями. Пример:* женский пол, 30 лет, евангелистка, Бонн, 4 года и 3 месяца. Те признаки, значения которых, соответствующие данной демографической единице, могут меняться, мы назовем *демографическими переменными.*

Введем еще один термин для обозначения этих изменений: изменение демографического состояния назовем *демографическим событием.*

Мы изучаем здесь изменение определенных демографических признаков единиц или их сочетаний во времени (последовательность демографических состояний). Для этого необходимо четко определить период наблюдения. В то время как конец периода наблюдения свой в каждом конкретном случае, данное явление, как правило, становится возможным только после наступления определенного, так называемого *первоначального события* (événement-origine согласно Прессa[15]). Так, можно говорить о брачной плодовитости только после заключения брака.

Итак, демографическим явлением назовем следующую систему из трех понятий: $<$единица, признак(и), первоначальное событие$>$.

3.2. Другие различия

В зависимости от того, изучаются ли только выбытие из совокупности лиц с данным значением признака или развитие демографических состояний во времени, мы различаем два вида демографических явлений.

---

[13] Pressat R. Op. cit.
[14] Feichtinger G. Op cit
[15] Pressat R. Op. cit.

Явления выбытия

В названной категории моделей мы рассматриваем процесс выбытия из совокупности единиц, находящихся в определенном наступившем в результате некоторого первоначального события демографическом состоянии вследствие изменения этого состояния, а также причины его изменения. Сразу после изменения значения изучаемого признака наблюдение прекращается.

Явления с несколькими возможными состояниями

Модели этого типа изучают значения демографического признака и их взаимосвязь во времени (на протяжении длительного периода, а не в определенный момент). Типичные примеры: модель занятости, модель формирования семьи (увеличение с возрастом женщины числа рожденных ею детей).

В данной статье мы ограничиваемся процессами чистого выбытия.

3.3. Характеристика демографических явлений

Динамические явления могут описываться через наступление события и интервалы времени, разделяющие эти события. Согласно Прессa[16] мы рассматриваем следующие переменные, характерные для демографических явлений:

а) интенсивность демографического явления — среднее число соответствующих событий на демографическую единицу. *Пример:* вероятность рождения ребенка, вероятность вступления в брак; коэффициент воспроизводства;

б) календарь демографического явления — распределение демографических событий во времени. В частности, математическое ожидание и дисперсия длины интервала времени до момента выбытия. *Пример:* средний возраст вступления в брак, средний возраст матери при рождении детей.

II. ФОРМАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Изучение моделей выбытия начнем со следующего простейшего примера.

4. Процесс старения

4.1. Описание модели

Демографическое явление «смертность» можно описать, интерпретируя схему из п. 3 следующим образом:

демографическая единица = лицо определенного пола;

[16] Pressat R Op. cit, p. 70.

демографический признак = возраст x (в *виде целого числа* исполнившихся лет);

первоначальное событие = рождение.

Стохастическое движение единицы в виде последовательности возможных состояний описывается с помощью следующей диаграммы состояний (рис. 1). На ней показаны возможные «пути», которые проходит лицо, достигая демографических состояний «возраст» (w — ... максимально возможный возраст как число исполнившихся лет).

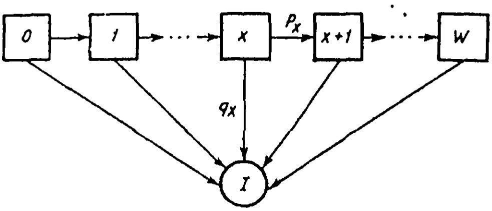

Рис. 1. Диаграмма состояний простого процесса выбытия

В состоянии «возраст x» индивид имеет две возможности перехода ($x=0, 1, \ldots, w-1$), а именно с вероятностью p_x перейти в возрастную группу $x+1$ (в исполнившихся годах) и выбыть в результате смерти с вероятностью q_x.

Если принять состояния «возраст x» из набора $T=\{0, 1, 2, \ldots, w\}$ за переходные состояния и «смерть» за поглощающее состояние I, то по графу Маркова, изображенному на рис. 1, можно построить следующую стохастическую матрицу:

$$\tilde{U}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{I} & 0 & 1 & 2 & \ldots & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_0 & 0 & p_0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & p_1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \ldots & \\ q_{w-1} & 0 & \ldots & & \ldots & p_{w-1} \\ 1 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ w-1 \\ w \end{array} \quad (1)$$

Процесс выбытия (точнее, процесс старения) описан с помощью одноступенчатой переходной матрицы (1), как *конечная поглощающая цепь Маркова,* что соответствует предположениям Кемени и Снелла[17], в силу чего можно применить матричный аппарат, разработанный этими авторами. Марковская цепь (1) безвозвратна в том смысле, что однажды уже принятое переходное состояние не может возникнуть снова. Здесь уместно упомянуть и о работе Сайк-

---

[17] Kemeny J. G. and J. L. Snell. Finite Markov Chains. Princeton, 1960. (Есть русский перевод с первого издания: Кемени Дж. Дж. и Снелл Дж. Лорн. Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1970.)

са[18], который пользуется *эргодическими* цепями Маркова в исследованиях населения.

Не трудно теперь обобщить эту модель на случай нескольких причин смерти. Для этого необходимо ввести *вероятности выбытия* в течение года q_{xr} различающихся по *причинам смерти* $r \in A = \{1, 2, \ldots, a\}$ и *возрасту*. При этом получаем: $\sum\limits_{r} q_{xr} = q_x$. Соответствующая цепь имеет теперь a поглощающих состояний и следующим образом описывается с помощью матрицы, состоящей из четырех подматриц:

$$U = \begin{bmatrix} J & 0 \\ Q & P \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

При этом подматрица J — это единичная матрица a-го порядка и подматрица 0 — нулевая матрица размерности $a \cdot (w+1)$. Подматрица Q — матрица размерности $(w+1) \cdot a$ называется матрицей поглощения (она описывает вероятность перехода в течение года в поглощающее состояние, соответствующее причине смерти r), ее элементы вероятности q_{xr} (в (1) подматрица Q состояла из вектора-столбца). Подматрица P матрицы перехода порядка $(w+1) \cdot (w+1)$ имеет наддиагональную форму и переводит индивида в следующую (более высокую) возрастную группу.

4.2. *К оценке вероятностей перехода*

Согласно Файхтингеру[19] равенство (1) позволяет построить микромодель таблиц смертности в следующем смысле. Таблицу смертности можно рассматривать как последовательность записей, регистрирующих смертность некоторой совокупности (когорты) индивидуумов, жизнь каждого из которых, *независимо от других*, описывается случайным процессом с матрицей P. (Под когортой мы понимаем здесь произвольную совокупность демографических единиц, с которыми в течение некоторого постоянного короткого промежутка времени, как правило, в течение года, произошло одно и то же первоначальное демографическое событие.) Таким образом, каждый индивид из данной когорты должен, независимо от других индивидов, подвергаться такому же риску выбытия или иметь одинаковые шансы дожития. Напомним о следующих трех столбцах, содержащихся в каждой таблице смертности:

x — возраст в виде целого числа исполнившихся лет;

l_x — число лиц, доживающих до возраста x;

d_x — число лиц, умирающих в возрастной группе x, т. е. в интервале возрастов $x = (x, x+1)$.

---

[18] Sykes Z. M. Population projections and Markov chains. *General Conference of the IUSSP*, London, 1969, vol. 1, Liege 1971, p. 170—174.

[19] Feichtinger G. Einige Resultate aus der Bevölkerungsmathematik. *Operations Research-Verfahren VIII*. Tagungspapiere der 2. Oberwolfacher Tagung «Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften», Oktober 1969. Hain, 1970.

В этом случае оценку повозрастных вероятностей дожития и смерти получаем следующим образом:

$$\hat{p}_x = l_{x+1} l_x^{-1}; \quad \hat{q}_x = d_x l_x^{-1}. \tag{3}$$

Если подразделить число d_x по причине выбытия x, то d_{xr} — число лиц, умирающих в возрасте x от причины x, и можно в соответствии с q_{xr} получить:

$$\hat{q}_{xr} = d_{xr} l_x^{-1}. \tag{4}$$

Свойства подобных оценок рассмотрены в работах Файхтингера[20]. Трудности теории (если о теории уже можно говорить) состоят в том, что в равенствах (3) и (4) и делитель и делимое суть случайные величины. Отметим также, что в подобных оценках совокупности важную роль играет тот факт, что в общем случае параметры p_x, q_x, q_{xr} для различных лиц когорты могут принимать различные значения, делая общую совокупность *неоднородной*. В результате разделения на отдельные совокупности можно получить более высокую степень однородности. *Пример:* таблицы смертности для групп населенных пунктов разной величины и таблицы смертности в зависимости от семейного положения, см. публикации Федерального статистического управления[21]. Возможность последовательно повышать однородность совокупности существенно ограничена в силу причин, связанных с техникой сбора и обработки данных. В этом смысле предложенные модели следует рассматривать как усредненные микромодели.

4.3. Примечание

Прием микромоделирования, изложенный в 4.1, можно охарактеризовать следующим образом: время, прошедшее с момента первоначального события, рассматривается, с одной стороны, как характеристика времени, а с другой стороны, как демографический признак. Поскольку индивидуальное и системное время естественно протекают синхронно, то получаем однородный случайный процесс.

Одно из преимуществ описанной модели, основанной на цепях Маркова, состоит в близости к реальности, так как (демографические) данные поступают в дискретной форме. Вместе с удобным для анализа методом Кемени — Снелла схема цепей Маркова становится основной для расчетов при построении моделей.

Наряду с последующим развитием дискретного анализа моделирование с помощью непрерывных марковских процессов приобретает вполне самостоятельное значение, тем более что соответству-

---

[20] См. сноски 4 и 19.

[21] Statistisches Bundesamt Wiesbaden (1969) Fachserie A (Bevölkerung und Kultur), Reihe 2 (Natürliche Bevölkerungsbewegung). Sonderbeitrag: Heiratstafeln 1960—1962, Ehedauertafeln 1961 sowie spezielle Sterbetafeln 1960—1962. Stuttgart, 1969.

ющие ему методы оценки точности относительно широко распространены. Важная область, в которой применяются непрерывные модели, это повторные обследования (follow-up studies) в социально-гигиенических исследованиях (см. работы Свердрупа, Цаля, Фикса и Неймана и Хоэма[22]).

4.4. *К анализу модели выбытия*

Модель, основанная на поглощающих цепях Маркова, имеет ряд преимуществ, связанных с применением матричного метода Кемени и Снелла[23] и безвозвратностью процессов (точнее, наддиагональной формой матрицы P).

Процесс старения описывает *явление* «смертность», и нас интересует, естественно, календарь и интенсивность (по причинам смерти) этого явления.

Календарь смертности

Пусть $x, y \in T$ и $\mathbf{n}_{xy}$ — число лет, в течение которых демографическая единица находится в одном из состояний y («возраст»), если процесс начинается с возраста x. (5)

Здесь и дальше случайные величины отмечаются полужирным шрифтом. Величина

$$\mathbf{n}_x = \sum_{y \in T} \mathbf{n}_{xy} \tag{6}$$

измеряет продолжительность жизни для лица в возрасте x лет до момента выбытия. Если допустить, что эта величина y внутри возрастного интервала постоянна (в действительности в раннем детстве это не так)[24], то, чтобы получить «действительное» время $\mathbf{z}_x$, прошедшее до перехода в поглощающее состояние, следует уменьшить $\mathbf{n}_x$ на $^1/_2$ года.

$$\mathbf{z}_x = \mathbf{n}_x - 1/2. \tag{7}$$

Пусть $n_{xy} = E\mathbf{n}_{xy}$ — математическое ожидание $\mathbf{n}_{xy}$. Можно доказать[25], что это математическое ожидание — элемент так называемой фундаментальной матрицы N:

$$[n_{xy}] = N = (J - P)^{-1}. \tag{8}$$

---

[22] Sverdrup E. Estimates and test procedures in connection with stochastic models for deats, recoveries and transfers between different states of health. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, vol. 48, 1965, p. 184—211; Zahl S. A Markov prozess model for follow-up studies. *Human Biology*, vol. 27, 1955, p. 90—120; Fix E. and Neyman J. A simple stochastic model of recovery, relapse, death and loss of patients. *Human Biology*, vol. 23, 1950, p. 205—241; Hoem J. M. Probabilistic fertility models of the life table type. *Working papers from the Central Bureau of Statistics of Norway*, Oslo, 1969.

[23] Kemeny J. G. and Snell J. L. Op. cit.

[24] Chiang C. L. Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics. New York, 1968.

[25] Kemeny J. G. and Snell J. L. Op. cit.

Обращая матрицу $(J-P)$, что не сложно, в силу наддиагональной формы P, получаем:

$$n_{xy} = P_{xy} = \begin{cases} \prod_{z=x}^{y-1} p_z & \text{для } x < y; \\ 1 & \text{для } x = y; \\ 0 & \text{для } x > y. \end{cases} \quad (9)$$

Из равенств (7) и (9) следует, что средняя длительность жизни лица в возрасте x лет составляет:

$$E\mathbf{z}_x = \sum_{y=x}^{w} P_{xy} - 1/2. \quad (10)$$

Таким же образом можно рассчитать дисперсию $\operatorname{Var} \mathbf{z}_x = \operatorname{Var} \mathbf{n}_x$ этой случайной величины с помощью метода Кемени — Снелла[26].

Интенсивность смертности по причинам смерти

Пусть $b_{xr}(t)$ — вероятность для лица в возрасте x лет (11) в течение t лет умереть от причины смерти r.

Эта вероятность поглощения находится с помощью следующего рекуррентного уравнения:

$$b_{xr}(t+1) = q_{xr} + \sum_{y \in T} p_{xy} b_{yr}(t), \quad (12)$$

причем p_{xy} означает (x, y)-й элемент матрицы перехода P. Если расположить вероятности (11) в матрице $B(t)$ размерности $(w+1) \cdot a$, то (12) можно записать[26] в матричной форме как

$$B(t+1) = Q + PB(t). \quad (12а)$$

Если решить разностное уравнение (12а) с учетом первоначального условия

$$B(1) = Q, \quad (12б)$$

то получаем

$$B(t) = N(J - P^t)Q$$

или

$$B_{xr}(t) = \sum_{y=x}^{x+t+1} P_{xy} q_{yr}. \quad (13)$$

Вероятность $b_{0r}(t)$ смерти новорожденного до возраста t от набора основных причин смерти r показана Федеральным статистическим управлением[27], опубликовавшим число смертных случаев за 1960—1962 гг. по основным причинам смерти.

Если в равенстве (13) перейти к пределу при $t \to \infty$, то, учитывая, что $P^t \to 0$ (наддиагональная форма P!), и применяя

---

[26] Kemeny J. G. and Snell J. L. Op. cit., pp. 46, 51.

[27] Statistisches Bundesamt Wiesbaden: Fachserie A (Bevölkerung und Kultur), Reihe 2 (Natürliche Bevölkerungsbewegung) Sonderbeitrag: Allgemeine Sterbetafel für die BRD 1960—1962, Stuttgart, 1965.

$$\lim B(t) = B = NQ, \tag{14}$$

получим повозрастную *интенсивность смерти* по *причинам смерти:* $\lim_{t\to\infty} b_{xr}(t) = b_{xr}$. Это вероятность того, что лицо в возрасте x лет когда-либо умрет от причины r.

С помощью равенства (14) получаем:

$$b_{xr} = \sum_{y=x}^{w} P_{xy} q_{yr}, \tag{15}$$

и естественно,

$$\sum_r b_{xr} = 1.$$

Примечание. Безусловно соотношение (15), так же как и (10) и (13а), может быть выведено без помощи матриц и цепей Маркова. Мы стремились лишь предложить методы исчисления, которыми можно пользоваться и в более сложных случаях, где прямые расчеты затруднительны (например, в моделях явлений с несколькими возможными состояниями) [28].

5. Модели первого брака

Решающее преимущество модели (2) явлений выбытия состоит в том, что ее аппарат пригоден для изучения различных по содержанию явлений.

5.1. Комбинированная модель брака

Для создания этой модели (рис. 2) необходимы следующие правила интерпретации:

I. «Вступление в брак» (вступление в брак или смерть лица, ранее вступившего в брак).

II. «Смерть лица, не состоящего в браке» (умерший никогда в браке не состоял).

III. «К возрасту $w+1$ в браке не состоит» для поглощающих состояний и

x «в возрасте x в браке не состоит»

для переходных состояний. Для лица, не состоящего в браке в возрасте x лет, существуют три возможности, а именно:

вступить в брак с вероятностью $q_{x\,\mathrm{I}}$;

умереть, никогда не состояв в браке с вероятностью $q_{x\,\mathrm{II}}$ (16)

дожить до следующего возраста, не вступив в брак с вероятностью p_x.

Ниже приводится соответствующая диаграмма состояний.

Если объединить годичные вероятности, упомянутые в (16), в стохастическую матрицу (2), то получим равенство (17).

---

[28] Feichtinger G. Op. cit.

$$U = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} \begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & 0 & 1 & 2 & \dots & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ q_{0\mathrm{I}} & q_{0,\mathrm{II}} & 0 & 0 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{1\mathrm{I}} & q_{1,\mathrm{II}} & 0 & 0 & 0 & p_1 & \dots & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & & & \\ . & . & . & & & & & \\ . & . & . & & & & & \\ q_{w-1,\mathrm{I}} & q_{w-1,\mathrm{II}} & 0 & 0 & & \dots & & p_{w-1} \\ q_{w\mathrm{I}} & q_{w,\mathrm{II}} & p_w & 0 & & \dots & & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ w-1 \\ w \end{array} \qquad (17)$$

$q_{x\mathrm{I}}$ характеризует *зависимую* повозрастную вероятность вступления в первый брак (она зависит от интенсивности смертности лиц, никогда не состоявших в браке $q_{x\mathrm{II}}$). Подобные вероятности приводятся в публикациях Федерального статистического управления[29]. Там же можно найти пояснения к таблицам чистого брака и его стохастической микромодели.

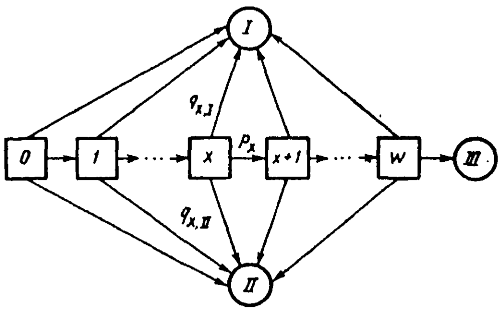

Рис. 2. Граф состояний процесса выбытия с двумя «действительными» причинами выбытия

5.2. Интенсивность и календарь явления «Первый брак»

Вероятность $b_{x\mathrm{I}}(t)$ для x-летнего, не состоящего в браке лица, вступить в брак в течение t лет можно определить с помощью равенства (13). Эта вероятность показана в опубликованных Федеральным статистическим управлением данных[30] за 1960—1962 гг. в целом по стране. В частности, на основе этих данных можно получить вероятность $b_{x\mathrm{I}}$ того, что никогда не состоявшее в браке лицо в возрасте x когда-либо вступит в брак. Отсюда следует, что $b_{x\mathrm{I}}$, представляющая собой *интенсивность вступления в первый брак,* в модели рассчитывается как конечная вероятность поглощения.

[29] Statistisches Budesamt Wiesbaden, 1969. Op. cit., p. 22—24.
[30] Statistisches Budesamt Wiesbaden, 1969. Op. cit., p. 25.

Иллюстрацию этого, так называемого ожидаемого, числа браков для лица, никогда не состоявшего в браке, можно найти в опубликованных данных Федерального статистического управления[31], где проводятся $b_{x\,\mathrm{I}}$ в зависимости от x. Из этих данных видно, как с увеличением возраста снижается вероятность вступления в брак для лица, никогда не состоявшего в браке. Величина $b_{x\,\mathrm{II}}$ есть вероятность для лица в возрасте x умереть, не вступив в брак.

Календарь явления «Первый брак» можно получить также с помощью периода поглощения. Пусть, таким образом, $\mathbf{z}_x$ — длительность существования x-летнего лица вне брака, т. е. время до его вступления в брак или до его смерти, без вступления в брак или до состояния III. $E\mathbf{z}_x$ и $\operatorname{Var} \mathbf{z}_x$ можно определить с помощью так называемой фундаментальной матрицы, упомянутой в § 4.4. От величины $\mathbf{z}_x$ следует отличать время $\widetilde{\mathbf{z}}_x$, прожитое x-летним лицом, не состоявшим в браке, до его вступления в брак. Эта случайная величина имеет смысл только для холостяков (незамужних), которые когда-либо в будущем вступят в брак. Фактический же брачный возраст равен $x+\widetilde{\mathbf{z}}_x$. Отсюда ясно, что при расчете этой величины следует ограничиться лицами, не состоящими в браке, которые когда-либо вступят в брак.

Чтобы формально получить $\widetilde{\mathbf{z}}_x$, мы пользуемся трансформированными марковскими цепями. Каждому поглощающему состоянию r поглощающей цепи можно сопоставить новую марковскую цепь, если изменять после начала переходного состояния первоначальные вероятности процесса на основе события:

«Первоначальный процесс когда-либо поглощается в состоянии r». (18)

Не останавливаясь здесь на теоретических рассуждениях[32], подставим в изучаемую модель первого брака $r=1$ и получим тем самым ограничение для лиц, никогда не состоящих в браке, которые когда-либо вступят в брак. Новая трансформированная марковская цепь имеет те же переходные состояния, что и исходная цепь, и только единственное поглощающее состояние, а именно r. В рамках этой трансформированной цепи $\widetilde{\mathbf{z}}_x$ представляет собой продолжительность жизни x-летнего лица до поглощения. Математическое ожидание и дисперсия длительности жизни до вступления в брак можно рассчитать, таким образом, с помощью так называемой фундаментальной матрицы трансформированной цепи. Таким способом можно получить календарь вступления в первый брак. Отметим, что связь величины $E\widetilde{\mathbf{z}}_x$ и x носит нетривиальный характер и заслуживает специального рассмотрения (см. данные Федерального статуправления, 1969, с. 18[33]).

---

[31] Statistisches Bundesamt Wiesbaden, 1965. Op. cit., p. 16
[32] Feichtinger G. Op. cit.
[33] Statistisches Bundesamt Wiesbaden, 1969 Op cit

«В результате анализа становится очевидным тот факт, что $E\mathbf{z}_x \neq E\mathbf{z}_x$. Этот факт обычно не учитывается в описательной демографии». (19)

5.3. *Чистая модель (брутто)*

Мы упоминали, что для лиц, никогда не состоявших в браке, вероятности вступления в брак $q_{x\,\mathrm{I}}$ зависят от величины вероятностей смерти $q_{x\,\mathrm{II}}$. Наряду с приведенными вероятностями выбытия, характерными для лиц, никогда не состоявших в браке, часто интересуются также *независимыми,* или «чистыми» характеристиками брачности, которые имели бы место, если бы причина выбытия «смерть лица, никогда не состоявшего в браке», элиминировалась; следовательно, в данном случае смерть понимается как помеха. Проблема определения подобных независимых повозрастных вероятностей вступления в брак рассмотрена в публикациях Федерального статистического управления (1969), в работах Фласкемпера, а также Чианга[34]. Если предположить, что имеем независимые вероятности вступления в брак $\tilde{q}_{x\,\mathrm{I}}$, то можно описать чистую модель брака в виде цепи Маркова с поглощающими состояниями:

I. ... «вступил в брак (точнее, «когда-либо вступит в брак»).

II. ... «в возрасте $\omega+1$ еще не вступил в брак» и переходными состояниями:

x ..., «x лет и холост».

Формальная микромодель чистых таблиц брачности возникает в результате аннулирования второй строки и столбца в равенстве (17). Уже известным способом можно рассчитать чистую интенсивность вступления в брак. Обозначим время поглощения в чистой модели брака как $\tilde{\mathbf{z}}_x$. Если требуется конечное поглощение в состоянии. I, то осуществляют переход к соответствующей трансформированной цепи Маркова и получают математическое ожидание $\tilde{\bar{\mathbf{z}}}_x$. Тогда $x+\tilde{\bar{\mathbf{z}}}_x$ есть возраст вступления в первый брак в чистой модели.

Наконец, легко представить себе, что в общем случае

$$E\tilde{\bar{\mathbf{z}}}_x \neq E\bar{\mathbf{z}}_x, \tag{20}$$

т. е. что средний возраст при вступлении в первый брак в чистой и комбинированной модели *различен.* Этот факт, насколько мне известно, нигде не упоминается в демографической литературе (например, в работах Пресса[35]). Он доказывает необходимость при использовании вероятностных показателей постоянно помнить об исходной модели.

---

[34] Statistisches Bundesamt Wiesbaden, 1969. Op. cit.; Flaskämper P. Bevölkerungsstatistik, Hamburg, 1962. Chiang C. L. Op. cit.

[35] Pressat R. Pratique de la Démographie. Trente sujets d'analyse, Paris, 1967, p. 105.

6. Обзор других моделей выбытия

Укажем некоторые другие демографические явления, которые также могут быть описаны в виде процесса выбытия.

6.1. Модели расторжения брака

При этом *переходные состояния:* x — «фактическая продолжительность брака составляет x прожитых лет», и *поглощающие состояния:* расторжение брака в результате смерти мужа, смерти жены, развода (это состояние может разделяться на несколько в зависимости от характера судебного решения).

При конструкции микромодели таблиц продолжительности состояния в браке (см. публикации Федерального статистического управления за 1969 г.[36]) следует учесть, что в качестве демографических единиц, с одной стороны, могут выступать брачные пары (в общих таблицах продолжительности состояния в браке), а, с другой стороны, также любой из супругов (в специальных таблицах). Основной интерес вызывают параметры моделей:

Ez — ожидаемая предстоящая продолжительность пребывания в браке после фактической продолжительности брака x (календарь);

b_{xr} — математическое ожидание доли брачных пар, чей брак прекратится в будущем по причине r, из общего числа брачных пар, у которых фактическая длительность брака равна x.

В публикациях Федерального статистического управления за 1969 г. приводится ряд интересных таблиц и графиков по общей модели брака по его длительности.

Такие модели, как модель повторного вступления в брак, модель плодовитости по очередности рождений, модель контрацепции, можно найти у Файхтингера[37]. Там приводится обобщение до моделей с несколькими состояниями.

В заключение хочется отметить тесную связь описанных здесь моделей с марковской моделью экономики и образования Тонстада.

Перевод *Л. А. Гавриловой*

---

[36] Statistisches Bundesant Wiesbaden, 1969. Op. cit.

[37] Feichtinger G. Op. cit.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Натан Кейфиц. Математический анализ населения 10

Леон Таба. Взаимосвязи между возрастной структурой, плодовитостью, смертностью и миграцией. Воспроизводство и обновление населения . . 27

Жан Буржуа-Пиша. Анализ населения в процессе его стабилизации . . . 89

Жан Буржуа-Пиша. Стабильные, полустабильные населения и потенциал роста 139

Густав Файхтингер. Стохастические модели выбытия в статистике населения 164

Демографические модели

Редактор *З. А. Сумник*

Техн. редактор *Р. Н. Феоктистова*

Корректоры *Г. А. Башарина, А. Т. Сидорова*

Худ. редактор *Т. В. Стихно*

ИБ № 252

Сдано в набор 30/VIII 1976 г. Подп. к печ. 6/I 1977 г.
Формат бумаги 60×90/16. Бумага № 3. Объем 11,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 12,55 Усл. п. л. 11,5 Тираж 3500 экз.
(Тематич. план 1977 г. № 63) Заказ № 2176 Цена 1 р. 88 к.

Издательство **«Статистика»**, Москва, ул. Кирова. 39.

Великолукская городская типография
управления издательств, полиграфии
и книжной торговли Псковского облисполкома,
г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

Очередной сборник серии
«Новое в зарубежной демографии»

ИЗУЧЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ

10 л. с ил., цена ок. 1 р.

Авторы статей сборника — ведущие зарубежные демографы.

Статьи посвящены изложению методов измерения и анализа того, как изменяется продолжительность жизни людей, как зависит она сегодня от условий жизни каждого поколения в прошлом, как влияют на продолжительность жизни различные причины смерти, разные социально-экономические и демографические факторы. Эти проблемы стоят сегодня в центре внимания демографической науки.

Статьи сборника будут полезны медикам, специалистам по социальной гигиене, демографам, а также всем, кто интересуется закономерностями роста населения. Сборник может служить дополнительным пособием для аспирантов и студентов-демографов.

Книги о населении вы можете приобрести в книжных магазинах, распространяющих общественно-политическую литературу. Там же принимаются заказы на указанную литературу.